



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Influência da Desclinação no Efeito Hall Quântico Inteiro

Anderson Alves de Lima

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2013 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Influência da Desclinação no Efeito Hall Quântico Inteiro

Anderson Alves de Lima

Dissertação realizada sob a orientação do Prof.Dr. Cleverson Filgueiras, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2013 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

L732i Lima, Anderson Alves de.
Influência da desclinação no efeito hall quântico inteiro / Anderson Alves de Lima. -- 2013.
43 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Prof. Dr. Cleverson Filgueiras".
Referências.

1. Efeito Hall Quântico. 2. Níveis de Landau. 3. Desclinações. I. Filgueiras, Cleverson. II. Título.

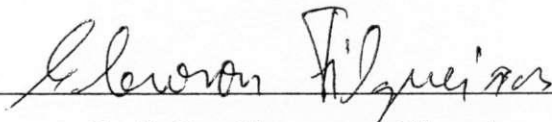
CDU 530.145(043)

ANDERSON ALVES DE LIMA

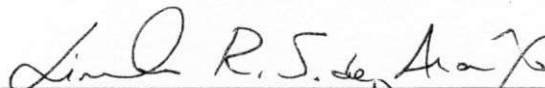
INFLUÊNCIA DA DESCLINAÇÃO NO EFEITO HALL QUÂNTICO INTEIRO

Dissertação aprovada em 20/02/2013

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Cleverton Filgueiras
Unidade Acadêmica de Física - UFCG
(Presidente)



Prof. Dr. Lincoln Rodrigues Sampaio Moraes
Unidade Acadêmica de Física - UFCG
(Membro interno)



Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
Departamento de Física - UFPB
(Membro externo)

Dedico aos meus pais Orlando
e Maria José e à minha eterna
companheira Jaqueline

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Aos meus pais.

À minha noiva, Jaqueline que tanto enriqueceu minha história.

Ao professor e amigo Dr. Cleverson Filgueiras pelo valioso auxílio na orientação desse trabalho, sendo um exemplo de professor que quero seguir.

Aos professores Dr. Francisco Brito e Dr. Eduardo Passos, pelo grande apoio nesta etapa da minha carreira acadêmica.

Aos professores Dr. Fernando Moraes e Dr. Lincoln Rodrigues por se disporem a participar da banca examinadora e pelas valiosas contribuições prestadas na melhoria desse trabalho.

Aos professores Dr. Rômulo Rodrigues e Dr. Fábio Dahia, pela dedicação e conhecimentos preciosos ministrados em suas disciplinas.

Aos colegas de curso que são verdadeiros amigos, pois sem essa parceria de estudo não conseguiria passar dessa etapa acadêmica.

À Capes, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Ao aplicarmos um campo magnético perpendicularmente à uma placa condutora bidimensional percorrida por corrente elétrica, verificamos um desvio das cargas elétricas para uma das bordas. Logo, a outra borda ficará eletricamente carregada com sinal oposto em relação à primeira. Esta diferença de potencial surgida transversalmente, chama-se tensão Hall. A resistência transversal à passagem de corrente, denomina-se resistência Hall e, classicamente, esta resistência varia linearmente com a intensidade do campo magnético. Quando aplicamos um campo magnético muito intenso e em temperaturas próximas ao zero absoluto, observamos uma quantização dessa resistência Hall. Tal quantização é definida pelos níveis de Landau. Sabendo que a topologia influencia nas propriedades físicas do material, neste trabalho investigamos a condutividade Hall de um gás de elétrons em uma interface com desclinações, na presença de um campo magnético ortogonal constante. Estes tipos de defeitos induzem curvatura singular média positiva ou negativa. Nota-se que a curvatura positiva diminui o tamanho do platô e muda o degrau na condutividade Hall, deslocando cada degrau para campos magnéticos menos intensos. Em contraste, a curvatura negativa leva a existência de dois tipos de platôs, um com tamanho maior e outro com tamanho menor em comparação com o caso plano. Também neste caso, há deslocamentos dos degraus da condutividade Hall para campos magnéticos mais elevados. Investigamos a condutividade Hall para elétrons em torno de uma distribuição de desclinações com simetria cilíndrica e verificamos uma correspondência com a desclinação efetiva individual.

Palavras Chaves: Efeito Hall Quântico, Níveis de Landau, Desclinações.

ABSTRACT

By applying a magnetic field perpendicular to a two-dimensional conductive plate traversed by electrical current, we found a deviation of electric charges to one of the edges. Thus, the other edge will be electrically charged with opposite sign to the first. This potential difference emerged across is called Hall voltage. The cross-resistance to the passage of current is called Hall resistance and this resistance varies linearly with the intensity of the magnetic field. When we apply a magnetic field very intense and at temperatures close to absolute zero, we observe the Hall resistance quantization. Such quantization is defined by the Landau levels. As topology influences the physical properties of the material, in this study we investigated the Hall conductivity of a gas with electrons at an interface with disclination, in the presence of a constant orthogonal magnetic field. These types of defects induce a singular average curvature, positive or negative. The positive curvature decreases the size of the plateau and it changes the step in Hall conductivity, displacing each step to less intense magnetic fields. Opposed, the negative curvature takes the existence of two types of plateaus, one with larger size and one with smaller size in comparison with the case plan. Also in this case, there are displacements of the steps of the Hall conductivity for higher magnetic fields. We investigated the Hall conductivity for electrons around a distribution of cylindrical symmetry with disclination and we found a relation with the individual effective disclination .

Key Words: Quantum Hall Effect, disclinations.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Efeito Hall Clássico	5
3	Efeito Hall Quântico	11
3.1	Níveis de Landau	11
3.2	Efeito Hall Quântico inteiro	15
3.3	Condutância para um único nível de Landau	20
4	Defeitos topológicos: deslocamentos e desclinações	23
5	Efeito Hall Quântico Inteiro em uma Interface com Desclinações	27
6	Conclusão e Perspectivas	37
	Bibliografia	39

Lista de Figuras

2.1	Partículas carregadas eletricamente ao se movimentarem em uma placa condutora com um campo magnético aplicado perpendicularmente, desviam suas trajetórias para as bordas dessa placa	5
2.2	No Efeito Hall há uma diferença de potencial entre as bordas, perpendicular ao sentido da corrente.	6
2.3	Gráfico da resistência Hall clássica versus o campo magnético	7
3.1	Quantização da resistência Hall em função do campo magnético ortogonal aplicado .	15
3.2	Vista lateral esquemática de um MOSFET de silício	16
3.3	MOSFET. O quadro I mostra um esboço de um MOSFET. (a) Estrutura de níveis de energia em $V_G = 0$. Na parte metálica, a banda é preenchida até a energia de Fermi E_F enquanto que o óxido é isolante. No semiconductor, a energia de Fermi está no gap (gap de energia entre as bandas de valência e condução). Perto da banda de valência, embora acima da E_F estão os níveis aceitadores de energia. (b) O potencial químico na parte metálica pode ser controlado pela voltagem V_G do gate via efeito do campo elétrico. Como uma consequência da introdução de buracos as bandas de semicondutores são dobradas para baixo, e acima de uma tensão limite. (c) a banda de condução é preenchida na proximidade da interface com o isolante. Deste modo, obtemos um gás de elétrons bidimensional. Seu potencial de confinamento dos quais é de forma triangular, os níveis (sub-bandas eletrônicas) de que são representados no quadro II. [12]	17

3.4 Heteroestruturas semicondutoras (*GaAs/AlGaAs*). (a) Dopantes são introduzidos na camada de *AlGaAs* com uma certa distância da interface. A energia de Fermi encontra-se abaixo do gap da banda e é fixada pelo nível de dopagem. A banda de condução do *GaAs* tem uma energia que é mais baixa que a dos níveis de dopagem, de tal modo que é energeticamente favorável para os elétrons na camada dopada para preencher a banda de condução do *GaAs* nas vizinhanças da interface. (b) Estas curvas de polarização das bandas nas vizinhança da interface entre dois semicondutores, e, portanto, um gás de elétrons bidimensional é formado na parte de *GaAs*. [12] 18

3.5 Densidade de estados em função da energia para valores crescentes do campo magnético [22] 19

3.6 Linhas de potencial eletrostático na amostra. Os contatos metálicos são descritos pelos potenciais químicos μ_L e μ_R para os contatos esquerdo e direito, respectivamente. Consideramos $L \gg W \gg \xi \gg l_B$, onde ξ é a escala de comprimento típica para variações do potencial eletrostático. A amostra é confinada na direção y entre y_{max} e y_{min} . As linhas finas indicam as linhas equipotenciais. Ao aproximar-se de uma das bordas da amostra, tornam-se paralelas para a borda. As linhas cinzas indicam o movimento eletrônico com o centro de orientação movendo-se ao longo das linhas equipotenciais. O elétron gira em sentido horário em torno da linha de potencial, que é causado, por exemplo, por uma impureza com carga negativa ($-$), e anti-horário em torno de um vale ($+$). Nas extremidades da amostra, as linhas equipotenciais, devido ao potencial de confinamento, conecta os dois contatos ao lado esquerdo e ao lado direito. [12] 20

4.1 Configurações iniciais para três distorções Volterra de primeiro tipo. As translações indicadas conduzem à estados de deslocamentos tipo de bordas nos casos a, b e no tipo parafuso no caso c. [28] 25

4.2	Em a, uma fatia de 60° de material foi adicionada. Em b, uma fatia de 60° de material foi retirada. As linhas que conectam as partículas, representam as direções cristalográficas [28].	25
4.3	Fatia de material retirada ou inserida em um cilindro, causando desclinação [28]. . .	26
4.4	Interface em um sólido tridimensional com desclinação [1]	26
5.1	Interface em um sólido tridimensional com um desclinação. A linha pontilhada no centro da figura, representa o centro da desclinação.	30
5.2	Distribuição dos níveis de Landau para $\alpha > 1$. As linhas sólidas são para $E_{n,0} = \frac{\hbar\omega_c}{\alpha} (n + \frac{1}{2})$ e as linhas pontilhadas são para $E_{n,-1} = \frac{\hbar\omega_c}{\alpha} (n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2})$	33
5.3	Condutividade Hall versus o campo magnético B . Para $\alpha < 1$, a largura do platô Hall quântico decresce e os degraus são deslocados para campos magnéticos menos intensos. Para $\alpha > 1$, existem dois tipos de platôs: um que tem largura maior em comparação com o caso plano e outro possui largura menor, também em comparação com o caso plano. A mudança dos degraus de condutividade Hall neste caso, está de acordo com a intensidade do campo magnético.	35
5.4	Condutividade Hall versus o campo magnético B para diferentes valores de densidade de defeitos, representada pelo parâmetro χ , com $\chi > 1$. O platô muda para campos magnéticos intensos quando χ cresce.	36

Capítulo 1

Introdução

O efeito Hall é um importante fenômeno estudado na física e muito contribuiu para o avanço da nossa tecnologia. Seu estudo se deu a partir de 1879 quando Edwin H. Hall, enquanto estudante da Johns Hopkins University, utilizando-se de uma placa condutora de ouro percorrida por uma corrente elétrica na presença de um campo magnético perpendicular, observou uma pequena diferença de potencial elétrico através da placa, perpendicular à corrente elétrica e ao campo magnético. Esta tensão transversal descoberta denominou-se tensão Hall [1].

Em 1930, Lev Davidovic Landau então com 22 anos, após estudar na University of Leningrad e com Niels Bohr divulgou uma pesquisa que tratava do comportamento dos elétrons livres em um campo magnético. Investigações posteriores mostraram que os níveis de Landau auxiliam na compreensão do Efeito Hall Quântico Inteiro.

Em 1985, Klaus von Klitzing ganhou o prêmio Nobel em Física devido a descoberta do efeito Hall quântico. Utilizando-se de um campo magnético alto e amostras próximas à temperatura do zero absoluto, estes encontraram platôs de condutividade, cujos valores representam a quantização do Efeito Hall em contraste com a teoria clássica. Essa quantização, por sua vez, pode ser observada apenas em um sistema de elétrons bidimensional que tornou-se possível devido ao desenvolvimento da tecnologia de semicondutores. Este pesquisador utilizou-se do dispositivo MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor), ou TECMOS (Transistor de Efeito de Campo Metal - Óxido - Semicondutor) obtendo um sistema muito próximo de ser bidimensional [2], devido o movimento dos elétrons

no eixo perpendicular à placa ser limitado onde existem estados de energia ressonantes, restam apenas dois graus de liberdade para as partículas.

Estes valores discretos de energia são explicados pelos níveis de Landau.

Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer and Daniel C. Tsui, em 1982-83, descobriram valores fracionários do número quântico n para o Efeito Hall Quântico através de uma nova forma de fluido quântico com excitações fracionárias carregadas, que lhes rendeu o prêmio Nobel em Física em 1998.

Embora o efeito Hall quântico fracionário seja também de grande importância, investigaremos apenas o efeito Hall Quântico Inteiro pois este fenômeno é bem definido utilizando-se da quantização de Landau.

O estudo do gás de elétrons bidimensional em um campo magnético intenso, perpendicular, é um importante ramo da Física da Matéria Condensada. Ao longo dos últimos anos, avanços tecnológicos tem levado à investigação de sistemas de elétrons bidimensionais não planares. Um método preparativo para realizar medidas de transporte em sistemas de elétrons bidimensionais não planares é, por exemplo, apresentado na referencia [7]. Além disso, é possível produzir objetos bidimensionais de tamanho nanométrico da forma desejada (nanotubos, fios quânticos, anéis, espirais semelhantes a tiras, etc [3,4]).

Este crescente interesse é também devido a descoberta do grafeno [5,6]. Andre Geim e Konstantin Novoselov produziram, isolaram, identificaram e caracterizaram esta monocamada de grafite, denominada grafeno. Suas propriedades, ainda intrigantes atualmente para a física, através do efeito Hall quântico anômalo, lhes renderam o prêmio Nobel em 2010. Trabalhos teóricos acerca do gás de elétrons bidimensional não planar em folhas de grafeno podem ser vistos nas referências [7–11].

Por causa da sua alta precisão na medida da resistência Hall ($\sim 10^{-9}$), o Efeito Hall Quântico pode ser utilizado para definir um padrão internacional de resistência elétrica [12].

A condutividade Hall é independente de propriedades particulares da amostra (geometria, impurezas, concentração/distribuição, etc.) sendo então, usada como modelo de resistência padrão [13,14]. No entanto, a curvatura pode mudar o comprimento do platô e deslocar o degrau na condutividade Hall [15]. Isto é interessante uma vez que os dispositivos Hall

podem ser usados como sensores [23]. Inspirados nisto, iremos investigar neste trabalho como a topologia pode influenciar o efeito Hall quântico.

Em física, existem muitas pesquisas a respeito de defeitos topológicos de modo a estudar sua influência na dinâmica quântica relativística e não-relativística. Na mecânica quântica não relativística uma série de problemas tem sido investigados: espalhamento de partículas por defeitos topológicos, estados ligados de elétrons e buracos para uma desclinação, níveis de Landau na presença de defeitos topológicos, e muitos outros.

Em diferentes áreas da física como, por exemplo, gravitação e física da matéria condensada, o estudo da topologia dos sistemas tem sido de grande importância. Defeitos topológicos aparecem em gravitação como monopólos, cordas cósmicas e paredes de domínio. Em física da matéria condensada eles são vórtices em supercondutores ou superfluidos, paredes de domínio em materiais magnéticos, sólitons em polímeros quase unidimensionais e deslocções ou desclinações em sólidos desordenados ou cristais líquidos. A mudança na topologia do meio introduzida por um defeito linear tal como uma desclinação, deslocção ou despiração em um meio elástico ou defeitos cósmicos no espaço-tempo produz alguns efeitos nas propriedades físicas do meio. Especificamente, estudaremos como um defeito topológico, chamado desclinação, afeta os níveis de Landau, modifica o comprimento dos platôs de condutividade e como estes são deslocados.

A condutividade de elétrons em sólidos, tridimensionais é estudada na Teoria de Defeitos Geométricos [17] e um grande esforço para entender esse sistema tem sido feito até então. Consideremos elétrons em um sólido tridimensional, com desclinações, restrito a uma interface fina podendo manifestar o efeito Hall quântico. Também consideraremos apenas o estado fundamental, $T = 0K$. A temperatura causa uma suavização nos degraus da condutividade quantizada [18]. Embora a nossa contribuição se aplique apenas para condutores comuns, esperamos que tal contribuição possa inspirar a investigação da influência de defeitos topológicos no efeito Hall anômalo em folhas de grafeno [19] assim como em isolantes topológicos bidimensionais [20].

Este trabalho é dividido da seguinte maneira: no capítulo 2, discutiremos o Efeito Hall Clássico. No capítulo 3, abordaremos um pouco sobre níveis de Landau e Efeito Hall Quântico.

No capítulo 4, teremos noções acerca dos defeitos topológicos: deslocamento e desclinação e no capítulo 5, apresentaremos a nossa contribuição, onde avaliamos o Efeito Hall Quântico Inteiro com desclinação que induz curvatura positiva ou negativa no sólido e comparamos com o caso sem defeito, notando que a curvatura positiva diminui o tamanho do platô e muda o degrau na condutividade Hall, deslocando cada degrau para campos magnéticos menos intensos. Em contraste, a curvatura negativa leva a existência de dois tipos de platôs, um com tamanho maior e outro com tamanho menor em comparação com o caso plano. Também neste caso, há deslocamentos dos degraus da condutividade Hall para campos magnéticos mais elevados. Investigamos a condutividade Hall para elétrons em torno de uma distribuição de simetria cilíndrica com desclinação e verificamos uma correspondência com a desclinação efetiva simples.

Capítulo 2

Efeito Hall Clássico

Para falarmos de efeito Hall quântico, faz-se necessário primeiramente uma compreensão do efeito Hall clássico.

Consideremos então uma placa condutora bidimensional com um campo magnético perpendicular à mesma (sendo a placa no plano xy e o campo no eixo z). Nas extremidades dessa placa colocamos uma diferença de potencial, então as partículas carregadas passam a se mover pela placa conforme Figura 2.1.

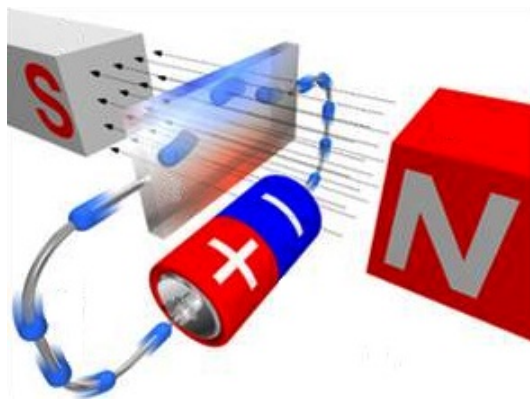


Figura 2.1: Partículas carregadas eletricamente ao se movimentarem em uma placa condutora com um campo magnético aplicado perpendicularmente, desviam suas trajetórias para as bordas dessa placa

Sabemos que forças geradas por campos magnéticos não realizam trabalho, pois agem perpendicularmente à movimentação das cargas [21]. Então, com o campo magnético aplicado

a esta placa condutora, devido à força de Lorentz, as cargas desviarão a sua trajetória e se acumularão em uma das bordas da placa. Conseqüentemente, a borda oposta terá também o acúmulo de cargas com o sinal oposto, conforme verificamos na Figura 2.2.

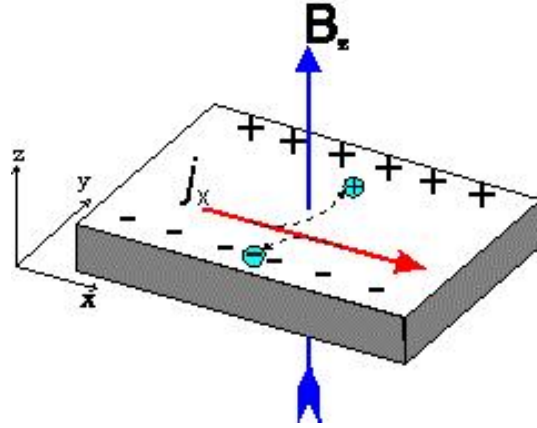


Figura 2.2: No Efeito Hall há uma diferença de potencial entre as bordas, perpendicular ao sentido da corrente.

Observando o acúmulo de cargas de sinais opostos nas extremidades desta placa condutora bidimensional, notamos que há uma diferença de potencial entre as duas bordas, ou seja, uma diferença de potencial transversal à passagem de corrente. Chamamos esta diferença de potencial de *tensão transversal* ou simplesmente *tensão Hall*.

Para que ocorra o efeito Hall, é necessário a presença de bordas. Caso não existisse bordas, as cargas não teriam como se acumular e, conseqüentemente, não teríamos uma tensão Hall [22].

A resistência transversal encontrada na movimentação da partícula é chamada resistência Hall, sendo

$$R_H = \frac{B}{qn_{el}}, \quad (2.1)$$

onde q representa a carga e n_{el} é a densidade de carga bidimensional.

Pela equação (2.1), nota-se que a resistência Hall aumenta linearmente com o aumento do campo magnético (Figura 2.3).

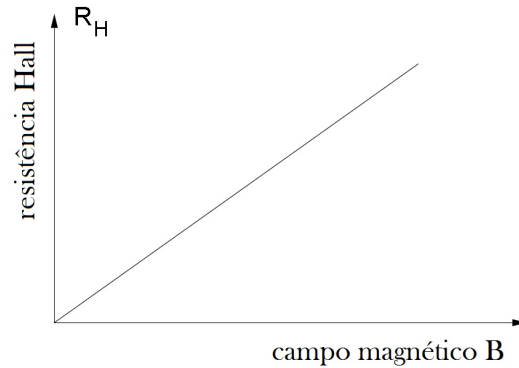


Figura 2.3: Gráfico da resistência Hall clássica versus o campo magnético

Percebemos que o efeito Hall é também usado para determinar o sinal da carga transportada através da amostra e a densidade de carga do material condutor [23].

Podemos compreender melhor o efeito Hall clássico, utilizando o modelo de Drude que explica as propriedades de transporte de partículas carregadas negativamente em metais [24].

A força que as partículas sentem, ao atravessarem a placa condutora bidimensional, chama-se força de Lorentz. Ela é a força resultante gerada pelo campo magnético e campo elétrico [21]. Logo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.2)$$

Porém, tratando do modelo de Drude, temos que levar em consideração um tempo de relaxação (τ) para o movimento independente das partículas que colidem com estruturas fixas. Logo,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -q\left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m^*} \times \vec{B}\right) - \frac{\vec{p}}{\tau}, \quad (2.3)$$

onde \vec{E} e \vec{B} são os campos elétrico e magnético, $q = -e$ é a carga da partícula em movimento (elétrons) e m^* é a massa de banda (ou massa efetiva).

Com o passar do tempo, as cargas se acumularão nas bordas (devido à força magnética) de modo que, devido à força gerada pelo campo elétrico transversal, estas cargas serão repelidas.

Então, o vetor força elétrica se anulará com o vetor força magnética, o que implica em $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Neste sentido, percebemos que a tensão Hall é uma tensão de pequena intensidade pois sabemos que a força elétrica possui magnitude bastante superior à força magnética.

Para elétrons em $2D$, temos $\vec{p} = (p_x, p_y)$, então

$$\begin{aligned} eE_x &= -\frac{eB}{m^*}p_y - \frac{p_x}{\tau} \\ eE_y &= -\frac{eB}{m^*}p_x - \frac{p_y}{\tau} . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sabemos que o campo magnético está na direção z e que a frequência cíclotron é dada por

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} . \quad (2.5)$$

Esta é a frequência de uma partícula em movimento cíclotron em um campo magnético B .

Pela condutividade de Drude, temos

$$\sigma_0 = \frac{n_{el}e^2\tau}{m^*} \quad (2.6)$$

Substituindo as expressões acima na equação (2.4), temos

$$\sigma_0 E_x = -en_{el} \frac{p_x}{m^*} - en_{el} \frac{p_y}{m^*} (\omega_c \tau) \quad (2.7)$$

e

$$\sigma_0 E_y = -en_{el} \frac{p_x}{m^*} (\omega_c \tau) - en_{el} \frac{p_y}{m^*} . \quad (2.8)$$

Em termos da densidade de corrente,

$$\vec{j} = -en_{el} \frac{\vec{p}}{m^*} \quad (2.9)$$

Na forma matricial, como $\vec{E} = \rho \vec{j}$, temos o tensor resistividade [12]

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \mu B \\ -\mu B & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

onde, na expressão acima, introduziremos a mobilidade (μ), sendo este um termo que caracteriza a intensidade do movimento dos portadores de carga através de metais e semicondutores devido a um dado campo elétrico aplicado. A mobilidade é dada por:

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*}. \quad (2.11)$$

A partir das expressões acima, para a resistividade Hall temos

$$\rho_H = \frac{\omega_c \tau}{\sigma_0} = \frac{eB}{m^*} \tau \times \frac{m^*}{n_{el} e^2 \tau} = \frac{B}{en_{el}}. \quad (2.12)$$

Temos ainda que o tensor condutividade é obtido da resistividade, dado pela matriz inversa

$$\sigma = \rho^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_L & -\sigma_H \\ \sigma_H & \sigma_L \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

onde a condutividade longitudinal é dada por $\sigma_L = \frac{\sigma_0}{(1+\omega_c^2 \tau^2)}$ e a condutividade Hall $\sigma_H = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{(1+\omega_c^2 \tau^2)}$. No limite teórico do desaparecimento de impurezas, ou seja, o limite em que $\omega_c \tau \rightarrow \infty$ (tempos de espalhamento muito longos), os tensores resistividade e condutividade são [12]

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B}{en_{el}} \\ -\frac{B}{en_{el}} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

e

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{en_{el}}{B} \\ \frac{en_{el}}{B} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Quanto a relação entre a resistividade e a resistência, sabemos que $R = \rho \frac{L}{A}$ sendo A a área da seção transversal de um material condutor. Porém, como estamos tratando de um material bidimensional, então a dimensão de área passa a ser de comprimento, logo

$$R \sim \rho \quad (2.16)$$

Logo, em um sistema bidimensional, a resistência Hall equivale à resistividade Hall.

Uma das mais importantes aplicações práticas para o efeito Hall é na medida de campos magnéticos. Em uma pequena barra de semicondutor, percorrido por uma dada corrente elétrica aplicamos um campo magnético cuja intensidade desejamos medir. Então, o valor da tensão que aparece transversalmente na barra fornece uma medida direta do campo. Temos, deste modo, um sensor Hall [25].

Capítulo 3

Efeito Hall Quântico

Neste capítulo, faremos uma breve revisão acerca dos principais tópicos para compreender o Efeito Hall Quântico. Primeiramente, faremos uma abordagem tratando dos Níveis de Landau e, em seguida, trataremos do Efeito Hall Quântico Inteiro, sendo estes bem definidos pelos níveis de Landau.

3.1 Níveis de Landau

Consideremos uma partícula carregada eletricamente, movimentando-se na presença de um campo magnético. Sabemos que a força magnética não realiza trabalho, pois age perpendicularmente ao movimento da partícula. Então, essa partícula carregada descreverá um movimento orbital cíclico. Essas partículas carregadas, possuem valores discretos de energia e ocupam órbitas discretas. Esses níveis discretos de energia são chamados de níveis de Landau [26].

O Hamiltoniano (H) para uma partícula livre é dado por

$$H = \frac{p^2}{2m}, \quad (3.1)$$

sendo p o momento e m a massa da partícula.

Consideremos então essa partícula movendo-se no plano xy e com um campo magnético aplicado no eixo z (*perpendicular ao plano*).

Representaremos então, o momento da partícula, levando em consideração a influência do campo magnético na mesma. Logo

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{\Pi} = \vec{p} + e\vec{A}(\vec{r}) \quad (3.2)$$

Sendo $\vec{A}(\vec{r})$ o potencial vetor que gera o campo $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e e , a carga da partícula.

Na equação (3.2) temos um acoplamento mínimo que é possível pois

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = q \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \quad (3.3)$$

Sabendo que $\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ e que $\vec{F} = q \left\{ -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \right] \right\} = q \left\{ -\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \right] \right\}$.

Logo, a força será $\vec{F} = q \left[-\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \right]$. Onde tal força está associada à função de Lagrange $L = T - q\phi + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$ que leva à função de Hamilton $H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\phi$, com $m\vec{v} = \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$.

O Hamiltoniano (3.1) será escrito na forma

$$H^B = \frac{[\vec{p} + e\vec{A}(\vec{r})]^2}{2m}. \quad (3.4)$$

Sabendo que os níveis de Landau são níveis de energia quantizados nas órbitas cíclotron, faremos uma abordagem da mecânica quântica para este fenômeno.

Consideremos o comutador do momento

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= [p_x + eA_x(\vec{r}), p_y + eA_y(\vec{r})] = \\ &= [p_x, p_y] + [p_x, eA_y(\vec{r})] + [eA_x(\vec{r}), p_y] + [eA_x(\vec{r}), eA_y(\vec{r})] \end{aligned} \quad (3.5)$$

As relações de comutação para duas dimensões são dadas por

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar \quad e \quad [x, p_y] = [y, p_x] = [p_x, p_y] = [x, y] = 0 \quad (3.6)$$

onde $\vec{r} = (x, y)$ e o momento canônico $\vec{p} = (p_x, p_y)$.

Utilizando 3.6 e pela propriedade $[o_1, f(o_2)] = \frac{df}{do_2}[o_1, o_2]$, 3.5 se torna

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -ie\hbar\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \partial A_x \partial y\right) = -ie\hbar(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = -ie\hbar B_z. \quad (3.7)$$

Introduziremos o termo comprimento magnético que é a escala de comprimento fundamental na presença de um campo magnético

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (3.8)$$

Então, 3.7 se tornará

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i\frac{\hbar^2}{l_B^2} \quad (3.9)$$

Lembrando das relações da Mecânica Quântica para os operadores escada, temos

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\frac{p}{p_0}\right) \quad e \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p}{p_0}\right) \quad (3.10)$$

Substituindo o momento invariante de Gauge da equação (3.7) na equação dos operadores escada, temos

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x - i\Pi_y) \quad e \quad a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y) \quad (3.11)$$

Pela relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$, temos

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_B}(a^\dagger + a) \\ \Pi_y &= \frac{\hbar}{i\sqrt{2}l_B}(a^\dagger - a) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para nossa definição de momento, o Hamiltoniano será

$$H^B = \frac{1}{2m_b} (\Pi_x^2, \Pi_y^2). \quad (3.13)$$

Substituindo 3.12 em 3.13 na equação (3.13), temos

$$\begin{aligned} H^B &= \frac{\hbar^2}{4ml_b^2} [a^{\dagger 2} + a^{\dagger}a + aa^{\dagger} + a^2 - (a^{\dagger 2} - a^{\dagger}a - aa^{\dagger} + a^2)] \\ &= \frac{\hbar^2}{2ml_b^2} (a^{\dagger}a + aa^{\dagger}) \\ &= \frac{\hbar^2}{ml_b^2} \left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde

$$a^{\dagger}a|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.15)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$. Então,

$$H^B = \frac{\hbar^2}{ml_b^2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.16)$$

Assim, sabendo que a frequência ciclotron é dada por $\omega_c = \hbar/m_b l_B^2$, 3.16 se torna

$$H^B = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.17)$$

sendo $H^B |n\rangle = E_n |n\rangle$ então

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.18)$$

3.2 Efeito Hall Quântico inteiro

Até o momento, vimos que a resistência Hall varia linearmente com o campo magnético. Porém, para campos magnéticos muito intensos e temperaturas muito baixas, o cenário muda, percebendo-se então, uma quantização dessa resistência Hall.

Note que, de acordo com a figura abaixo, para campos magnéticos menos intensos, percebemos que o Efeito Hall ainda pode ser descrito classicamente de acordo com o Capítulo 2. Conforme aumentamos o campo magnético aplicado, percebemos a quantização da resistência Hall.

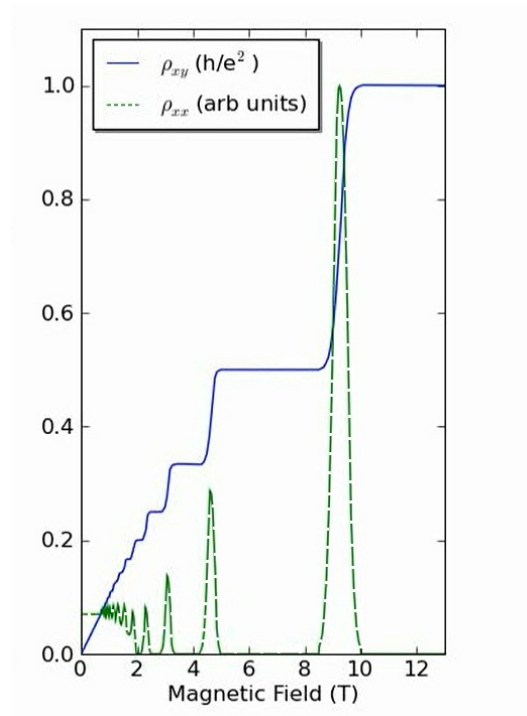


Figura 3.1: Quantização da resistência Hall em função do campo magnético ortogonal aplicado

Necessitamos, então, de algum tratamento quântico.

Em 1985, Klaus von Klitzing ganhou o prêmio Nobel em Física devido a descoberta do efeito Hall quântico. Utilizando-se de um campo magnético alto e amostras próximas à temperatura do zero absoluto, encontrou-se platôs de condutividade com degraus

característicos (veja Figura 3.1), cujos valores representam a quantização do efeito Hall em contraste com a teoria clássica. Essa quantização, por sua vez, pode ser observada apenas em um sistema de elétrons bidimensional que tornou-se possível devido ao desenvolvimento da tecnologia de semicondutores.

Klaus von Klitzing utilizou do dispositivo MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor), ou TECMOS (Transistor de Efeito de Campo Metal - Óxido - Semicondutor) obtendo um sistema muito próximo de ser bidimensional.

Neste sistema, o movimento na direção perpendicular é limitado. Em diferentes situações, estados de energia no plano são quase contínuos, mas aqueles perpendiculares são discretos.

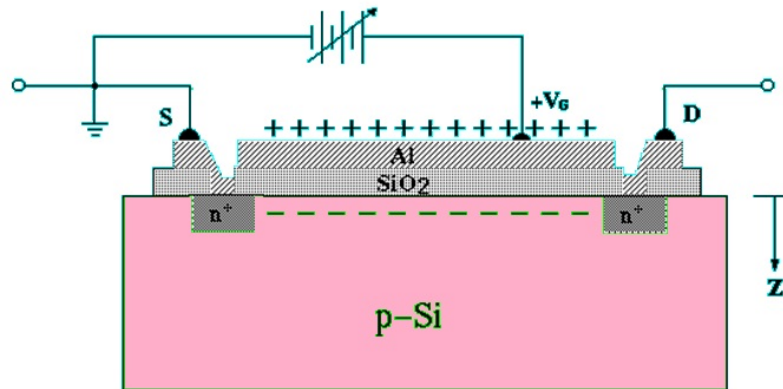


Figura 3.2: Vista lateral esquemática de um MOSFET de silício

No MOSFET, camadas de inversão são formadas na interface entre um semicondutor e um isolante ou entre dois semicondutores, com um deles atuando como isolante. O sistema em que o Efeito Hall Quântico foi descoberto teve o silício (Si) como semicondutor e o dióxido de silício como isolante. Estes elétrons entram em um poço quântico criado por este campo e pela interface. O movimento perpendicular à interface é quantizado e, portanto, tem uma rigidez fundamental que congela graus de liberdade nesta direção. O resultado é um sistema bidimensional de elétrons [2]. O potencial total visto pelos elétrons é convenientemente descrito pela forma da curvatura de banda. Ou seja, o potencial da rede periódica dá origem à bandas de energia, e a lenta variação do potencial elétrico dobra essas bandas. Uma boa

representação deste processo, temos na Figura 3.3.

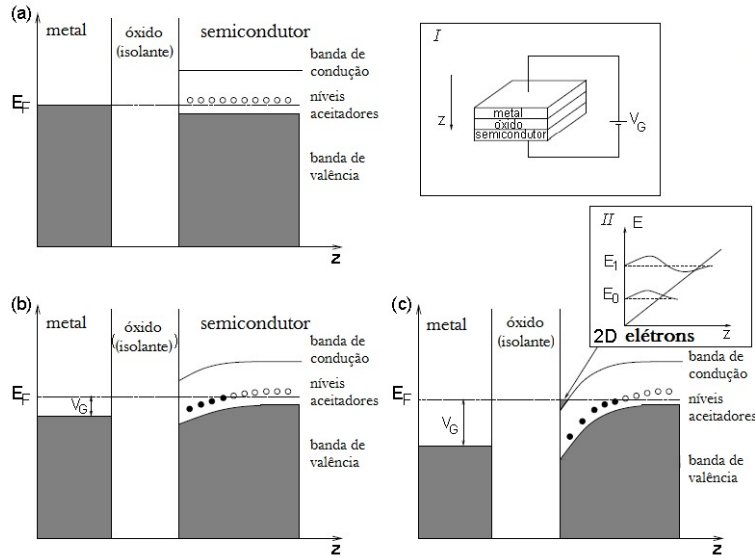


Figura 3.3: MOSFET. O quadro I mostra um esboço de um MOSFET. (a) Estrutura de níveis de energia em $V_G = 0$. Na parte metálica, a banda é preenchida até a energia de Fermi E_F enquanto que o óxido é isolante. No semiconductor, a energia de Fermi está no gap (gap de energia entre as bandas de valência e condução). Perto da banda de valência, embora acima da E_F estão os níveis aceitadores de energia. (b) O potencial químico na parte metálica pode ser controlado pela voltagem V_G do gate via efeito do campo elétrico. Como uma consequência da introdução de buracos as bandas de semicondutores são dobradas para baixo, e acima de uma tensão limite. (c) a banda de condução é preenchida na proximidade da interface com o isolante. Deste modo, obtemos um gás de elétrons bidimensional. Seu potencial de confinamento dos quais é de forma triangular, os níveis (sub-bandas eletrônicas) de que são representados no quadro II. [12]

Outra forma de criarmos um sistema em que os elétrons passam a se movimentar em duas dimensões, está representada na Figura 3.4

A energia de elétrons em um sistema bidimensional é dada a seguir

$$E_k = \left\{ \frac{h}{2\pi} \right\}^2 / 2m \left[k_x^2 + k_y^2 \right] \quad (3.19)$$

onde k_x e k_y são números de onda do elétron.

Número de estados, N , abaixo de E_k é

$$N(E) = S_k / (2\pi)^2 = (\pi k^2) / (2\pi)^2 \quad (3.20)$$

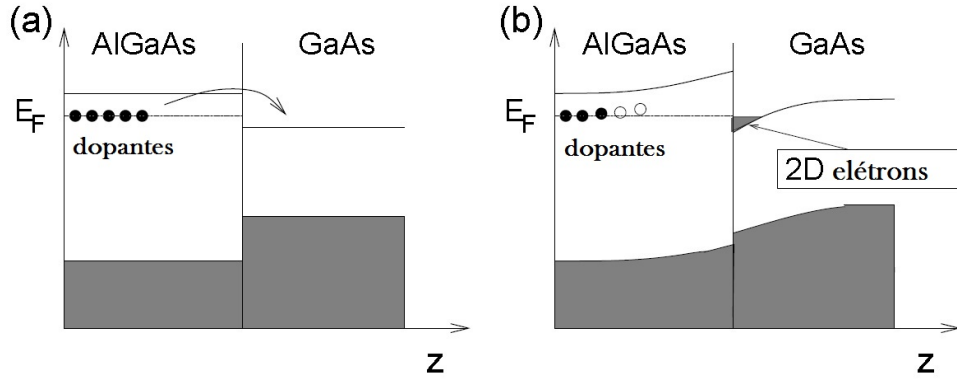


Figura 3.4: Heteroestruturas semicondutoras (*GaAs/AlGaAs*). (a) Dopantes são introduzidos na camada de *AlGaAs* com uma certa distância da interface. A energia de Fermi encontra-se abaixo do gap da banda e é fixada pelo nível de dopagem. A banda de condução do *GaAs* tem uma energia que é mais baixa que a dos níveis de dopagem, de tal modo que é energeticamente favorável para os elétrons na camada dopada para preencher a banda de condução do *GaAs* nas vizinhanças da interface. (b) Estas curvas de polarização das bandas nas vizinhança da interface entre dois semicondutores, e, portanto, um gás de elétrons bidimensional é formado na parte de *GaAs*. [12]

onde S_k é a área no espaço k .

A densidade de estados, $D(E)$, é

$$D(E) = dN(E)/dE = (2\pi m)/h^2 \quad (3.21)$$

Da equação acima, vemos que em um sistema bidimensional, a densidade de estados é constante com a energia cinética dos elétrons.

A energia cinética em um campo magnético B é quantizada conforme os níveis de Landau, devido ao movimento cíclotron. Então, níveis de energia em um sistema bidimensional são discretos em um campo magnético. A energia de separação entre os níveis de Landau é dada pela energia cíclotron $(h/2\pi)\omega_c$. Os números de estados em cada nível de Landau, são dados por

$$N_L = D(E)(h/2\pi)\omega_c = [(2\pi m)/h^2](h/2\pi)(eB/m) = eB/h \quad (3.22)$$

onde ω_c é a frequência cíclotron e igual a eB/m .

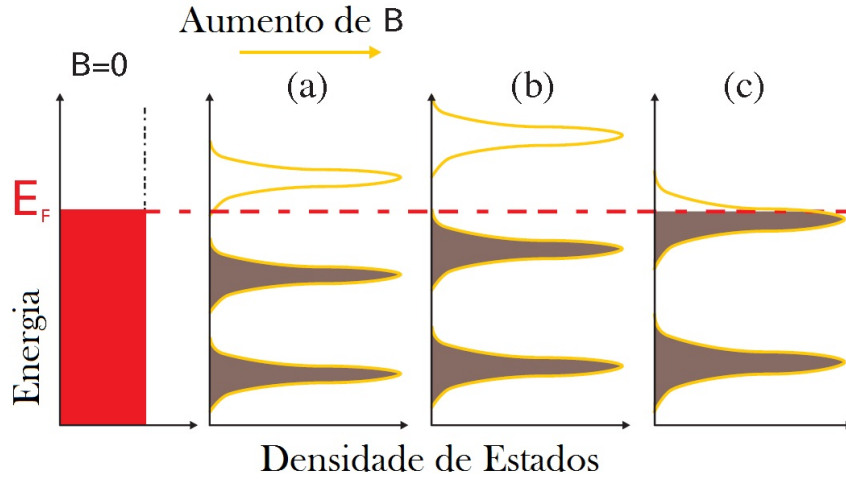


Figura 3.5: Densidade de estados em função da energia para valores crescentes do campo magnético [22]

Então o número de estados abaixo da energia de Fermi (E_F) é $N = N_L \times n$ sendo $n = 1, 2, 3, \dots$

A condição para baixas temperaturas e altos campos magnéticos de modo que o gap de energia entre os níveis de Landau seja mais distante da energia de excitação térmica (ver Figura 3.5).

$$(h/2\pi)\omega_c \gg k_B T \quad (3.23)$$

onde k_B é a constante de Boltzman e T é a temperatura.

Quando os níveis de Landau do último para o i -ésimo nível são preenchidos e são vazios acima, estes meios no nível de Fermi encontram-se entre os níveis de Landau, o número de portadores, N_s são eB/h vezes n .

A resistência Hall é dada por

$$R_H = \frac{B}{eN} = \frac{B}{[e(ne\frac{B}{h})]} = \frac{h}{ne^2} \quad (3.24)$$

A condição para que os níveis de Landau abaixo do nível de Fermi estejam completamente preenchidos e vazios acima desse nível deve ser dada para temperaturas no zero absoluto.

Para explicar o platô do efeito Hall, nós precisamos de uma introdução para outro conceito, o de desordem e localização de elétrons.

3.3 Condutância para um único nível de Landau

Calcularemos a condutância de um nível de Landau completamente preenchido para a geometria mostrada na Figura 3.6, ou seja, quando todos os estados quânticos (descritos com o gauge de Landau) do n -ésimo nível de Landau são ocupados. Primeiramente, calcularemos a corrente do n -ésimo nível de Landau, que ocorre da esquerda para o contato direito, com a ajuda da equação (3.25)

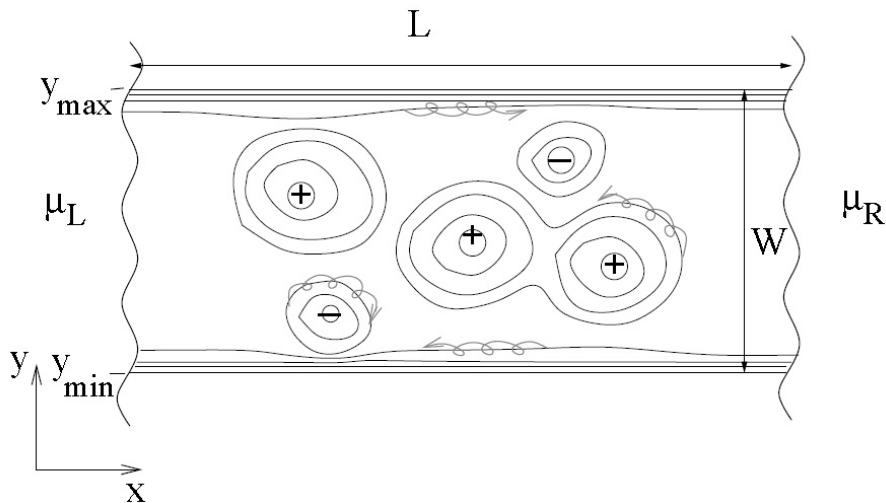


Figura 3.6: Linhas de potencial eletrostático na amostra. Os contatos metálicos são descritos pelos potenciais químicos μ_L e μ_R para os contatos esquerdo e direito, respectivamente. Consideramos $L \gg W \gg \xi \gg l_B$, onde ξ é a escala de comprimento típica para variações do potencial eletrostático. A amostra é confinada na direção y entre y_{max} e y_{min} . As linhas finas indicam as linhas equipotenciais. Ao aproximar-se de uma das bordas da amostra, tornam-se paralelas para a borda. As linhas cinzas indicam o movimento eletrônico com o centro de orientação movendo-se ao longo das linhas equipotenciais. O elétron gira em sentido horário em torno da linha de potencial, que é causado, por exemplo, por uma impureza com carga negativa ($-$), e anti-horário em torno de um vale ($+$). Nas extremidades da amostra, as linhas equipotenciais, devido ao potencial de confinamento, conecta os dois contatos ao lado esquerdo e ao lado direito. [12]

$$I_n^x = -\frac{e}{L} \sum_k \langle n, k | v_x | n, k \rangle , \quad (3.25)$$

ou seja, como a soma ao longo de todos N_B canais quânticos rotulados pelo vetor de onda $k = 2\pi m/L$, com velocidade

$$\langle n, k | v_x | n, k \rangle = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_{n,k}}{\partial k} = \frac{L}{2\pi\hbar} \frac{\Delta \epsilon_{n,m}}{\Delta m} ,$$

em termos da relação de dispersão (3.8). Note que a velocidade na direção y é zero devido a energia não dispersa como função da componente y do vetor de onda. A expressão acima é facilmente avaliada com $\Delta m = 1$, e obtém-se

$$\langle n, k | v_x | n, k \rangle = \frac{L}{\hbar} (\epsilon_{n,m+1} - \epsilon_{n,m}) .$$

Com a ajuda desta expressão, a corrente (3.25) do n -ésimo nível de Landau fica

$$I_n = -\frac{e}{L} \sum_m \frac{L}{\hbar} (\epsilon_{n,m+1} - \epsilon_{n,m}) .$$

E nota-se que todos os termos na soma cancelam além dos termos limítrofes $\epsilon_{n,m_{min}}$ e $\epsilon_{n,m_{max}}$, que corresponde aos potenciais químicos $\mu_{mín}$ e $\mu_{máx}$, respectivamente. A diferença entre estes dois potenciais químicos pode ser escrita em termos da voltagem (Hall) V entre a borda superior e inferior $\mu_{máx} - \mu_{mín} = -eV$. Obtemos assim o resultado final

$$I_n = -\frac{e}{h} (\mu_{máx} - \mu_{mín}) = \frac{e^2}{h} V . \quad (3.26)$$

Isto significa que cada nível de Landau contribui um quantum de condutância $\sigma_n = \frac{e^2}{h}$ para o transporte eletrônico e n completamente ocupados. Então, níveis de Landau contribuem com uma condutância

$$\sigma = \sum_{n'=0}^{n-1} \sigma_{n'} = n \frac{e^2}{h}. \quad (3.27)$$

Note, além disso que este é um exemplo particular da fórmula de Landauer-Büttiker do transporte quântico

$$\sigma_n = \frac{e^2}{h} T_n$$

Através de um nível n de condução, onde T_n é o coeficiente de transmissão do nível [36,35,37]. Devido a $T_n + R_n = 1$, em termos do coeficiente de reflexão R_n , o resultado acima indica que cada nível de Landau preenchido pode ser visto como um canal de condução com transmissão perfeita $T_n = 1$, ou seja, onde um elétron injetado não é refletido ou retroespalhado [12].

Capítulo 4

Defeitos topológicos: deslocamentos e desclinações

Em física do estado sólido, estudamos estruturas cristalinas e as suas propriedades físicas. Sabemos que na natureza não existem cristais ideais e a maioria dessas propriedades tais como fusão, plasticidade, crescimento, etc., são definidas por defeitos da estrutura cristalina. Portanto, o estudo de defeitos é de extrema importância para entendermos as estruturas da formação das redes [27].

Em física, existem muitas pesquisas a respeito de defeitos topológicos de modo a estudar sua influência na dinâmica quântica relativística e não-relativística. Na mecânica quântica não relativística, uma série de problemas tem sido investigados: espalhamento de partículas por defeitos topológicos, estados ligados de elétrons e buracos para uma desclinação, níveis de Landau na presença de defeitos topológicos e muitos outros [16].

Em diferentes áreas da física como, por exemplo, gravitação e física da matéria condensada, o estudo da topologia dos sistemas tem sido de grande importância. Defeitos topológicos aparecem em gravitação como monopólos, cordas cósmicas e paredes de domínio. Em física da matéria condensada eles são vórtices em supercondutores ou superfluidos, paredes de domínio em materiais magnéticos, sólitons em polímeros quase unidimensionais e deslocações ou desclinações em sólidos desordenados ou cristais líquidos. A mudança na topologia do meio introduzida por um defeito linear tal como uma desclinação, deslocamento ou despiração em

um meio elástico ou defeitos cósmicos no espaço-tempo produz alguns efeitos nas propriedades físicas do meio [26]. Especificamente, estudaremos como um defeito topológico, chamado desclinação, afeta os níveis de Landau modificando o comprimento dos platôs de condutividade e como estes são deslocados.

Defeitos podem ser pontuais, lineares ou de superfícies de acordo com o fato de a região do defeito ser ligada na escala atômica em uma, duas ou três dimensões [24].

Faremos uma breve abordagem da teoria topológica de deslocamento e desclinação, apresentada de uma maneira geral, podendo estes conceitos fundamentais serem aplicados a vários tipos diferentes de materiais.

Tendo em vista que a matéria condensada é composta por blocos elementares chamados partículas, ou seja, os átomos e moléculas, a forma das partículas tem uma importante influencia nas propriedades dos materiais. As partículas podem se assemelhar a pontos, linhas, folhas, ou de formas bastantes complexas. Por exemplo, moléculas em cristais líquidos frequentemente têm a forma linear. O mesmo se aplica a muitos polímeros, onde a dimensão de comprimento é muito maior em relação à sua dimensão lateral. Então estes materiais possuem inúmeras possibilidades de adquirir as mais diferentes formas [17].

Não apenas a forma mas também o arranjo das partículas é muito importante para as propriedades físicas dos materiais que eles compreendem. Existe uma variedade imensa de materiais que vão desde o mais ordenado ao completamente desordenado. Porém, neste capítulo, consideraremos materiais em que a maioria das partículas possuem uma configuração de modo ordenado.

Podemos entender um deslocamento, em matéria condensada, como um defeito cristalográfico, ou seja, uma irregularidade dentro de uma estrutura de cristal. A presença de deslocamentos influencia fortemente muitas das propriedades dos materiais. Esta teoria foi originalmente desenvolvida por Vito Volterra em 1905.

Existem dois tipos principais de deslocamento: o de borda e o de parafuso (ver Figura 4.1). Nos deslocamentos mistos ocorrem os dois casos.

Temos na Figura 4.2 um tipo de desclinação em que existe um defeito pontual.

Quando tratamos de um material em três dimensões, este defeito que era pontual passa a

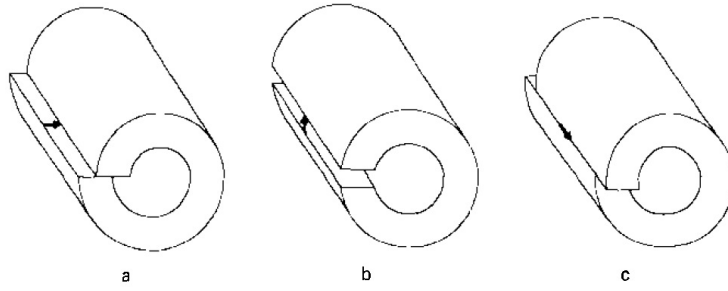


Figura 4.1: Configurações iniciais para três distorções Volterra de primeiro tipo. As translações indicadas conduzem à estados de deslocamentos tipo de bordas nos casos a, b e no tipo parafuso no caso c. [28]

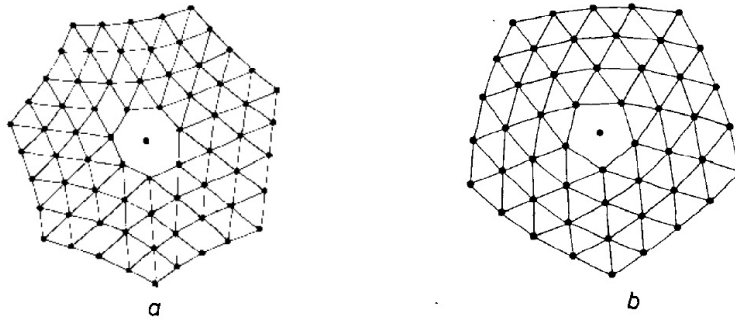


Figura 4.2: Em a, uma fatia de 60° de material foi adicionada. Em b, uma fatia de 60° de material foi retirada. As linhas que conectam as partículas, representam as direções cristalográficas [28].

ser linear. Esta desclinação é obtida removendo ou inserindo uma fatia de material, causando um defeito linear no centro do cilindro representado na Figura 4.3.

Consideremos a Figura 4.4 sendo a interface em um sólido tridimensional com uma desclinação. A linha no centro da figura, representa o núcleo da desclinação.

Deslocamentos	$R_{\mu\nu}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}^i \neq 0$
Desclinações	$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}^i = 0$
Deslocamento e Desclinações	$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}^i \neq 0$

Tabela 4.1: Curvatura e torção

Elétrons que contribuem para a condução, são tratados no limite contínuo, no qual são tratados como elétrons livres onde a sua massa passa a ser a massa efetiva que carrega consigo

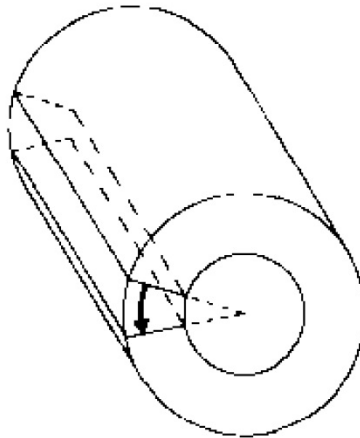


Figura 4.3: Fatia de material retirada ou inserida em um cilindro, causando desclinação [28].

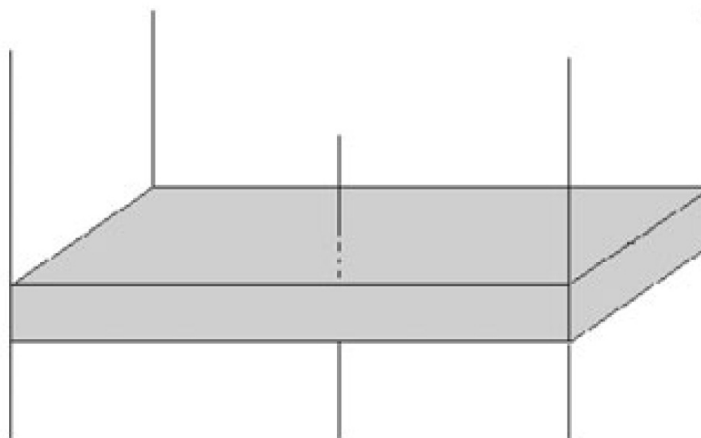


Figura 4.4: Interface em um sólido tridimensional com desclinação [1]

as características da estrutura cristalina a qual ele se movimentava. Segundo Katanaev [17] quando o meio possui defeito, isto induz uma curvatura ou torção que afetam o movimento dos elétrons.

Observando a Tabela 4.1, notamos que no caso da deslocação, o tensor de curvatura é nulo e a torção não-nula. Para o caso da desclinação, a torção é nula e existe uma dada curvatura associada portanto a uma métrica. No caso de inserirmos ou retirarmos uma dada fatia de um material tridimensional, percebemos um defeito linear no centro do objeto, este defeito possui uma singularidade cônica na curvatura, logo a métrica utilizada será a do cone [26].

Capítulo 5

Efeito Hall Quântico Inteiro em uma Interface com Desclinações

Neste capítulo, apresentaremos nossa contribuição ao estudo do Efeito Hall Quântico, a qual foi publicada em *The European Physical Journal B* [1].

Estudaremos agora, o efeito da desclinação de um gás de elétrons bidimensional na condutividade Hall. Começamos por considerar uma desclinação longa linear infinita orientada ao longo do eixo z . Esta desclinação é obtida removendo ou inserindo uma fatia do material, conforme mencionamos no capítulo anterior. Se λ é o ângulo que define a fatia do material, a métrica do meio com uma desclinação é dada por [17]

$$dS^2 = dz^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2, \quad (5.1)$$

sendo escrita em coordenadas cilíndricas. Aqui, $\alpha = 1 + \frac{\lambda}{2\pi}$. Esta métrica descreve um meio plano com singularidade cônica na origem.

A curvatura escalar deste meio é

$$R = 2\pi \frac{1 - \alpha}{\alpha} \delta^2(\rho), \quad (5.2)$$

com $\delta^2(\rho)$ sendo a função delta bidimensional em um espaço plano. Se $0 < \alpha < 1$ (déficit angular), o defeito possui curvatura positiva. Quando $1 < \alpha < \infty$ (acrécimo angular), o defeito possui curvatura negativa.

A fim de determinar os níveis de Landau, vamos considerar a equação de Schrodinger covariante

$$\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} , \quad (5.3)$$

onde o operador Laplaciano é

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (g^{ij} \sqrt{g} \partial_j) \quad (5.4)$$

e $g = \det |g_{ij}|$ é o determinante da métrica g_{ij} . Portanto, a equação de Schrodinger escrita no espaço dotado por essa métrica, inclui as condições de contorno ditadas por esse defeito.

Consideramos um campo magnético constante na direção z , $\vec{B} = B\hat{z}$. Como mostrado em [29], o potencial vetor no espaço cônico (5.1) é $A_\phi = \frac{B\rho}{2\alpha}$ (gauge de Landau).

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\alpha \rho A_\phi) ,$$

sendo $A_\phi = \frac{B_0 \rho}{2\alpha}$ então $\vec{B} = B_0 \hat{z}$.

O Hamiltoniano para uma partícula carregada na presença de desclinações, submetido à um campo magnético na direção z , é dado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + \frac{i\hbar q B}{2\alpha^2 m^*} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{q^2 B_0^2}{8m^* \alpha^2} \quad (5.5)$$

Então, a equação de Schrodinger para um elétron nessa desclinação com um campo magnético na direção z é

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi + \frac{i\hbar e B}{2\alpha m^*} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m^* \alpha^2} \psi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = E \psi \quad (5.6)$$

Considerando a função de onda como $\Psi(\rho, \phi, z) = e^{il\phi} e^{ik_z z} \psi(\rho)$, com $l \in Z$ e $k_z \in \Re$, a equação (5.6) será

$$-\frac{\hbar^2}{2m_b} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{l^2}{\alpha^2 \rho^2} \right] \psi - \frac{l\hbar eB}{2\alpha m_b} \psi + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m_b \alpha^2} \psi = E_{n,l} \psi \quad (5.7)$$

onde $E_{n,l} = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}$. A solução da equação radial é dada por

$$R_{nl} = C_{nl} \exp\left(-\frac{|q| B \rho^2}{4\hbar \alpha}\right) \rho^{\frac{|l|}{\alpha}} \times F\left(-n, \frac{|l|}{\alpha} + 1, \frac{|q| B \rho^2}{2\hbar \alpha^2}\right),$$

onde $F\left(-n, \frac{|l|}{\alpha} + 1, \frac{|q| B \rho^2}{2\hbar \alpha^2}\right)$ é a função hipergeométrica, e C_{nl} é a constante de normalização.

Esta equação descreve o oscilador harmônico quântico bidimensional na presença de uma desclinação. Os autovalores de energia são

$$E_{n,l} = \frac{\hbar \omega_c}{2\alpha} \left(2n + \frac{|l|}{\alpha} - \frac{l}{\alpha} + 1 \right), \quad (5.8)$$

onde $\omega_c \equiv eB/m_b$ é a frequência cíclotron, $n = 0, 1, 2, \dots$ e $l = 0, 1, 2, \dots$. Podemos nos perguntar se as funções de onda acoplam-se à curvatura (5.2). De fato, se tratarmos férmions em um espaço curvo, tal acoplamento existe devido à natureza de spin meio dos elétrons [30]. Então, temos que acrescentar na equação de Schrodinger acima, o potencial de curto alcance $U_{curto} \sim R$ [31]. Isto é, de fato, a interação delta devido a 5.2. Um grande esforço para resolver problemas quânticos mostrando singularidades tem sido realizado ao longo dos anos [32]. Oscilador harmônico interagindo com singularidades é mostrado na referencia [27] e o efeito da interação delta é restringir o intervalo de valores permitidos para o momento angular efetivo, isto é,

$$-1 < \frac{l}{\alpha} < 1 \quad (5.9)$$

Esta relação ocorre a fim de satisfazer a condição de quadrado integrável das funções de onda, ou seja,

$$\int_0^\infty |\psi|^2 \rho d\rho < \infty.$$

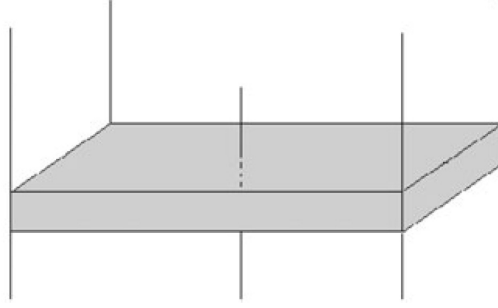


Figura 5.1: Interface em um sólido tridimensional com um desclinação. A linha pontilhada no centro da figura, representa o centro da desclinação.

Note que a degenerescência dos níveis de Landau é quebrada devido ao déficit/acrécimo angular α . De fato, se $\alpha = 1$,

$$E_{n,l} = \frac{\hbar\omega_c}{2} (2n + |l| - l + 1) \quad (5.10)$$

Se $l > 0$, temos $E_n = \hbar\omega_c (n + 1/2)$. Por outro lado, se $l = -|l|$, então temos a mesma expressão acima com n mudado por $n = -|l|$, com n e $|l|$ sendo inteiros não negativos. Devemos agora pensar como confinar, teoricamente, os elétrons em uma interface como mostra a Figura (5.1). Para um elétron em uma interface com desclinações, o confinamento é considerado tendo em conta o poço de potencial infinito na direção z ($0 \leq z \leq d$). Desta forma, temos $K_z = \frac{l\pi}{d}, l = 0, 1, 2, 3, \dots$ Note que este modo não contribui para a condutividade Hall, consideraremos apenas os modos longitudinais (5.8).

De acordo com a equação (3.27) dada no capítulo 3, a condutividade em uma interface com desclinação é

$$\sigma_H = -\frac{e}{h}n,$$

onde n é o número de níveis de Landau totalmente ocupados abaixo da energia de Fermi.

Note que isto tem uma forma semelhante ao caso de uma amostra plana ($\alpha = 1$). No entanto, o número de estados ocupados abaixo da energia de Fermi pode mudar uma vez quebrada a degenerescência dos níveis de Landau.

Primeiro consideramos uma amostra com um déficit angular α . Neste caso, a condição (5.9) mostra que temos apenas um possível valor para o momento angular, $l = 0$. Então, a contagem dos estados abaixo da energia de Fermi não muda. Aplicamos $n \equiv n_0 \equiv n + 1$, sendo $n_0 = 1, 2, 3$, veremos então como um déficit angular afeta a condutividade Hall. Primeiramente, uma desclinação com $0 < \alpha < 1$ afeta a largura do platô. Da equação (5.8) com $l = 0$, temos

$$\Delta B_\alpha = \alpha \Delta B, \quad (5.11)$$

onde

$$\Delta B = \frac{m^*}{\hbar e} \frac{E_F}{n_0^2 - \frac{1}{4}} \quad (5.12)$$

é o comprimento do platô Hall para uma superfície plana sem desclinação, ou seja, $\alpha = 1$. Sendo $\alpha < 1$ o platô diminui seu comprimento. A equação para a condutividade Hall é dada por

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_0} = - \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha E_F}{\hbar \omega_c} \right], \quad (5.13)$$

onde $[x]$ é a parte inteira de x e $\sigma_0 \equiv \frac{e^2}{h}$.

Quando temos uma desclinação devido a um acréscimo angular, o cenário é diferente. Para $1 < \alpha < 2$, os valores permitidos para o momento angular l são $-1, 0, 1$. Para cada nível de Landau n , temos

(5.14)

para $l = 0$ e $l = 1$, e

$$E_{n,-1} = \frac{\hbar\omega_c}{\alpha} \left(n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \right), \quad (5.15)$$

para $l = -1$.

Devido a cada nível de Landau ser dividido em dois outros níveis, a condutividade Hall pode ser escrita da seguinte forma: para a energia de Fermi coincidindo com o nível de Landau dado por $E_{n,0}$, temos,

$$\sigma_H = -\frac{e^2}{h} (2n_0 - 1). \quad (5.16)$$

Quando a energia de Fermi coincide para $E_{n,-1}$, temos

$$\sigma_H = -\frac{e^2}{h} (2n'_0). \quad (5.17)$$

Em ambos os casos, temos $n_0, n'_0 \equiv n + 1 = 1, 2, 3, \dots$, das equações (??) e (5.15), temos

$$n_0 = - \left[\frac{1}{4} + \frac{\alpha E_F}{2\hbar\omega_c} \right] \quad (5.18)$$

e

$$n'_0 = - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha E_F}{2\hbar\omega_c} \right], \quad (5.19)$$

respectivamente ($[x]$ é uma parte inteira de x). Agora temos duas expressões para a largura dos platôs. Das equações (??) e (5.15), encontramos a largura do platô, dada por

$$\Delta B = \frac{m^* E_F}{\hbar e} \frac{1}{(n_0 - 1/2 + 1/\alpha)(n_0 - 1/2)} \quad (5.20)$$

Onde mudamos de $E_{n,-1}$ para $E_{n,0}$ quando elevamos a intensidade do campo magnético e

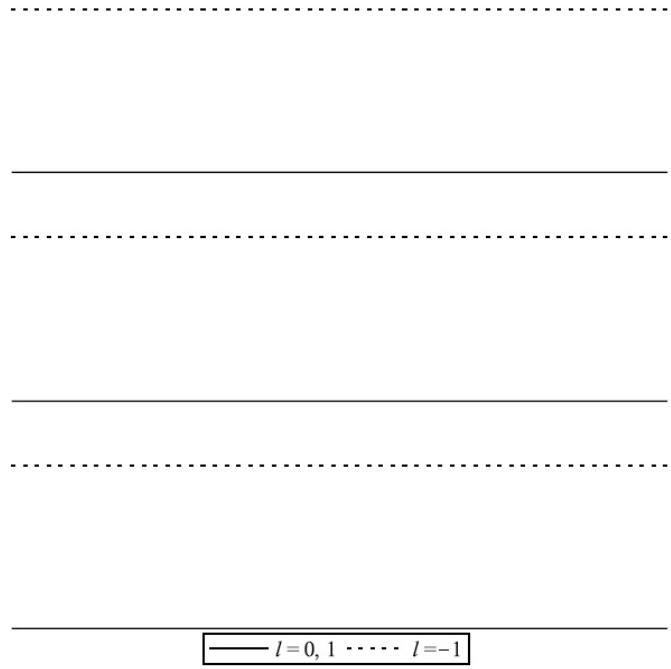


Figura 5.2: Distribuição dos níveis de Landau para $\alpha > 1$. As linhas sólidas são para $E_{n,0} = \frac{\hbar\omega_c}{\alpha} (n + \frac{1}{2})$ e as linhas pontilhadas são para $E_{n,-1} = \frac{\hbar\omega_c}{\alpha} (n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2})$.

$$\Delta B' = \frac{m^* E_F}{\hbar e} \frac{\alpha - 1}{(n_0 - 1/2 + 1/\alpha)(n_0 + 1/2)}, \quad (5.21)$$

quando temos uma transição de $E_{n+1,0}$ para $E_{n,-1}$ (veja a Figura 5.2). Note que se $\alpha = 1$ (amostra plana), $\Delta B' = 0$ e ΔB coincidem com (5.12).

Na Figura (5.2) plotamos a condutividade Hall para $\alpha = 0,7$ e $\alpha = 1,3$. Também plotamos σ_H no caso sem desclinação, que chamamos como caso plano, onde $\alpha = 1$. Podemos ver que um déficit angular ($\alpha < 1$) diminui a largura do platô Hall quântico e muda o degrau na condutividade Hall deslocando o degrau para campos magnéticos menos intensos. O acréscimo angular, $\alpha > 1$, produz dois tipos de platôs como vimos acima. Um dado por (5.20) tem largura superior em comparação com o caso plano, enquanto que a equação (5.21) mostra comprimentos menores também em comparação com o caso plano. Os degraus da condutividade Hall, neste caso, deslocam-se para campos magnéticos mais intensos.

Então, supomos agora que temos uma distribuição simétrica de desclinações,

uniformemente distribuídas em um cilindro de raio R com densidade de déficit angular dada por [17]

$$\begin{aligned} \varsigma &= q, \rho < R \\ &0, \rho > R \end{aligned} \tag{5.22}$$

A normalização de um déficit/acréscimo angular total, para esta distribuição, é dada por

$$\Theta = \frac{1}{2}qR^2 \tag{5.23}$$

A métrica que descreve o espaço fora da distribuição de desclinação tem a forma

$$dS^2 = dz^2 + \rho^{qR^2} [[d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2]] \tag{5.24}$$

Foi mostrado em [33] que a equação (5.24) pode ser escrita como

$$ds^2 = dz^2 + d\bar{\rho}^2 + \chi^2 \bar{\rho}^2 d\phi^2 \tag{5.25}$$

onde $\bar{\rho} \equiv \rho^\chi/\chi$, com $\chi = 1 + \frac{qR^2}{2}$. Deste modo, obtemos que o elemento de linha para a distribuição de desclinações, representado por χ , tem forma semelhante à de uma única desclinação efetiva, representada por α . Então, a distribuição contínua de desclinações é vista por elétrons/buracos como uma desclinação equivalente [33]. Então, o efeito Hall quântico será afetado de forma similar como a que mostrada na Figura 5.3, com α mudado por χ . Na Figura 5.4, plotamos a condutividade Hall para diferentes valores de χ , para $\chi > 1$. Vemos a mudança dos platôs para campos magnéticos elevados como χ cresce.

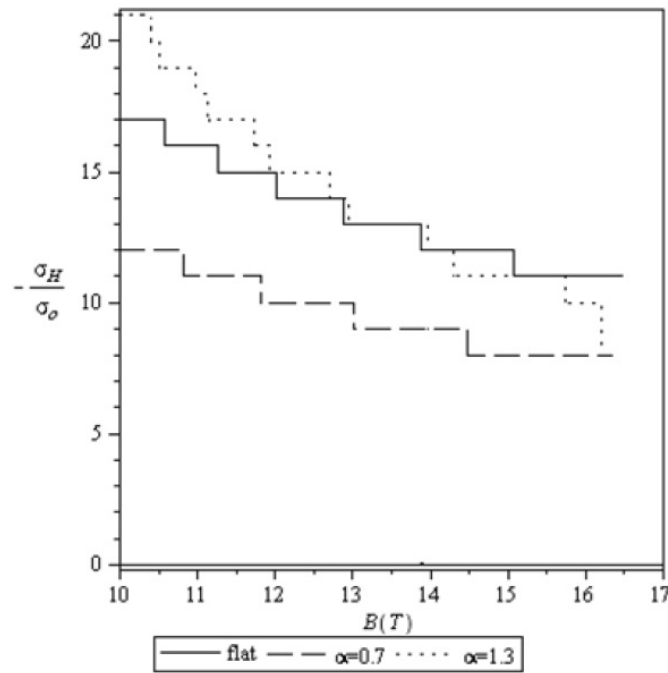


Figura 5.3: Condutividade Hall versus o campo magnético B . Para $\alpha < 1$, a largura do platô Hall quântico decresce e os degraus são deslocados para campos magnéticos menos intensos. Para $\alpha > 1$, existem dois tipos de platôs: um que tem largura maior em comparação com o caso plano e outro possui largura menor, também em comparação com o caso plano. A mudança dos degraus de condutividade Hall neste caso, está de acordo com a intensidade do campo magnético.

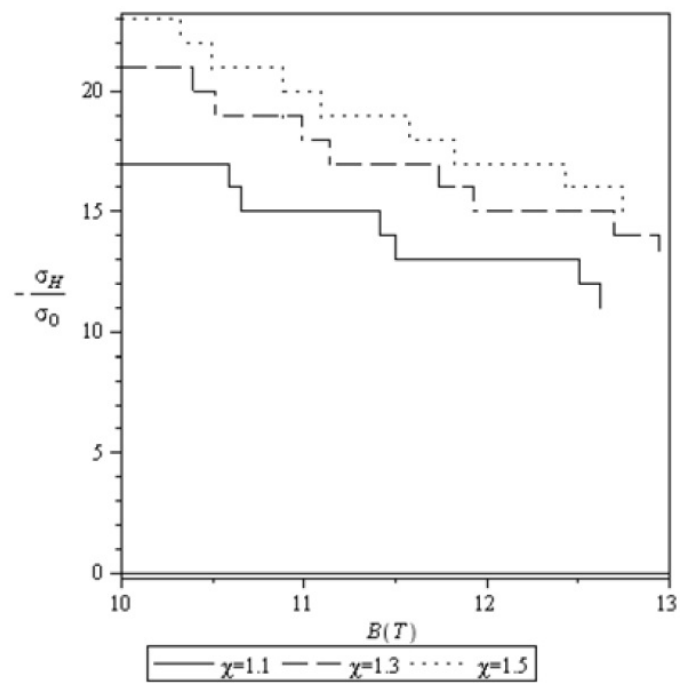


Figura 5.4: Condutividade Hall versus o campo magnético B para diferentes valores de densidade de defeitos, representada pelo parâmetro χ , com $\chi > 1$. O platô muda para campos magnéticos intensos quando χ cresce.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho, foram apresentados alguns aspectos sobre o Efeito Hall, bem como investigamos a influência da desclinação no Efeito Hall Quântico. Ao aplicar um campo magnético perpendicularmente à uma placa condutora bidimensional percorrida por corrente elétrica, verificamos um desvio das cargas elétricas para uma das bordas. Logo, a outra borda ficará eletricamente carregada com sinal oposto em relação à primeira. Esta diferença de potencial surgida transversalmente, chama-se tensão Hall. A resistência transversal à passagem de corrente, denomina-se resistência Hall e, classicamente, esta resistência varia linearmente com a intensidade do campo magnético. Com um campo magnético muito intenso aplicado em uma placa condutora e em temperaturas próximas ao zero absoluto, observamos uma quantização dessa resistência Hall. Tal quantização é definida pelos níveis de Landau. Sabendo que a topologia do material influencia nas suas propriedades físicas, neste trabalho tratamos de um tipo de defeito topológico chamado desclinação e o comportamento do Efeito Hall Quântico em um meio apresentando este defeito.

Deste modo, damos nossa contribuição aplicando o Efeito Hall Quântico Inteiro em uma interface com desclinações. Consideramos o caso de desclinações singulares induzindo curvatura positiva ($\alpha < 1$) e desclinações singulares induzindo curvatura negativa ($\alpha > 1$) em um campo magnético ortogonal. Isto tem sido mostrado que em um caso de déficit angular, $\alpha < 1$, a largura do platô Hall quântico diminui e há um deslocamento dos degraus na condutividade Hall para valores de campo magnético menos intensos. Para $\alpha > 1$, notamos a

presença de dois tipos de platôs devido à separação de cada nível de Landau em dois outros níveis, um para $l = 0, 1$ e outro para $l = -1$. Neste caso, a largura do platô Hall quântico oscila entre valores maiores e menores em relação ao caso plano e os degraus na condutividade Hall deslocam-se para campos magnéticos mais intensos. Analisamos também a influência de uma distribuição cilindricamente simétrica de desclinações na condutividade Hall. O efeito Hall quântico será afetado de forma similar à de uma única desclinação.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para a investigação de como defeitos topológicos afetam o efeito Hall quântico em monocamadas de grafeno, já que neste caso, os elétrons se movimentam como férmions sem massa podendo ser definidos a partir da equação de Dirac e não mais pela equação de Schrodinger. Almejamos também que tal estudo possa contribuir de alguma maneira para o avanço da tecnologia em isolantes topológicos bidimensionais.

Bibliografia

- [1] A.A. de Lima e C. Filgueiras, **Integer quantum Hall effect on an interface with disclinations**. *Eur. Phys. J. B* **85**, (2012) 401;
- [2] S. M. Rezende, *Materiais e Dispositivos Eletrônicos* (2ª edição, Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2004)
- [3] V.Ya. Prinz, V.A. Seleznev, A.K. Gutakovsky, A.V. Chehovskiy, V.V. Preobrazhenskii, M.A. Putyato e T.A. Gavrilova, **Free-standing and overgrown InGaAs/GaAs nanotubes, nanohelices and their arrays**. *Physica E* **6**, (2000) 828;
- [4] V.Ya. Prinz, D. Grtzmacher, A. Beyer, C. David, B. Ketterer e E. Deccard, **A new technique for fabricating three-dimensional micro- and nanostructure of various shapes**. Proceedings of Ninth International Symposium on Nanostructures: Physics and Technology, St. Petersburg, Russia, 18-22 June, 2001, p. 13
- [5] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morosov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos e A. A. Firsov, **Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene**. *Nature* **438**, (2005) 197;
- [6] Y. Zhang, Y. -W.Tan, H. L. Stormer e P. Kim, **Experimental observation of the quantum Hall effect and Berrys phase in graphene**. *Nature* **438**, (2005) 201
- [7] Y. N. Joglekar e A. Saxena, **Curvature-induced p-n junctions in bent or folded bilayer graphene sheets**. *Phys. Rev. B* **80**, (2009) 153405 ;
- [8] R. Dandoloff, A. Saxena e B. Jensen, **Geometry Induced Potential on a 2D-section of a Wormhole: Catenoid**. *Phy. Rev. A* **79**, (2009) 033404;

- [9] R. Dandoloff, A. Saxena e B. Jensen, **Geometry-induced potential on a two-dimensional section of a wormhole: Catenoid**. Phys. Rev. A **81**, (2010) 014102;
- [10] V. Atanasov e A. Saxena, **Tuning the electronic properties of corrugated graphene: Confinement, curvature, and band-gap opening**. Phys. Rev. B **81**, (2010) 205409;
- [11] M. J. Bueno, C. Furtado e A. M. de M. Carvalho, **Landau levels in graphene layers with topological defects**. The Eur. Phys. Jour. B **85**, (2012) 53
- [12] Mark O. Goerbig, *Quantum Hall Effect*, arxiv:0909.1998v2[cond-mat.mes-hall] 21 Oct 2009
- [13] W. Poirier e F. Schopfer, **Resistance metrology based on the quantum Hall effect**. Eur. Phys. J. Special Topics **172**, (2009) 207;
- [14] W. Poirier e F. Schopfer, Int. J. Mod. Phys. B **23**, (2009) 2779
- [15] D. V. Bulaev, V. A. Geyler e V. A. Margulis, **Quantum Hall effect on the Lobachevsky plane**. Physica B **337**, (2003) 180
- [16] J. Carvalho, C. Furtado e F. Moraes, **Dirac oscillator interacting with a topological defect**. Phys. Rev. A **84** (2011) 032109
- [17] M. O. Katanaev, **Geometric theory of defects**. Physics-Usppekhi **48**, (2005) 675
- [18] D. V. Bulaev e V. A. Margulis, **Magnetic moment of an electron gas on the surface of constant negative curvature**. Eur. Phys. J. B **36**, (2003) 183 ;
- [19] Z. Jiang, Y. Zhanga, Y.-W. Tan, H.L. Stormer e P. Kim, **Quantum Hall effect in graphene**. Solid State Communications **143** (2007) 14
- [20] B. A. Bernevig, T. A. Hughes e S. C. Zhang, **Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells**. Science 314,(2006) 1757
- [21] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (New Jersey, 1999)

- [22] J. Kinoshita, **Quantum Hall Effect**. *Nimt*, **9**, (2007) 39;
- [23] E. Ramsden, *Hall Effect Sensors - Theory and Application* (2nd Ed., Newnes)
- [24] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Harcourt, 1976)
- [25] A. J. S. Maurity et al. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 34, n°1, 1307 (2012) ;
- [26] G. A. Marques, V. B. Bezerra e F. Moraes, **Landau levels in the presence of topological defects**. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 5945
- [27] C. Filgueiras, E. O. Silva, W. Oliveira, e F. Moraes, *Ann. Phys.* 325, (2010) 2529.
- [28] E. Kröner e K. H. Anthony, **Dislocation and disclination in material structures: The Basic Topological Concepts**. *Annu. Rev. Mater. Sci.* **5**(1975) 72
- [29] C. Furtado , B. G. C. da Cunha, F. Moraes, E. R. B. de Mello e V.B. Bezerra, **Landau levels in the presence of disclinations**. *Phys. Lett. A* **195**, (1994) 90
- [30] B. Jensen e R. Dandoloff, **Remarks on quantum mechanics on surfaces**. *Phys. Lett. A* **375**, (2011) 448
- [31] B. S. Kay e U. M. Studer, **Boundary Conditions for Quantum Mechanics on Cones and Fields Around Cosmic Strings**. *Comm. Math. Phys* **139**, (1991) 103.
- [32] M. G. Alford, J. M. Russell e F. Wilczek, **Enhanced Baryon Number Violation Due to Cosmic Strings**. *Nucl. Phys. B* **328**, (1989) 140;
- [33] C. Furtado, C.A. de Lima Ribeiro e S. Azevedo, *Phys. Lett. A* **296**, (2002) 171.
- [34] K. v.Klitzing, G. Dorda e M. Pepper, **New method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance**. *Phys. Rev. Lett.* **45**, (1980) 494
- [35] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, 8th Ed, 2005)

- [36] A. Lorke , S. Bhm e W. Wegscheider, **Curved two-dimensional electron gases.** Superlattices and Microstructures **33**, (2003) 347;
- [37] L. I. Magarill , A. V. Chaplik e M. V. Entin, **Spectrum and kinetics of electrons in curved nanostructures.** Physics-Uspekhi **48**, (2005) 953 ;
- [38] A. B. Vorobe'v , K. J. Friedland , H. Kostial , R. Hey, U. Jahn, E. Wiebicke , J. S. Yukecheva e V. Y. Prinz, **Giant asymmetry of the longitudinal magnetoresistance in high-mobility two-dimensional electron gas on a cylindrical surface** *Phys. Rev. E* **75**, (2007) 205309 ;
- [39] A. Jellal, **Anomalous quantum Hall effect on sphere.** Nuclear Physics B **804**, [PM] (2008) 361;
- [40] K. J. Friedland, A. Siddiki, R. Hey, H. Kostial, A. Riedel e D. K. Maude, **Quantum Hall effect in a high-mobility two-dimensional electron gas on the surface of a cylinder.** Phys. Rev. B **79**, (2009) 125320;
- [41] C. Filgueiras e B. F. de Oliveira, **Electron on a cylinder with topological defects in a homogeneous magnetic field.** Ann. of Phys.(Berlin) **523**, (2011) 898
- [42] S. Mendach, O. Schumacher, Ch. Heyn, S. Schn. ull, H. Welsch e W. Hansen, **Preparation of curved two-dimensional electron systems in InGaAs/GaAs-microtubes.** Physica E **23**, (2004) 274.
- [43] D. C. Tsui, H. Strmer e A. C. Gossard, **Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit.** Phys. Rev. Lett. **48**, (1983) 1559
- [44] P. S. Gerbert, **Fermions in an Aharonov-Bohm field and cosmic strings.** Phys. Rev. D **40**, (1989) 1346;
- [45] P. S. Gerbert e R. Jackiw, Commun. Math. Phys **124**, (1989) 229;
- [46] C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett **64**, (1990) 503;

- [47] C. R. Hagen, *Phys. Rev. D* **42**, (1993) 5935;
- [48] C. R. Hagen e D. K. Park 1996 *Ann. Phys. (NY)* **251** 45;
- [49] K. Kowalski , K. Podlaski e J. Rembieliński, *Phys. Rev. A* **66**, (2002) 032118;
- [50] C. Filgueiras e F. Moraes, *Phys. Lett. A* **361**, (2007) 13;
- [51] C. Filgueiras e F. Moraes, *Ann. of Phys. (N.Y.)* **323**, (2008) 3150.
- [52] R. C. T da Costa, *Phys. Rev. A* **23**, (1981) 1982;
- [53] N. Ogawa, K. Fujii e A. Kobushukin, *Prog. Theor. Phys.* **83**, (1990) 894;
- [54] N. Ogawa, K. Fujii, N. Chepliko e A. Kobushukin, *Prog. Theor. Phys.* **85**, (1991) 1189;
- [55] M. Ikegami e Y. Nagaoka, *Prog. Theor. Phys.* **106**, (1991) 235;
- [56] G. Ferrari e G. Cuoghi, *Phys. Rev. Lett.* **100**, (2008) 230403.
- [57] P. Streda, *J. Phys. C* **15**, (1982) L717.