



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**POTENCIAIS QUÂNTICOS INDUZIDOS POR GEOMETRIA**

**Cícero Alécio Rodrigues de Lima**

CAMPINA GRANDE - PB

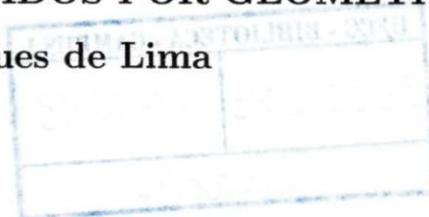
JULHO - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**POTENCIAS QUÂNTICOS INDUZIDOS POR GEOMETRIA**

**Cícero Alécio Rodrigues de Lima**



Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Cleverson Filgueiras, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE - PB

JULHO - 2013



L732p Lima, Cícero Alécio Rodrigues de.  
Potenciais quânticos induzidos por geometria / Cícero Alécio Rodrigues de Lima. - Campina Grande, 2013.  
69 f.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

1. Geometria. 2. Derivada Covariante. 3. Transporte Paralelo. 4. Superfície - Curva - Confinamento. 5. Dissertação - Física. I. Filgueiras, Cleverson. II. Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande (PB). III. Título

CDU 514(043)

*Dedico este trabalho aos meus pais,  
João Inácio (in memoriam) e Rita, a  
minha esposa Veronice, aos meus filhos  
Alecianny e Allan e aos meus  
irmãos que mesmo  
enfrentando muitas dificuldades,  
me ajudaram a priorizar  
a educação desde os primeiros passos.*

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Cleverson Figueiras, pela orientação, sugestão, estímulo, paciência e competência com que conduziu este trabalho.

Aos Profs. Adriano Albuquerque, Lincoln Rodrigues Sampaio de Araújo, Danieverton Moretti, Francisco Brito e Rômulo Rodrigues pelo conhecimento compartilhado durante o mestrado.

Aos professores constituintes da Banca Examinadora.

Aos meus pais João Inácio (in memoriam) e Rita e aos meus irmãos Antonio, Afonso, Rosa, Eliane, Verônica, Tânia, Ivanildo e Raimundo que enfrentaram comigo todos os obstáculos nos meus primeiros anos de estudos.

À minha esposa Veronice e aos meus filhos Alecianny e Allan por todas as compreensões.

Aos demais familiares.

Aos colegas Thiago Brito, Júlio César, Paulo Sérgio, Luis Eduardo, Marcílio Veras, Mikael Souto, Pablo Rafael, Pablo Sampaio, Raoni Moreira e Romeu Castro por tudo que passamos juntos, pois cada um sabe o tamanho de sua contribuição.

Aos demais colegas de pós-graduação, graduação, funcionários e demais professores da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.

*A sabedoria não é apenas um Dom é o  
aperfeiçoamento de suas habilidades, pois  
todos a possuem basta desenvolvê-la.*

*Cícero Alecio*

## RESUMO

A geometria tem sido extensamente estudada nos últimos anos, devido principalmente as suas diversas possibilidades de aplicações. O seu papel em gravitação é bem conhecido dos Físicos temos como exemplo uma partícula movendo-se livremente somente sob influência do campo gravitacional. Bastante destaque tem sido dado aos estudos dos fenômenos quânticos induzidos por geometria como, por exemplo, calcular os potenciais quânticos. Seguimos este caminho nessa dissertação. Do ponto de vista fundamental, apresentamos alguns conceitos básicos de geometria riemanniana, tais como derivada covariante, transporte paralelo e tensor de curvatura. A partir daí, mostramos como escrever a equação de Schrödinger em uma superfície curva a partir da equação de Dirac no espaço curvo  $2+1$ . Os nossos resultados são comparados com aqueles vindos da equação de Schrödinger obtida a partir de um formalismo que confina as partículas quânticas em uma interface curva. Investigamos partículas quânticas em algumas superfícies, como as superfícies paraboloides hiperbólicas, obtendo informações a respeito da região de maior probabilidade de localização dessas partículas, ou seja, região específicas da superfície onde pode ocorrer o confinamento destas de forma qualitativa.

**Palavra-chave:** Geometria, Derivada Covariante, transporte Paralelo, Superfície Curva, Confinamento.

## ABSTRACT

The geometry has been extensively studied in recent years, mainly due to its many potential applications. Its role in gravity is well known by physicists as an example have a particle freely moving only under the influence of the gravitational field. Enough emphasis has been given to studies of quantum phenomena induced by geometry, for example, calculate the quantum potential. We follow this path in this dissertation. From the fundamental point of view, we introduce some basic concepts of Riemannian geometry, such as covariant derivative, parallel transport and curvature tensor. Thereafter, we show how to write the Schrödinger equation on a curved surface from the Dirac equation in curved space  $2 + 1$ . Our results are compared to those from the Schrödinger equation obtained from a formalism that abuts quantum particles in an interface curve. Investigamos quantum particles on some surfaces, such as surfaces hyperbolic paraboloids, obtaining information about the region of greatest probability for the location of these particles, or specific surface area may occur where the containment of these qualitatively.

Keyword: Geometry, Covariant Derivative, transportation Parallel, Curved Surface, Confinement.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>5</b>
2.1 Geometria Riemanniana . . . . .	5
2.1.1 Métrica . . . . .	5
2.1.2 Transporte Paralelo . . . . .	9
2.1.3 Derivada Covariante . . . . .	11
2.1.4 Tensor de Riemann, Ricci e escalar de curvatura . . . . .	12
2.1.5 Tensor de Ricci . . . . .	16
2.2 Mecânica Quântica em Superfícies Curvas . . . . .	16
2.2.1 Equação de Dirac . . . . .	16
2.2.2 Redução Dimensional . . . . .	21
2.2.3 Limite de Baixa Energia . . . . .	23
2.3 Algumas Propriedades Geométricas de Superfícies na Representação de Monge . . . . .	24
<b>3 Potenciais Quânticos Induzidos por Curvatura em Algumas Superfícies</b>	<b>26</b>
3.1 Superfície Paraboloide Hiperbólico $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	26
3.2 Superfície $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ . . . . .	30
3.2.1 Superfície $h = c(\sin(x)\sin(y))$ . . . . .	34
3.3 Superfície Paraboloide Circular $h = c(x^2 + y^2)$ . . . . .	38
3.4 Geometria de uma casca cilíndrica com deslocamento do parafuso . . . . .	43
3.4.1 Equivalência das Geometrias . . . . .	43
<b>4 Potencial Quântico Induzido em superfícies Paralelas</b>	<b>46</b>
4.1 O modelo de superfície com várias camadas paralelas a uma determinada distâncias uma da outra . . . . .	46
<b>5 Conclusões</b>	<b>60</b>
<b>A Equação de Dirac</b>	<b>62</b>
<b>B Escala de Curvatura e Tensor de Ricci</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>66</b>

# Lista de Figuras

2.1	Para obter as componentes da métrica em coordenadas polares, basta variar $\phi$ com $\rho$ constante [figura b], perceber que $ds = \rho d\phi$ , e variar $\rho$ com $\phi$ constante [figura c], todavia, que neste caso $ds = d\rho$ . . . . .	8
2.2	Analisando o transporte paralelo em coordenadas cartesianas. . . . .	10
2.3	Analisando o transporte paralelo em coordenadas polares. . . . .	10
2.4	Fazendo um transporte paralelo de $(\phi_q, \rho_q)$ para $(\phi_p, \rho_p)$ , vemos que as componentes de $A_q(q)$ transportadas para $p$ na base $\partial_\rho, \partial_\phi$ mudam, pois $A_q^\rho = \sqrt{g(A(q), A(q))} \cos \sigma$ e $A_q^\phi = \sqrt{g(A(q), A(q))} \frac{\sin \sigma}{\rho_q}$ ; enquanto que $\bar{A}_q^\rho(p) = \sqrt{g(A(q), A(q))} \cos \alpha$ e $\bar{A}_q^\phi = \sqrt{g(A(q), A(q))} \frac{\sin \alpha}{\rho_p}$ . Temos também o determinante que é $g(A(\theta), A(\phi)) = \det g_{\mu\nu}$ . Da figura, está claro que $\alpha = \sigma$ . . . . .	10
2.5	Na abordagem de Gauss, a superfície é caracterizada pelas curvaturas $k_{maxima}$ e $k_{minima}$ . Nesta abordagem, usa-se o produto $k_{maxima} k_{minima}$ e a soma $\frac{k_{maxima} + k_{minima}}{2}$ . . . . .	13
3.1	Parabolóide hiperbólico $h = c(x^2 - y^2)$ superfície a ser analisada através da curvatura gaussiana, curvatura média e o potencial geométrico. . . . .	26
3.2	Curvatura gaussiana em uma superfície parabolóide de função $h = c(x^2 - y^2)$ . Este é o potencial geométrico $V_D$ . . . . .	28
3.3	Curvatura média em uma superfície parabolóide de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	28
3.4	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	28
3.5	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	29
3.6	Projeção mostrando a curvatura média para a superfície parabolóide hiperbólica de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	29
3.7	Projeção mostrando o potencial geométrico para a superfície parabolóide hiperbólica de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	29
3.8	Superfície de função $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ a ser analisada através das curvaturas gaussiana e média e o potencial geométrico. . . . .	30
3.9	curvatura gaussiana em uma superfície de função $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ . . . . .	32
3.10	Curvatura média em uma superfície de função $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ . . . . .	32
3.11	Potencial quântico geométrico em uma superfície de função $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ . . . . .	32
3.12	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície de função $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ . . . . .	33

3.13	Projeção mostrando a curvatura média para a superfície de função $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ . . . . .	33
3.14	Projeção mostrando o potencial geométrico para a superfície de função $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ . . . . .	33
3.15	Superfície de função $h = c(\sin(x)\sin(y))$ . . . . .	35
3.16	Curvatura gaussiana em uma superfície de função $h = c(\sin(x)\sin(y))$ . . . . .	36
3.17	Curvatura média em uma superfície de função $h = c(\sin(x)\sin(y))$ . . . . .	36
3.18	Potencial quântico geométrico em uma superfície de função $h = c(\sin(x)\sin(y))$ . . . . .	36
3.19	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície de função $h = c(\sin(x)\sin(y))$ . . . . .	37
3.20	Projeção mostrando a curvatura média para a superfície de função $h = c(\sin(x)\sin(y))$ . . . . .	37
3.21	Projeção mostrando o potencial geométrico para a superfície de função $h = c(\sin(x)\sin(y))$ . . . . .	37
3.22	Superfície parabolóide circular de função $h = c(x^2 + y^2)$ . . . . .	39
3.23	curvatura gaussiana em uma superfície parabolóide circular de função $h = c(x^2 + y^2)$ . . . . .	40
3.24	Curvatura média em uma superfície parabolóide circular de função $h = c(x^2 + y^2)$ . . . . .	40
3.25	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide circular de função $h = c(x^2 + y^2)$ . . . . .	40
3.26	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide circular de função $h = c(x^2 + y^2)$ . . . . .	41
3.27	Projeção mostrando a curvatura média para a superfície parabolóide circular de função $h = c(x^2 + y^2)$ . . . . .	41
3.28	Projeção mostrando do potencial geométrico para a superfície parabolóide de função $h = c(x^2 + y^2)$ . . . . .	41
3.29	Corte e cola, processo para uma divisão de uma casca cilíndrica. . . . .	44
3.30	Cilindro. . . . .	45
4.1	Superfície parabolóide hiperbólica paralelas de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	46
4.2	Esboço para a base de calculo das superfícies parabolóides hiperbólicas paralelas de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	47
4.3	Curvatura gaussiana em uma superfície parabolóide hiperbólica com várias camadas de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	48
4.4	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica com várias camadas de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	48
4.5	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica com várias camadas de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	48
4.6	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica de função $h = c(x^2 - y^2)$ ; . . . . .	49
4.7	Projeção mostrando a curvatura média para a superfície parabolóide hiperbólica de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	49
4.8	Projeção mostrando o potencial geométrico para a superfície parabolóide hiperbólica de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	49
4.9	Curvatura gaussiana em superfícies parabolóides hiperbólicas paralelas a uma distância de $a = 0,53333\dots$ para função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	52

4.10	Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de $a = 1$ para função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	52
4.11	Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de $a = 1,5$ para função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	52
4.12	Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de $a = 2$ para função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	52
4.13	Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de $a = 0,25$ para função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	53
4.14	Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de $a = 0,16$ para função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	53
4.15	Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de $a = 0,12$ para função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	53
4.16	Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de $a = 0,1$ para função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	53
4.17	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,5333\dots$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	54
4.18	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 1$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	54
4.19	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 1,5$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	54
4.20	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 2$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	54
4.21	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,25$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	55
4.22	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,16$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	55
4.23	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,12$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	55
4.24	Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,1$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	55
4.25	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,5333\dots$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	56
4.26	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 1$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	56
4.27	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 1,5$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	56
4.28	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 2$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	56
4.29	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,25$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	57
4.30	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,16$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	57

4.31	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,12$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	57
4.32	Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de $a = 0,1$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	57
4.33	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância $a = 0,5333\dots$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	58
4.34	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância $a = 1$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	58
4.35	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância $a = 1,5$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	58
4.36	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância $a = 2$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	58
4.37	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância $a = 0,25$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	59
4.38	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância $a = 0,16$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	59
4.39	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância $a = 0,12$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	59
4.40	Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância $a = 0,1$ de função $h = c(x^2 - y^2)$ . . . . .	59

# Capítulo 1

## Introdução

A experiência e investigação dos fenômenos da natureza e seus elementos tem repercutido no grande avanço da sociedade e para desenvolvimento de novas tecnologias. Através destes avanços a humanidade tem melhorado suas condições de vida manipulando o meio em seu benefício. A ciência, de um modo geral, impulsiona os projetos a novas descobertas e aperfeiçoamento de novas técnicas para a obtenção de novos resultados que possibilitem descrever a natureza nos seus detalhes mais sutis.

O estudo da natureza atômica através da mecânica quântica se enquadra no grande avanço ocorrido no século passado. Com o surgimento do laser e o desenvolvimento das teorias da interação da radiação com a matéria [42], surgiu a possibilidade de controlar o movimento do átomo, o que gerou um grande avanço e uma intensificação de estudo detalhados de estrutura atômica e molecular.

Na tentativa de desenvolver técnicas de aprisionamento e resfriamento de amostras gasosas alcalinas na década de 80 Raab e colaboradores consegue a primeira realização experimental de uma armadilha magneto-óptica, usualmente chamada de MOT (abreviação de "Magneto Optical Trap") [43].

Em armadilha magneto-óptica os átomos são confinados por 3 pares de feixes contrapropagantes, sintonizados próximo a ressonância do átomo, e um gradiente de campo magnético na configuração anti-Helmholtz. Com esta técnica é possível o aprisionamento e o resfriamento de átomos a regimes de temperatura da ordem de 100uK.

Existem também, outros tipos de armadilhas, armadilhas magnéticas e armadilhas de dipolo ópticas [44]. Em armadilhas magnéticas, é aplicado um campo magnético  $B$ , átomos com um dipolo magnético permanente ( $\mu$ ) serão confinados na região de menor potencial, isto é, onde o campo magnético for mínimo. Com esta técnica de aprisionamento obtiveram-se em 1995 os primeiros condensados de Bose-Einstein [45,46,47,48].

Por outro lado, em armadilhas de dipolo ópticas ("Optical Dipole Traps"), os átomos são confinados pela força de dipolo que o campo magnético induz na amostra. Uma armadilha óptica é o resultado de um único feixe gaussiano e focalizado. Se o feixe é ajustado abaixo da frequência de ressonância atômica, os átomos são atraídos para a região de maior intensidade. As armadilhas de dipolo classificam-se em duas FORT ("Far off resonance traps") e QUEST ("Quasi-electrostatic traps"), nomes cunhados devido as suas características básicas, como potência e frequência do laser.

O desenvolvimento destas técnicas de aprisionamento e resfriamento também conhecidas como laser cooling propiciou o avanço considerável no estudo das interações atômicas nos regimes frio e ultra frio, onde se encontra um fascinante objeto de estudo, tanto experimental quanto teórico. Dentro deste cenário, podemos ressaltar o estudo de colisões atômicas e de estados moleculares formados durante a colisão de átomos frios aprisionados que teve seu início nos anos 90 e estende-se até os dias atuais. Mas durante muito séculos a física esteve limitada ao uso da geometria euclidiana para poder descrever matematicamente suas leis. Estas leis, baseadas em experimentos e intuição, eram capazes de descrever grande parte dos fenômenos do mundo que nos cerca. Todavia, a medida que os experimentos foram se tornando mais precisos e indo bem mais além da nossa intuição, surgiu a necessidade de generalizarmos a geometria euclidiana. Como é bem conhecido dos físicos, as duas teorias mais bem sucedidas da física são formuladas em geometrias não-euclidianas. A mecânica quântica relativística é formulada na geometria de Minkowski, geometria pseudo-riemanniana e plana, enquanto que a relatividade geral é formulada em uma geometria pseudo-riemanniana

com curvatura. Essas duas teorias estão de acordo com todos os experimentos que as teorias anteriores explicavam, além de está de acordo com conjunto significativos de outros experimentos que não tinham explicação. Entretanto, como essas duas teorias têm um regime de validade limitado, elas não explicam tudo. Ainda não há uma teoria quântica da gravitação, além de haver várias questões em aberto, como energia escura, matéria escura etc. Não sabemos, por exemplo, como fica o spin da gravitação. Muitas dessas questões levam os físicos a buscar uma generalização da geometria que é usada na mecânica quântica e na relatividade. Daí surge necessidades como escrever a equação de Dirac, que é o alicerce da mecânica quântica relativística, em um espaço curvo. Escrever as equações de campo da gravitação em termo do spin é outra necessidade. Neste último caso, uma generalização da geometria riemanniana que permite uma inserção natural do spin na gravitação é a geometria de Riemann-Cartan. Como exemplo mais simples dessa inserção temos a teoria de Einstein-Cartan. Outro exemplo de generalização da geometria que despertou muito interesse dos físicos, foi a tentativa de Weyl de unificar gravitação e eletromagnetismo em uma teoria puramente geométrica. Ele criou a geometria hoje conhecida como geometria de Weyl. Se continuarmos mencionando exemplos, chegaremos a geometrias de métricas assimétricas, geometria de Finsler, geometrias com dimensões extras etc. São tantas as oportunidades que não temos a pretensão de abordar todas nesta dissertação. Buscaremos nesta dissertação o papel que a geometria pode exercer na realização do confinamento de partículas quânticas em superfícies curvas e analisaremos os potencial quântico induzidos pela geometria [12,35].

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, introduzimos os conceitos básicos sobre a teoria riemanniana e a mecânica quântica em superfície curva. No Capítulo 3, apresentamos alguns modelos de superfícies acrescentando algumas informações à mesmas. No Capítulo 4, inserimos várias superfícies idênticas umas sobre a outra a uma mesma distância . Construimos gráficos para cada superfície para

analisarmos a existência de partículas aprisionadas, o tipo e sua densidade. Por fim, no Capítulo 5 apresentamos os nossos comentários finais.

## Capítulo 2

# Fundamentação Teórica

### 2.1 Geometria Riemanniana

Neste capítulo apresentamos a geometria pseudo-riemanniana e alguns conceitos de geometria que são fundamentais para a compreensão desta dissertação. Por questão de simplicidade, cometeremos o mesmo abuso de linguagem que é comum na literatura, usaremos a expressão riemanniana para nos referirmos tanto a geometria riemanniana propriamente dita como para a pseudo-riemanniana. Estas duas geometrias diferem uma da outra pela definição de um objeto matemático chamado *métrica*. Todavia, para o que faremos nesta dissertação, este abuso não trará nenhum problema. Durante o capítulo serão utilizados termos como variedades, vetores, 1-formas etc. Também utilizaremos um formalismo independente de base.

#### 2.1.1 Métrica

O objeto que chamaremos de métrica está relacionado com a generalização do nosso conceito intuitivo de distância. A distância como um conceito intuitivo é algo invariante para nós. Por exemplo, se alguém diz que uma barra de ferro mede um metro, ninguém questionará que qualquer pessoa capaz de medir o comprimento desta barra

nas mesmas condições térmicas medirá exatamente um metro, salvo margens de erros introduzidas pelas limitações técnicas (aparato utilizado para fazer a medida, para garantir a estabilidade térmica do experimento etc). Em outras palavras, em nossa visão intuitiva, o tamanho da barra não dependerá de fatores cinéticos, como por exemplo a velocidade do indivíduo que faz a medida com relação a barra. Entretanto, a realidade física mostrou-se muito mais complicada, pois de fato o comprimento da barra dependerá de fatores cinéticos. Como nossa mente, talvez por razões fisiológicas ou puramente filosóficas, está sempre a procura de "verdades absolutas", seja na religião, no senso comum ou na ciência, é natural pensar que estejamos sempre a procura de "objetos" invariantes frente a mudanças de referencias, observadores etc. Assim, nada mais natural do que procurarmos por "objetos" matemáticos que sejam invariantes frente a mudança de observadores. Como uma consequência dessa busca, o matemático Hermann Minkowski descobriu que o intervalo entre dois eventos era um invariante por mudanças de referencial. Segue-se assim da invariança da velocidade da luz que se o intervalo de dois eventos é nulo num sistema de referências, ele será também nulo em todo outro sistema. Se dois eventos são infinitamente vizinhos, seu intervalo  $ds$  se escreve:  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ . Daí surgiu o conceito de espaço-tempo. Entretanto, a distância entre pontos desse espaço não é um comprimento no sentido usual, mas sim uma generalização da nossa concepção intuitiva de comprimento. Na linguagem matemática, faz-se a generalização de vários conceitos que adquirimos inicialmente com nossa intuição, o conceito de superfície, curvatura e distância são só alguns exemplos desses. Para entendermos um pouco esse processo de generalização, vejamos o caso da barra citado anteriormente. Se a barra é descrita em referencial qualquer com o sistema de coordenadas cartesianas, o elemento de comprimento da barra pode ser descrito infinitesimalmente pelo teorema de Pitágoras

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.1.1)$$

Assim, para obter o comprimento da barra, basta integrar  $ds$  de uma extremidade da barra a outra. Todavia, a expressão acima ainda não está numa forma satisfatória, pois, estamos limitados a transcrever a barra por coordenadas cartesianas. Disto surge a necessidade de generalizar a expressão de  $ds$  para qualquer sistema de coordenadas. É fácil ver que, como diante da transformação de coordenada  $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$ ,  $dx^\lambda$  se transforma na forma  $dx^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} d\bar{x}^\mu$ ,  $ds$  passa a ter a seguinte forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^\nu} + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^\nu} + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^\nu} \right) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu, \quad (2.1.3)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é conhecido como métrica. A expressão acima nos dá  $ds$  expresso em um sistema de coordenadas mais geral pois, a única hipótese feita sobre  $\bar{x}^\mu$  foi a de ser possível escrever  $x, y, z$  em termos de  $\bar{x}^\alpha$ . Esta hipótese, a priori, não impõe nenhuma restrição para a nossa noção intuitiva de distância, uma vez que, nela, sempre é possível encontrar uma transformação que leve (2.1.1) em (2.1.3) e vice versa. Este fato é uma consequência da aparência plana do espaço, já que isto permite o uso do teorema de Pitágoras sempre que conveniente. O problema surgiu a partir do momento que descobrimos que  $ds$  definido como (2.1.1) não é um *invariante* (experimentos provam que a distância entre dois pontos do espaço físico não é um invariante) e que o espaço não é plano. Cada um destes dois fatos exigem por si só, uma versão generalizada do conceito de distância. A primeira ideia que vem em mente quando falamos em generalizar o conceito de distância é abstrair este conceito, ou seja, esquecer, mesmo que temporariamente, o fato deste conceito estar interligado com algo real, e simplesmente desenvolver um formalismo matemático que permita a associação deste novo conceito de forma conveniente a qualquer ideia na qual o uso do termo distância pareça razoável. A palavra razoável, aqui, significa não ferir muito nossa noção intuitiva de distância física. De fato, a visão mais geral sobre métrica que se tem hoje pode perfeitamente ir contra nossa intuição. Todavia estas métricas estão fadadas a serem apenas objetos

matemáticos sem qualquer conexão com algo real, exceto casos onde as características "exóticas" estejam associadas a propriedades físicas de difícil detecção. Como exemplo de tais métricas exóticas, temos as assimétricas [1]. De qualquer forma, faz-se necessário definirmos a métrica de forma mais geral. Antes, porém, permita-nos fornecer uma visão mais clara do significado de  $g_{\mu\nu}$ . Considere as coordenadas polares como indicado na figura 2.1a. Existem duas maneiras de obtermos os valores de  $g_{\mu\nu}$  no sistema de coordenadas polares  $x = \rho \cos\phi$  e  $y = \rho \sin\phi$ . Uma delas é usar (2.1.2), já a outra é analisar como os versores  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$  associados com as coordenadas  $\rho$ ,  $\theta$  variam infinitesimalmente. Como este último método nos fornece uma visão do significado geométrico, faremos uso  $g_{\mu\nu}$  para obter  $ds$ . Para medir o comprimento de uma curva neste sistema de coordenadas, temos que saber como o comprimento varia segundo as variações de  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$ . Como estes versores são ortogonais, já sabemos, também, que podemos calcular a variação do comprimento devido a variável  $\phi$  mantendo  $\rho$  constante e vice versa, como indicado nas figuras 2.1b e 2.1c. Da figura 2.1b, vemos que a variação infinitesimal no comprimento quando variamos  $\phi$  é  $\rho d\phi$ . Fazendo o mesmo para  $\rho$ , chegamos a  $d\rho$ . Do teorema de pitágoras, teremos que a variação infinitesimal no comprimento será  $ds^2 = d\rho^2 + (\rho d\phi)^2$ . Comparando esta última

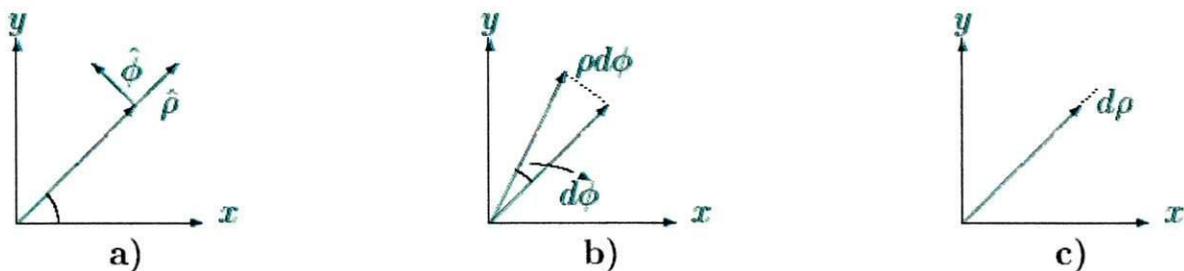


Figura 2.1: Para obter as componentes da métrica em coordenadas polares, basta variar  $\phi$  com  $\rho$  constante [figura b], perceber que  $ds = \rho d\phi$ , e variar  $\rho$  com  $\phi$  constante [figura c], todavia, que neste caso  $ds = d\rho$ .

expressão com  $ds^2 = g_{\rho\rho}d\rho^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2$ , vemos que  $g_{\rho\rho} = 1$  e  $g_{\phi\phi} = \rho^2$ . Este procedimento é mais simples do que usar (2.1.2), pelo menos os versores associa-

dos com as variáveis adotadas são ortogonais. Desse exemplo, vemos que a métrica fornece a informação de como os comprimentos variam em cada direção associada com variáveis na qual a métrica está escrita. Se fizéssemos o mesmo para coordenadas esféricas, obteríamos a variação do comprimento 1 para  $dr$ ,  $r$  para  $d\theta$  e  $r\sin\theta$  para  $d\phi$ , sendo  $\phi$  o ângulo azimutal. A métrica para coordenadas esférica fica,  $d\sigma^2 = e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$ .

### 2.1.2 Transporte Paralelo

Um fato muito importante durante generalização do espaço euclidiano para o riemanniano é não admitir a priori que dois vetores definidos em pontos diferentes possam ser comparados. Uma ideia fundamental durante o processo de generalização de uma geometria é o de definir todas as propriedades localmente. Para resolver esse problema, criou-se o conceito de transporte paralelo. Imagine, por exemplo, que nós temos um campo vetorial  $\mathbf{A}$  definido no plano  $(x,y)$ , dois pontos  $p$  e  $q$ , onde  $p = q + \epsilon$ , e queremos comparar dois vetores deste campo, como indicado na figura 2.2. Para comparar  $A_p^\mu$  com  $A_q^\mu$ , transportamos  $A_q^\mu$  até o ponto  $p$ . Como num espaço plano e em coordenadas cartesianas impor que os vetores não mudem implica que as componentes não mudem, então,  $A_q^\mu$  transportados paralelamente até  $p$ , que denotaremos por  $\bar{A}_q^\mu(q + \epsilon)$ , é o próprio  $A_p^\mu$ , ou seja,  $\bar{A}_q^\mu(q + \epsilon) = A_p^\mu$ . Disto, podemos ver que a definição da derivada

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\epsilon^\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{A^\mu(q + \epsilon^\alpha) - \bar{A}_q^\mu(q + \epsilon^\alpha)}{\epsilon^\nu} \right) \quad (2.1.4)$$

é equivalente a

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\epsilon^\alpha \rightarrow 0} \frac{A^\mu(q + \epsilon^\alpha) - (\bar{A}^\mu(q))}{\epsilon^\nu} \quad (2.1.5)$$

onde, na notação que usamos,  $A_q^\mu = A^\mu(q) = A^\mu(q)$ ; todavia  $\bar{A}_q^\mu(q + \delta)$  seriam as componentes do campo vetorial  $A$  avaliadas no ponto  $d$  e depois transportadas paralelamente até  $q + \delta$ . A expressão (2.1.5) deixa bem claro que, em um espaço plano e em coordenadas cartesianas, podemos comparar os vetores em pontos diferentes. Entre-

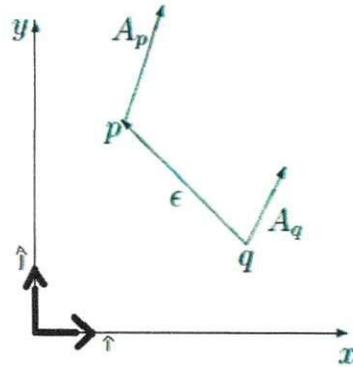


Figura 2.2: Analisando o transporte paralelo em coordenadas cartesianas.

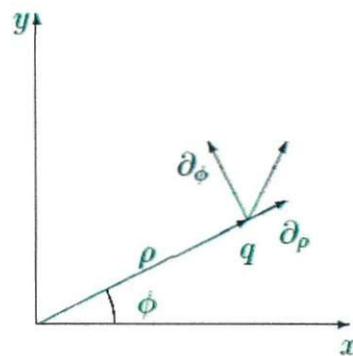


Figura 2.3: Analisando o transporte paralelo em coordenadas polares.

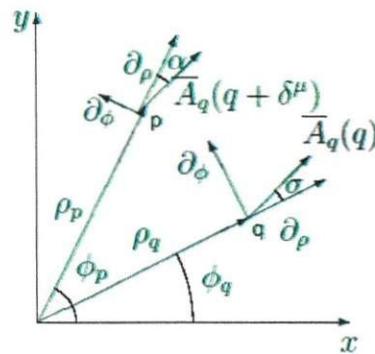


Figura 2.4: Fazendo um transporte paralelo de  $(\phi_q, \rho_q)$  para  $(\phi_p, \rho_p)$ , vemos que as componentes de  $A_q(q)$  transportadas para  $p$  na base  $\partial_\rho, \partial_\phi$  mudam, pois  $A_q^\rho = \sqrt{g(A(q), A(q))} \cos \sigma$  e  $A_q^\phi = \sqrt{g(A(q), A(q))} \frac{\sin \sigma}{\rho_q}$ ; enquanto que  $\bar{A}_q^\rho(p) = \sqrt{g(A(q), A(q))} \cos \alpha$  e  $\bar{A}_q^\phi = \sqrt{g(A(q), A(q))} \frac{\sin \alpha}{\rho_p}$ . Temos também o determinante que é  $g(A(\theta), A(\phi)) = \det g_{\mu\nu}$ . Da figura, está claro que  $\alpha = \sigma$ .

tanto, o conceito de transporte paralelo não é tão óbvio assim. Para exemplificar isto, considere o caso acima sendo que em coordenadas polares figura 2.3. Da figura 2.4, vemos que o vetor transportado paralelamente de  $q$  para  $p$  muda os valores de suas componentes na base  $\partial_\rho, \partial_\phi$ . Por esta razão, precisamos de uma versão generalizada do transporte paralelo. Por coviniência, definiremos o transporte paralelo a partir do conceito de derivada covariante. Isto contudo, não representa nenhuma restrição, pois, o conceito de transporte paralelo pode sempre ser obtido a partir do de derivada covariante e vice-versa[2].

### 2.1.3 Derivada Covariante

Dada uma variedade  $M$ , (variedades são generalizações da concepção intuitiva que temos sobre curvas e superfícies) uma curva  $\alpha(t)$ , o plano tangente  $T_{\alpha(t)}M$  e o campo vetorial  $\mathbf{V}$  tangente à curva  $\alpha(t)$ , o vetor definido por  $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$  não necessariamente está contido no plano  $T_{\alpha(t)}M$ . Como fazemos os cálculos no plano tangente à variedade, precisamos definir um outro tipo de derivada que garante que, uma vez aplicada em  $\mathbf{V}$ , o vetor resultante esteja contido em  $T_{\alpha(t)}M$ . Esta derivada será representada pelo símbolo  $\nabla$ . Vamos definir a derivada covariante de forma a ser independente da base que escolhemos. Para alcançar este objetivo, vamos derivar vetores e não componentes. Além disso, a derivada também será feita com respeito a vetores (na direção de vetores) e não suas componentes. Sendo Assim, é natural representarmos esta derivada na forma  $\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}$ , onde  $\mathbf{V}, \mathbf{W}$  são campos vetoriais. Nesta definição, o  $\mathbf{V}$  representa o vetor derivado, enquanto  $\mathbf{W}$  indica a direção na qual está sendo feita a derivação. Obviamente, esta definição ainda é puramente simbólica, uma vez que não sabemos o que significa a derivada de um vetor com relação a outro. Mais adiante, veremos que este conceito é similar ao de derivada direcional. Para motivar a definição de  $\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}$ , vamos adotar uma análise passo a passo das generalizações que temos que fazer. Primeiro, considere a derivada usual do vetor  $V = V^\mu \partial_\mu$ . Usando a regra de Leibniz para

a derivada, teremos

$$\frac{\partial V^\mu \partial_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + V^\mu \frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.1.6)$$

Embora o termo  $\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu}$  pareça estranho, ele não é. Na verdade, ele está bem definido. Podemos dar como exemplo a derivada do vetor  $\partial_\rho$  em coordenadas polares com relação a  $\phi$ . Sabemos que  $\partial_\rho = \cos\phi \partial_x + \sin\phi \partial_y$ . Portanto,  $\frac{\partial \partial_\rho}{\partial \phi} = -\sin\phi \partial_x + \cos\phi \partial_y = \rho \partial_\phi$ . Este cálculo sugere algo simples: podemos expressar  $\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu}$  em termos dos vetores  $\partial_\mu$ . De fato, como  $\partial_\nu$  constitui uma base, podemos realmente expandir  $\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu}$  em termos desta base, ou seja,

$$\frac{\partial \partial_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda, \quad (2.1.7)$$

onde os coeficientes da expansão,  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ , são conhecidos como conexão afim. Com isto, a expansão (2.1.6) fica

$$\frac{\partial V^\mu \partial_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\mu + V^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda. \quad (2.1.8)$$

## 2.1.4 Tensor de Riemann, Ricci e escalar de curvatura

Nesta seção, vamos definir objetos que são fundamentais para a caracterização de uma variedade. Destes, se destaca o *tensor de Riemann*. Ele mede a curvatura do espaço. Por esta razão ele também é conhecido como *tensor de curvatura*. O conceito de curvatura é sem dúvida alguma um dos mais importantes tanto para a matemática quanto para a física. Por essa razão, começaremos apresentando uma visão intuitiva do que seja uma curvatura para, então, definirmos o tensor de Riemann. Os outros objetos que definiremos aqui serão apenas uma consequência natural do tensor de Riemann.

### Curvatura

Antes de introduzirmos o tensor de Riemann, permita-nos apresentar uma visão intuitiva do que seja curvatura. Todos sabemos ou temos alguma ideia do que seja uma superfície curva. Todavia, nunca nos perguntamos o que realmente caracteriza estas superfícies de maneira formal. A resposta para esta pergunta talvez não seja tão

simples quanto possa parecer. O conceito de curvatura para curvas é simples. Qualquer pessoa leiga ou não, é capaz de distinguir uma curva de curvatura nula de outra cuja curvatura não se anula ou, até mesmo, saber se uma curva é mais curva que outra. Entretanto, no caso de superfícies, a ideia de curvatura já não é tão simples assim. Por exemplo, um leigo não seria capaz, em princípio, de dizer se um cilindro tem ou não curvatura. É óbvio que neste caso teríamos que especificar de que tipo de curvatura estamos falando, uma vez que uma superfície é composta por várias curvas e, portanto, podemos definir mais de um tipo de curvatura por meio das curvaturas das curvas. Ingenuamente, poderíamos dizer que o cilindro tem curvatura, pois, há várias direções nas quais a curvatura das curvas geodésicas não são nulas, em especial, o círculo da seção transversal do cilindro (geodésica com maior curvatura no cilindro). Porém, as geodésicas ao longo do comprimento do cilindro tem curvatura nula. Um conceito eficaz de curvatura de uma superfície (capaz de distinguir propriedades fundamentais das superfícies) foi desenvolvido por *Gauss* e, posteriormente, generalizado para uma variedade de dimensão qualquer por *Riemann*. (daí o nome geometria riemanniana). Abaixo segue uma descrição qualitativa da curvatura gaussiana. A curvatura de gauss

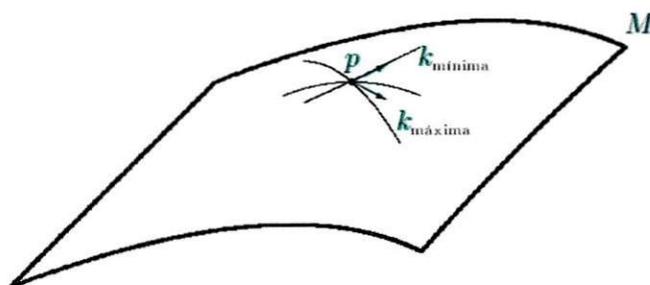


Figura 2.5: Na abordagem de Gauss, a superfície é caracterizada pelas curvaturas  $k_{máxima}$  e  $k_{mínima}$ . Nesta abordagem, usa-se o produto  $k_{máxima}k_{mínima}$  e a soma  $\frac{k_{máxima}+k_{mínima}}{2}$ .

é obtida a partir do produto das curvaturas máximas e mínimas, também conhecidas por curvaturas principais. Mas o que significa curvaturas máximas e mínimas? O conceito é simples, dado um ponto  $p$  em uma variedade  $M$ , existem várias geodésicas

que passam por este ponto e que tem tangentes com direções diferentes, como indicado na figura (2.6). De todas estas curvas, existe uma que possui a maior curvatura naquele ponto e outra que possui a menor. Às tangentes destas curvas, dá-se o nome de direções principais (daí o nome curvaturas principais). O que Gauss fez foi perceber que o produto e a soma das curvaturas destas duas curvas permitia a caracterização das superfícies de forma a distingui-las por propriedades fundamentais. Uma propriedade muito importante sobre superfícies com curvatura gaussiana não nula, é o transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho geodésico fechado não levar o vetor nele mesmo, mas sim o rotacionar. A partir desta propriedade, generaliza-se o conceito de curvatura de uma bisuperfície para uma variedade de dimensão qualquer. Em outras palavras, a curvatura será a medida de quanto um vetor transportado paralelamente rotaciona. Considerando uma esfera, o vetor é transportado paralelamente ao longo das geodésicas. O ângulo do vetor transportado com relação a tangente das curvas é diferente para cada geodésica. O vetor muda sua direção quando transportado paralelamente. Esta propriedade distingue a esfera de várias outras superfícies tais como plano, cilindro etc. Obteremos agora, o tensor de curvatura a partir da variação das componentes de um vetor  $V$  transportado paralelamente. Note que, quando nos referimos a variação, queremos dizer a diferença entre  $V^\mu$  e  $\bar{V}^\mu$  (transportado paralelamente). Podemos construir um campo vetorial ao longo de uma curva a partir de um vetor definido em um certo ponto da curva transportando-o paralelamente deste ponto aos outros. Chamaremos esse campo de campo paralelo. Imagine, agora, que tenhamos um campo vetorial  $V$  e que o valor de suas componentes no ponto  $A$  é denotado por  $V_A^\nu$ . Se denotarmos as componentes do vetor  $V_A^\nu$  transportado paralelamente até um certo ponto  $B$  por  $V_A^{\nu\parallel}$ , então  $V_A^{\nu\parallel}$  é igual ao valor das componentes do campo paralelo construído a partir do transporte paralelo de  $V_A^\nu$  avaliado em  $B$ , ou seja,  $V_A^{\nu\parallel} = \bar{V}(B)$ , onde  $\bar{V}^\nu$  são as componentes do campo paralelo. Em outras palavras,  $\bar{V}^\nu$  no ponto  $C$  coincide com  $V_A^\nu$  transportado paralelamente a  $C$ ,  $\bar{V}^\nu$  no ponto  $D$  coincide com  $V_A^\nu$

transportado paralelamente até  $D$  etc. Esclarecido este fato, considere agora o ponto  $A$  como sendo identificado pelas coordenadas  $x^\alpha$  e ponto  $B$  por  $x^\alpha + dx^\alpha$ , onde  $dx^\alpha$  é um deslocamento infinitesimal. Desta forma,  $V_A^\nu$  pode ser denotado por  $V^\nu(x^\alpha)$  ou, equivalentemente  $\bar{V}^\nu(x^\alpha)$  (o campo paralelo no ponto  $A$  coincide com o vetor que o originou). Por sua vez, as componentes do vetor  $V_A$  transportadas paralelamente até  $B$  ficam  $V_A^{\nu||} = \bar{V}^\nu(B) = \bar{V}^\nu(x^\alpha + dx^\alpha)$ . Da definição de campo paralelo 2.3.1, temos que  $\bar{V}^\nu(x^\alpha)$  satisfaz

$$U^\nu(x^\alpha)\partial_\nu\bar{V}^\lambda(x^\alpha) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)U^\nu(x^\alpha) = 0 \quad (2.1.9)$$

Como  $U$  é arbitrário, podemos escolher suas componentes como sendo infinitesimais  $U^\nu = dx^\nu$ . Neste caso, a expressão acima fica

$$dx^\nu\partial_\nu\bar{V}^\lambda(x^\alpha) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)dx^\nu = 0 \quad (2.1.10)$$

Como  $dx$  é um infinitésimo, podemos expandir as componentes do campo paralelo em torno de  $x^\alpha$ , ou seja,  $V^\lambda(x^\alpha + dx^\alpha) \simeq V^\lambda(x^\alpha) + dx^\alpha\partial_\alpha V^\lambda$  ou, equivalentemente,  $dx^\alpha\partial_\alpha\bar{V}^\lambda \simeq \bar{V}^\lambda(x^\alpha + dx^\alpha) - V^\lambda(x^\alpha)$ . Portanto, a expressão (2,30) fica  $\bar{V}^\mu(x^\alpha) = V^\mu(x^\alpha)$ .

$V^\lambda(x^\alpha + dx^\alpha) - V^\lambda(x^\alpha) = -\Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)dx^\nu$ ,  $\delta V^\lambda = -\Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu dx^\nu$ , onde  $\delta V^\lambda$  é a diferença infinitesimal entre o vetor transportado paralelamente e o próprio vetor. Para obtermos a diferença entre o vetor transportado paralelamente dentro de um circuito fechado, que denotaremos por  $\Delta V^\lambda$ , integramos a expressão acima sobre este circuito

$$\Delta V^\lambda = - \oint \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)dx^\nu. \quad (2.1.11)$$

Usando o teorema de Stokes, a integral acima pode ser convertida em uma integral sobre a área interna ao circuito  $\Delta A^{\alpha\beta}$ . Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \Delta V^\lambda &= -\frac{1}{2} \int dA^{\beta\nu} \left( \frac{\partial\Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\mu}^\lambda(x^\alpha)\bar{V}^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{2} dA^{\beta\nu} \left( \bar{V}^\mu \frac{\partial\Gamma_{\nu\mu}^\lambda}{\partial x^\beta} - \bar{V}^\mu \frac{\partial\Gamma_{\beta\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \frac{\partial\bar{V}^\mu}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \frac{\partial\bar{V}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Usando o fato de que  $\partial_\nu \bar{V}^\lambda = -\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \bar{V}^\mu$ , veja (2.29), teremos  $\Delta V^\lambda = -\frac{1}{2} dA^{\beta\nu} (\bar{V}^\mu \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu}^\lambda}{\partial x^\beta} - \bar{V}^\mu \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{\beta\sigma}^\mu \bar{V}^\sigma + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \bar{V}^\sigma)$  Evidenciando  $\bar{V}^\mu$  na expressão acima, podemos reescrevê-lo na forma

$$\Delta V^\lambda = -\frac{1}{2} dA^{\beta\nu} V^\mu R_{\mu\beta\nu}^\lambda \quad (2.1.13)$$

, onde usamos o fato óbvio de  $\bar{V}^\mu(x^\alpha) = V^\mu(x^\alpha)$ , e definimos

$$R_{\mu\beta\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu}^\lambda}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\alpha. \quad (2.1.14)$$

. Então chegamos ao tensor de curvatur de Riemann

### 2.1.5 Tensor de Ricci

Defini-se o *tensor de Ricci* pela contração do primeiro com o segundo índice,  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$ . No caso da geometria riemanniana, também pode-se definir o tensor de Ricci a partir da contração do segundo com o último índice, pois, neste caso, ambas as definições são equivalentes. A razão do porquê o tensor de Ricci é definido pela contração destes índices ficará clara mais adiante, quando falarmos das propriedades do tensor de Riemann na geometria riemanniana. Por sua vez, o escalar de curvatura é definido como  $R = R_{\mu}^\mu$ . O leitor deve estar atento ao fato de que na literatura há uma variação de sinal na definição tanto do tensor de Riemann quanto no de Ricci.

## 2.2 Mecânica Quântica em Superfícies Curvas

### 2.2.1 Equação de Dirac

No início do século XX sugeriram duas teorias que revolucionaram a nossa maneira de ver o mundo, a relatividade especial e a mecânica quântica. Elas foram muito bem sucedidas na explicação de vários fenômenos físicos: o espectro de energia dos átomos, a dilatação do tempo etc. Entretanto, estas duas teorias foram inicialmente fundamentadas em perspectivas totalmente distintas. enquanto a relatividade especial foi construída em uma perspectiva geométrica que partia do postulado de que a

energia e o momento deveriam ser substituídos por operadores com o intuito de obter uma equação de onda para descrever o movimento de uma partícula. Surgiu, então, a necessidade de unir estas duas teorias em uma só (Apêndice A).

Considerando a Teoria intrínseca de Dirac de segunda ordem em superfície, temos a equação de Dirac no espaço tempo curvo dimensional. Devido a estrutura espinorial, a equação de Dirac é mais facilmente formulada relativa a um campo de Vier-Bein. A equação maciça relativa a um dado campo Vier-bein é dada por [3];

$$(\gamma^\nu (\hbar \partial_\nu - \Gamma_\nu + mc))\Psi = 0. \quad (2.2.15)$$

Onde  $\partial_\nu - \Gamma_\nu = D_\nu$  é derivada covariante

Assim, temos,

$$(\hbar \gamma^\nu D_\nu + mc)\Psi = 0. \quad (2.2.16)$$

Onde:  $\Psi$  é o campo espinor de Dirac;  $m$  é massa da partícula em repouso;  $\gamma^\nu$  é a matriz de Dirac

O campo de Dirac é normalizado com respeito a medida interação. Nós estamos interessados na forma da segunda ordem da equação de Dirac para fazer a comparação direta com a Teoria de Schrödinger na Superfície  $S$ . Deduzimos a forma da segunda ordem da equação de Dirac pelo quadrado da equação de Dirac de primeira ordem.

$$(\hbar \gamma^\kappa D_\kappa - mc)(\hbar \gamma^\nu D_\nu + mc)\Psi = 0 \Rightarrow (\hbar^2 \gamma^\kappa \gamma^\nu D_\kappa D_\nu - m^2 c^2)\Psi = 0 \quad (2.2.17)$$

Utilizando a identidade algébrica

$$\frac{1}{2}\{\gamma^\kappa, \gamma^\nu\} = \frac{1}{2}(\gamma^\kappa \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\kappa) \quad (2.2.18)$$

$$\frac{1}{2}[\gamma^\kappa, \gamma^\nu] = \frac{1}{2}(\gamma^\kappa \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\kappa) \quad (2.2.19)$$

e somando estas duas equações temos

$$\frac{1}{2}(\{\gamma^\kappa, \gamma^\nu\} + [\gamma^\kappa, \gamma^\nu]) = \frac{1}{2}(\gamma^\kappa \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\kappa + \gamma^\kappa \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\kappa) = \gamma^\kappa \gamma^\nu \quad (2.2.20)$$

Logo;

$$\gamma^\kappa \gamma^\nu = \frac{1}{2}(\{\gamma^\kappa, \gamma^\nu\} + [\gamma^\kappa, \gamma^\nu]) \quad (2.2.21)$$

Utilizando a algebra fundamental de Clifford  $\{\gamma^\nu, \gamma^\kappa\} = 2\eta^{\nu\kappa}$ , podemos escrever a equação de segunda ordem de Dirac como:

$$(\hbar^2(\eta^{\kappa\nu} + \frac{1}{2}[\gamma^\kappa, \gamma^\nu])D^\kappa D^\nu - m^2 c^2)\Psi = 0 \quad (2.2.22)$$

Note que se não é possível extrair o termo correspondente para com a parte anti-simétrica acima em uma teoria escalar puramente bosônica como a Teoria de Schrödinger. A parte antissimétrica pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2}[D_\kappa, D_\nu] = \frac{1}{2}(D_\kappa D_\nu - D_\nu D_\kappa) \quad (2.2.23)$$

Utilizando a propriedade de comutação  $D_\nu D_\kappa = -D_\kappa D_\nu$  temos

$$\frac{1}{2}[D_\kappa, D_\nu] = D_\kappa D_\nu \quad (2.2.24)$$

Assim,

$$\frac{1}{2}[\gamma^\kappa, \gamma^\nu]D_\kappa D_\nu = \frac{1}{4}[\gamma^\kappa \gamma^\nu][D_\kappa, D_\nu] \quad (2.2.25)$$

O comutador entre a componente de ligação é por definição proporcional a componente de curvatura de Riemann  $R_{\nu\kappa\lambda\mu}$  na Superfície  $S$ .

$$[D_\kappa, D_\nu]V_\mu = D_\kappa D_\nu V_\mu - D_\nu D_\kappa V_\mu \quad (2.2.26)$$

Utilizando a definição da derivada covariante, temos,

$$D_\nu V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda \quad (2.2.27)$$

$$D_\kappa V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda \quad (2.2.28)$$

Aplicando novamente a derivada covariante encontramos os dois termos expressos no comutador

$$D_\kappa D_\nu V_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left( \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda \right) - \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \left( \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda V_\lambda \right) - \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \left( \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V_\lambda \right) \quad (2.2.29)$$

$$D_\nu D_\kappa V_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda \right) - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \left( \frac{\partial V_\sigma}{\partial x^\kappa} - \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda V_\lambda \right) - \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma \left( \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V_\lambda \right) \quad (2.2.30)$$

$$D_\kappa D_\nu V_\mu = \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda}{\partial x^\kappa} - \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \frac{\partial V_\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda V_\lambda - \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V_\lambda \quad (2.2.31)$$

$$D_\nu D_\kappa V_\mu = \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \frac{\partial V_\sigma}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda V_\lambda - \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V_\lambda \quad (2.2.32)$$

Resolvendo a subtração da equação destas duas ultimas equações, como cada uma da expressões tem seis termos em seu lado direito, temos que o primeiro termo das expressões comutam. Então cancelam-se. O mesmo ocorre com a quarto e o quinto termo, supomos uma métrica na qual  $\Gamma_{\kappa\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma$ . Calculando a derivada do segundo termo respectivamente,obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa} (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda) = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \frac{\partial V_\sigma}{\partial x^\kappa} \quad (2.2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda) = \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda \frac{\partial V_\sigma}{\partial x^\nu} \quad (2.2.34)$$

Fizemos a troca ( $\mu$  por  $\sigma$ )no segundo termo destas, possível pelo fato do índice estar contraído, o que possibilita sua anulação com o terceiro termo das eqs anteriores. Obtemos;

$$[D_\kappa, D_\nu]V_\mu = -\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda V_\lambda + \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_\lambda \quad (2.2.35)$$

Arrumando a equação, chegamos a

$$[D_\kappa, D_\nu]V_\mu = \left( -\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \right) V_\lambda \quad (2.2.36)$$

Sabemos que  $V_\lambda = \eta^{\lambda\mu} V_\mu$ . Assim,

$$[D_\kappa, D_\nu]V_\mu = \left( -\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \right) \eta^{\lambda\mu} V_\mu \quad (2.2.37)$$

$$[D_\kappa, D_\nu] = \left( -\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \right) \eta^{\lambda\mu} \quad (2.2.38)$$

e podemos finalmente definir o tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\mu\kappa\nu}^\lambda = -\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\kappa\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \quad (2.2.39)$$

Substituindo (2.1.39) em (2.1.38) temos,

$$[D_\kappa, D_\nu] = R_{\mu\kappa\nu}^\lambda \eta^{\lambda\mu} \quad (2.2.40)$$

Este tensor é o único que pode ser construído a partir do tensor métrico e de suas derivadas primeiras e segundas. Ele mede a não comutatividade da derivada covariante. Pode-se demonstrar que a nulidade do tensor de Riemann implica na nulidade do comutador de qualquer tensor. Em relação à interpretação física do tensor de Riemann, podemos notar que, durante o transporte paralelo de um vetor, suas componentes ao longo de uma geodésica (o caminho de menor ação) têm que ser as mesmas em todos os pontos da trajetória (ângulo entre o vetor e a tangente à geodésica mantém-se inalterado) para o caso de um espaço-tempo plano. Já no caso geral que envolva um espaço-tempo curvo, a variação  $\Delta A_\mu$  sofrida por um vetor  $A_\mu$  transportado paralelamente ao redor de um contorno fechado infinitesimal envolvido pela área  $\Delta f^{\nu\kappa}$  é dada por:

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda A_\lambda \Delta f^{\nu\kappa} \quad (2.2.41)$$

É possível abaixar o índice contravariante do tensor de curvatura de definir o tensor de Riemann covariante:

$$R_{\mu\kappa\nu}^\lambda = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (2.2.42)$$

Assim ficamos

$$[D_\kappa, D_\nu] = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\kappa\nu} \eta^{\lambda\mu} \kappa \quad (2.2.43)$$

, onde:  $g^{\lambda\mu} = \frac{i}{4} [\gamma^\lambda, \gamma^\mu]$ ,  $\eta^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \{\gamma^\lambda, \gamma^\mu\}$  e  $\{\gamma^\lambda, \gamma^\mu\} = -\frac{[\gamma^\lambda, \gamma^\mu]}{i\hbar}$  e utilizando a propriedade do tensor de Riemann covariante  $R_{\lambda\mu\kappa\nu} = -R_{\kappa\nu\lambda\mu}$  Então temos que, o comutador entre as componentes de conexão é por definição proporcional às componentes de Curvatura Riemanniana  $R_{\nu\kappa\lambda\mu}$  em  $S$

$$[D_\kappa, D_\nu] = \frac{1}{8} R_{\kappa\nu\lambda\mu} [\gamma^\lambda, \gamma^\mu] \quad (2.2.44)$$

Relativo ao local o operador de cinético  $D^2 = \eta^{\nu\kappa} D_\nu D_\kappa$  decompõe-se em uma componente tangencial da superfície  $D_{\parallel}^2$ , uma componente normal  $D_{\perp}^2$  e a componente do

tempo  $D_t^2$ . Desde que

$$\frac{1}{8}[\gamma^\kappa, \gamma^\nu]R_{\kappa\nu\lambda\mu}[\gamma^\lambda\gamma^\mu] = \frac{1}{2}R_{\kappa\nu\lambda\mu}\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\mu \quad (2.2.45)$$

o quadrado da equação de Dirac pode ser escrita como

$$(-D_t^2 + D_{\parallel}^2 + D_{\perp}^2 + \frac{1}{8}R_{\nu\kappa\lambda\mu}\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\mu)\Psi = 0 \quad (2.2.46)$$

Esta expressão é nosso ponto de partida para comparar a diferença entre os dois modelos abordados para construir uma teoria efetiva na superfície.

### 2.2.2 Redução Dimensional

Antes de prosseguir vamos iniciar abordando uma outra teoria para superfícies curvas, fazendo uma redução dimensional[4]. O campo normal com a superfície é sempre paralela à tangente do vetor campo de uma das coordenadas.  $D_{\perp}^2$  atinge nesta direção. Se admitirmos que a equação dinâmica em questão é separável em partes dependendo da coordenada na superfície e da coordenada perpendicular respectivamente, deduz-se uma teoria que existe unicamente na superfície. Isso foi a grande intuição em [4] que o problema corresponde na teoria de Schrodinger exibirá um potencial escalar que depende da curvatura gaussiana e curvatura média ( $K$  e  $M$ , respectivamente) da superfície (restabelecendo  $\hbar$ )

$$V_S = -\frac{\hbar^2}{2m}(M^2 - K) = -\frac{\hbar^2}{8m}(k_1 - k_2)^2 \quad (2.2.47)$$

$k_1$  e  $k_2$  são as duas principais curvaturas e  $M \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ ,  $K \equiv k_1 k_2$ . Note que este, ou um potencial semelhante, não emergirá na teoria de Schrodinger definida unicamente na superfície.  $V_S$  é claramente não positivo em qualquer superfície. Como fazer essa mudança se considerarmos a equação de Dirac de segunda ordem correspondente? Pois nós estamos considerando a teoria que existente no espaço com a curvatura intrínseca desaparecendo segue-se que a equação (2.2.46) reduz-se a teoria de Schrodinger por trivialidade se modificarmos quaisquer interações spin-órbita resultantes da presença

da posição dependente da conexão spin. Isso segue que a teoria da superfície de Dirac conterá um potencial escalar  $V_S$ . Esta conclusão dura se seguirmos intrinsecamente a abordagem dimensional(2+1)? Na abordagem intrinsecamente em (2+1) dimensões é formulado em um espaço tri-dimensional de Minkowski com a equação dinâmica igual o modelo tri-dimensional da equação de Dirac. Escolhemos a representação  $4 \times 4$  da matriz  $\gamma^A$  porque a alternativa  $2 \times 2$ , que é disponível em (2+1) quebra a invariância da paridade[5]. A fim de adaptar esta formulação para o espaço curvo nós adotamos simplesmente a teoria covariante no modo usual. Então, a formulação de segunda ordem é novamente a equação (2.2.46) mas sem o termo  $D_-^2$ . A teoria resultante será válida em baixas energias. É bem sabido que o campo de gauge  $U(1)$  que junta-se ao espinor de Dirac é induzido na superfície curva devido a curvatura intrínseca (see [6] e.g.). Não alteramos esse campo em seguida, no entanto não podemos descartar a contribuição do tensor de curvatura intrínseca que pudemos abordar a redução dimensional. Trabalhando em  $2 + 1$  dimensões e tendo as simetrias do tensor de curvatura em conta, decorre de algumas manipulações algébricas que

$$R_{\nu\kappa\lambda\mu}\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\mu = -2R \quad (2.2.48)$$

, onde  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci na superfície estática. Em superfícies bidimensionais o escalar de Ricci é igual a duas vezes a curvatura Gaussiana extrínseca,  $R = 2K$ . Esta contribuição de Ricci adicionará um potencial efetivo geometricamente induzido. No trabalho seminal[4], estruturas estáticas lineares também foram consideradas dentro das limitações da teoria de Schrodinger. Um potencial efetivo é induzido devido à geometria também neste caso. Como é essa figura alterada quando se considera os Férmions? Claramente, a teoria extrinsecamente definida reproduzirá a teoria de Schrodinger com o caso das superfícies. Considerando a teoria intrinsecamente definida, a formulação de segunda ordem na equação (2.2.46) é novamente válida. No entanto, o novo tensor de curvatura de Riemann é trivialmente nulo quando consideramos as curvaturas estáticas linear. Então, a geometria será independente do tempo.

Este modo que definiu férmions intrinsecamente nas estáticas das estruturas lineares, não provará o potencial geométrico induzido. No entanto, note que se a estrutura exibe uma geometria dependente do tempo isso não é constante por muito tempo. Isso é facilmente percebido já no nível algébrico, a partir do lado direito da equação (2.2.48) que é diferente de zero com a mudança total do sinal.

$$R_{\nu\kappa\lambda\mu}\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\mu = 2R \quad (2.2.49)$$

Esta inversão de sinal é induzida pela algebra de Clifford. Mas não iremos abordar esta mudança de sinal no momento.

### 2.2.3 Limite de Baixa Energia

Vamos fazer uma comparação direta com a teoria de Schrodinger pelo limite de baixa energia da teoria de Dirac massiva. Nós também abandonamos todos os termos de conexão-spin. Sem estes termos, a equação de Dirac reduz-se a

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t} + \nabla_{\parallel}^2 - \frac{1}{2}K - m^2\right)\psi = 0 \quad (2.2.50)$$

Onde  $\psi$  é um estado-spin e  $\nabla_{\parallel}$  é a derivada covariante usual atuando na função escalar. Assumimos autoestados de energia, denotamos a energia total da partícula por  $E$ . Após uma expansão de  $\frac{1}{m}$  (reestabelecendo  $\hbar$ ), a equação (2.2.50) torna-se

$$E_c\psi = (E - m)\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\parallel}^2 + \frac{\hbar^2}{2m}K\right)\psi \quad (2.2.51)$$

Esta é a equação de Schrodinger correspondente à equação de segunda ordem de Dirac e  $E_c$  é a energia não relativística. Surgiu um potencial efetivo  $V_D$  dado por

$$V_D = \frac{\hbar^2}{2m}K \quad (2.2.52)$$

Devido à variação de  $K$  este potencial pode ser negativo ou positivo que o torna diferente do potencial  $V_S$ .

## 2.3 Algumas Propriedades Geométricas de Suprefícies na Representação de Monge

Neste trabalho investigamos partículas em superfícies curvas. Consideramos estas superfícies dadas geralmente pelo mapa,

$$\mathbf{X} = (x, y, h(x, y)) , \quad (2.3.53)$$

onde  $x, y \in \text{Re}$  e  $h(x, y)$  é a função altura. Queremos analisar o potencial geométrico (2.3.47) acima. A fim de atingir este objetivo, devemos calcular a curvatura média e a curvatura Gaussiana da superfície dada por (2.4.53) [9]. Assim, começamos pelos coeficientes da *primeira forma fundamental*, que é, a métrica induzida de (2.4.43), bem como os coeficientes da *segunda forma fundamental*. Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned} E = g_{xx} &\equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} = (1 + h_x^2), \\ F = g_{xy} = g_{yx} &\equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} = h_x h_y, \\ G = g_{yy} &\equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} = (1 + h_y^2) \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

onde  $h_x = \partial_x h$  e  $h_y = \partial_y h$ . Deste modo, a métrica iduzida é dada por

$$ds^2 = (1 + h_x^2)dx^2 + 2h_x h_y dx dy + (1 + h_y^2)dy^2 \quad (2.3.55)$$

O vetor unitario normal da superfície (2.4.49) é dado por

$$n = \frac{\mathbf{X}_x \times \mathbf{X}_y}{|\mathbf{X}_x \times \mathbf{X}_y|} = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}. \quad (2.3.56)$$

Então, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &\equiv \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial x^2} \cdot n = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, \\ f &\equiv \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial x \partial y} \cdot n = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, \\ e &\equiv \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial y^2} \cdot n = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

onde  $h_{xy} = \partial_{xy}^2 h$ ,  $h_{xx} = \partial_{xx}^2 h$  e  $h_{yy} = \partial_{yy}^2 h$ . A curvatura média é dada por

$$\begin{aligned} M &= \frac{eG - 2fG + gE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.3.58)$$

e a curvatura Gaussiana é

$$\mathbf{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} \quad (2.3.59)$$

Com estes resultados, o potencial geométrico(2.3.47) induzido pelo mapa(2.4.55) pode ser investigado. Nós não vamos resolver a equação de Schrodinger para uma partícula restrita à estas superfícies. Nós abordaremos a implicações físicas de  $V_S$  e  $V_D$ , comparando as duas teorias abordadas aqui.

## Capítulo 3

# Potenciais Quânticos Induzidos por Curvatura em Algumas Superfícies

### 3.1 Superfície Paraboloide Hiperbólico $h = c(x^2 - y^2)$

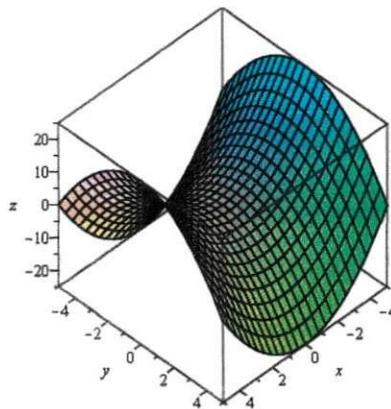


Figura 3.1: Paraboloide hiperbólico  $h = c(x^2 - y^2)$  superfície a ser analisada através da curvatura gaussiana, curvatura média e o potencial geométrico.

A figura 3.1 mostra a superfície paraboloide a ser analisada. Para chegarmos às figuras (3.2,3.3 e 3.4) realizamos os cálculos através das equações,

$$\mathbf{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} \quad (3.1.1)$$

$$M = \frac{1}{2} \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1.2)$$

$$V_S = -\frac{\hbar^2}{2m}(M^2 - K) \quad (3.1.3)$$

que são as equações para calcular , a curvatura gaussiana, a curvatura média, e o potencial geométrico respectivamente. Assim encontramos,

Curvatura Gaussiana

$$K = -\frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} \quad (3.1.4)$$

Curvatura Média

$$M = \frac{1}{2} \frac{-8x^2 + 8y^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1.5)$$

Potencial Geométrico

$$V = -\frac{1}{8} \frac{-8x^2 + 8y^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^3} - \frac{2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} \quad (3.1.6)$$

Na figuras (3.2;3.3;3.4) mostramos como se comporta a curvatura gaussiana, a curvatura média e o potencial geométrico respectivamente de uma superfície parabolóide hiperbólica. Conforme a figura (3.2) podemos observar que ela possui um poço negativo. Nesta região de deformação ocorre um estreitamento muito agudo, e conseqüentemente ocorre uma queda da energia potencial que também é negativa. Assim podemos notar que a região atrativa coincide com a região da curvatura gaussiana negativa que é o potencial  $V_D$ , ou seja o potencial de Dirac. Essa curvatura ocorre no intervalo de -2 a 2 aproximadamente nas direções x e y para demais variações ela permanece constante com o valor igual a 0.

Para ajudar na visualização fizemos a projeção destes gráficos no plano xy. De acordo com a figura (3.4) mostramos que o potencial geométrico é semelhante à curvatura gaussiana que pode ser melhor visualizada através das figuras (3.5 e 3.7), como **estados ligados** ocorrem apenas para certas energias negativas,  $E < 0$ . Neste caso existe um

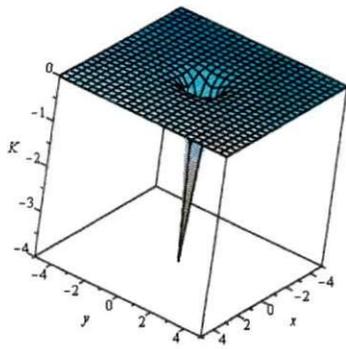


Figura 3.2: Curvatura gaussiana em uma superfície parabolóide de função  $h = c(x^2 - y^2)$ . Este é o potencial geométrico  $V_D$

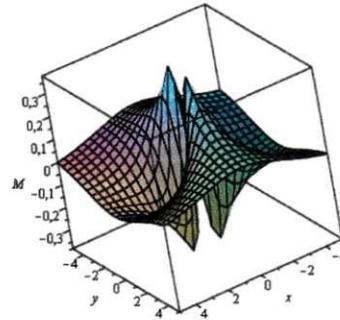


Figura 3.3: Curvatura média em uma superfície parabolóide de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

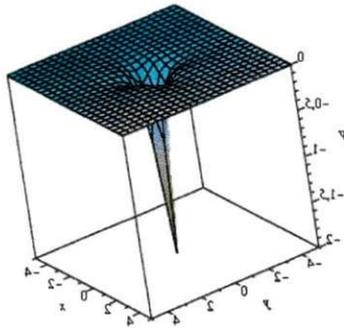


Figura 3.4: Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

**espectro discreto** de níveis ou estados de energia, então temos que, conforme mostra esta figura, a região onde as energias são negativas o movimento é ligado o qual temos uma maior probabilidade de encontrar partículas. Assim, podemos observar que à medida que a energia total negativa diminui, também diminui a área, determinada pelos pontos de retorno, da região onde as partículas pode se mover. Isto provoca um aumento da quantidade de movimento e, por conseguinte, aumenta a energia cinética. Este processo ocorre até que as partículas atinjam um estado estável, provocando assim

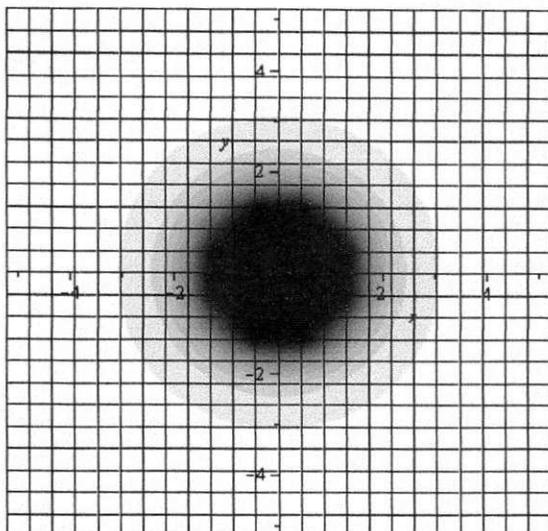


Figura 3.5: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica de função  $h = c(x^2 - y^2)$

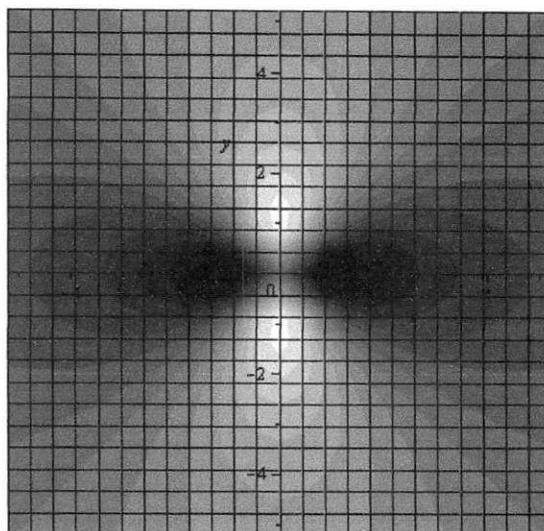


Figura 3.6: Projeção mostrando a curvatura média para a superfície parabolóide hiperbólica de função  $h = c(x^2 - y^2)$

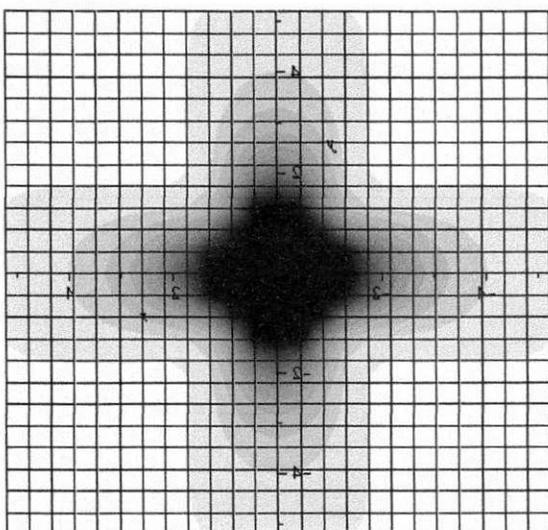


Figura 3.7: Projeção mostrando o potencial geométrico para a superfície parabolóide hiperbólica de função  $h = c(x^2 - y^2)$

se confinamento de partículas, onde este ponto escuro apresentado na figura (3.7) é a projeção do potencial que é chamado de ponto quântico ou poço quântico. Podemos observar também que este ponto é o único local que existe a curvatura gaussiana e potencial geométrico significativos, nos demais pontos a maioria é nulo. Então, para

os valores acima de 0 não existem a curvatura gaussiana nem o potencial geométrico, mas conforme podemos observar na figura (3.3) existe uma pequena probabilidade de encontrarmos partículas dispersas em dois pontos, conforme podemos melhor visualizar na figura (3.6) que chamamos de estados não-ligados. Para  $E > 0$ , há um **espectro contínuo** de níveis de estados ou energia. A razão disto é que, quando  $E > 0$ , o movimento está limitado apenas a um ponto, de modo que só é necessária uma condição de fronteira. Desta forma o estado não ligado parece com a partícula livre, mas o comprimento de onda não é constante porque a quantidade de movimento da partícula depende da distância a 0. Podemos notar que, apesar das duas teorias fornecerem resultados quantitativos diferentes e qualitativos, temos a mesma coisa, um poço quântico estreito induzido pela geometria do parabolide hiperbólico. Mais ainda, percebemos que a física do problema é determinada pela curvatura gaussiana nos dois modelos.

### 3.2 Superfície $h = c(\sin(2x) \sin(2y))$

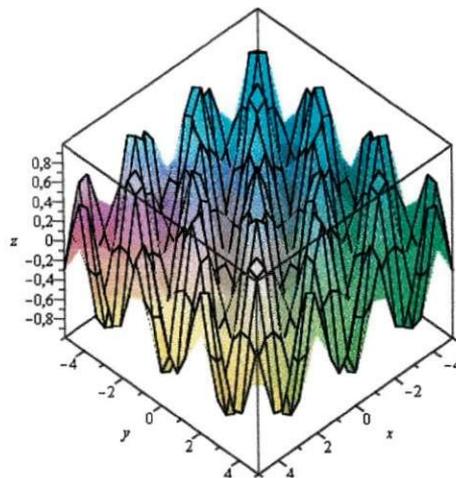


Figura 3.8: Superfície de função  $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$  a ser analisada através das curvaturas gaussiana e média e o potencial geométrico.

A figura 3.8 mostra uma superfície a ser analisada. Para chegarmos às figuras (3.9, 3.10 e 3.11) realizamos os cálculos através das equações

$$\mathbf{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} \quad (3.2.7)$$

$$M = \frac{1}{2} \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_xh_yh_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.2.8)$$

$$V_S = -\frac{\hbar^2}{2m}(M^2 - K) \quad (3.2.9)$$

que são as equações para calcular , a curvatura gaussiana, a curvatura média, e o potencial geométrico respectivamente. Assim encontramos,

Curvatura Gaussiana

$$K = -\frac{16\sin(2x)^2\sin(2y)^2 - 16\cos(2x)^2\cos(2y)^2}{(1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)^2} \quad (3.2.10)$$

Curvatura Média

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \left( \frac{-4(1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2)\sin(2x)\sin(2y)}{1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &- \frac{32(((\cos(2x)\sin(2y))\sin(2x)\cos(2y)))(\cos(2x)\cos(2y))}{(1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \left. \frac{4((1 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)(\sin(2x)\sin(2y)))}{(1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (3.2.11) \end{aligned}$$

Potencial Geométrico

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left( \frac{-4(1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2)\sin(2x)\sin(2y)}{1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &- \frac{32(((\cos(2x)\sin(2y))\sin(2x)\cos(2y)))(\cos(2x)\cos(2y))}{(1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \left. \frac{4((1 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)(\sin(2x)\sin(2y)))}{(1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{16\sin(2x)^2\sin(2y)^2 - 16\cos(2x)^2\cos(2y)^2}{(1 + 4\cos(2x)^2\sin(2y)^2 + 4\sin(2x)^2\cos(2y)^2)^2} \quad (3.2.12) \end{aligned}$$

Na figuras (3.9;3.10;3.11) mostramos como se comprota a curvatura gaussiana, a curvatura média e o potencial geométrico respectivamente de uma superfície. Conforme a figura (3.9) podemos observar que ela possui vários poços negativos. Nestas

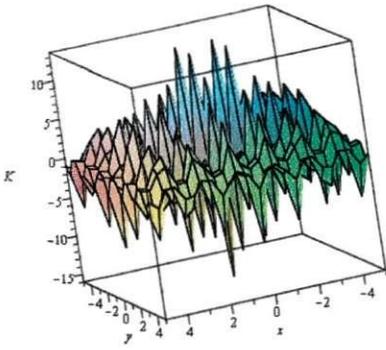


Figura 3.9: curvatura gaussiana em uma superfície de função  $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ .

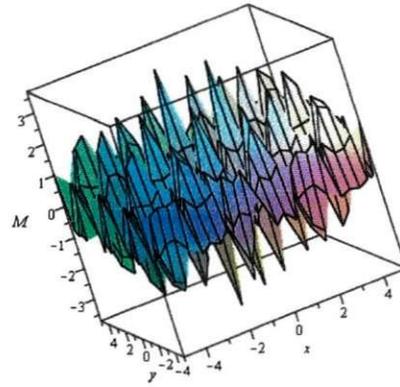


Figura 3.10: Curvatura média em uma superfície de função  $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ .

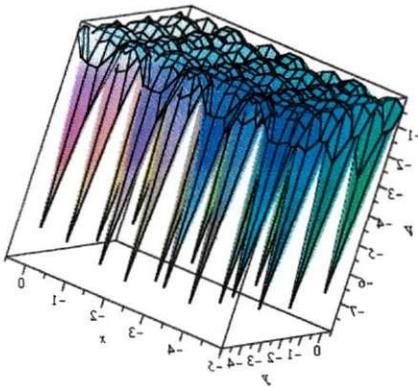


Figura 3.11: Potencial quântico geométrico em uma superfície de função  $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$ .

regiões de deformação ocorrem um estreitamento muito agudo, e conseqüentemente ocorre uma queda da energia potencial que também é negativa. Assim podemos notar que a região atrativa coincide com a região da curvatura gaussiana negativa que é o potencial  $V_D$ , ou seja o potencial de Dirac. Essa curvatura ocorre no intervalo de  $1,5\mu$  de distância uma da outra aproximadamente nas direções  $x$  e  $y$  entre estes poços existem quatro que são mais profundos.

Para ajudar na visualização fizemos a projeção destes gráficos no plano  $xy$ . De acordo com a figura (3.11) mostramos que o potencial geométrico é semelhante à cu-

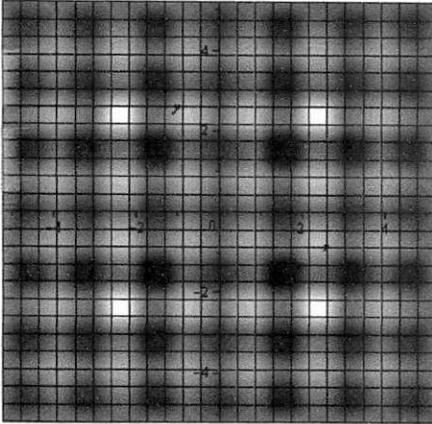


Figura 3.12: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície de função  $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$

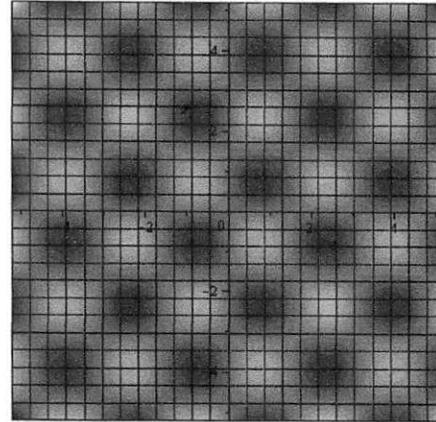


Figura 3.13: Projeção mostrando a curvatura média para a superfície de função  $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$

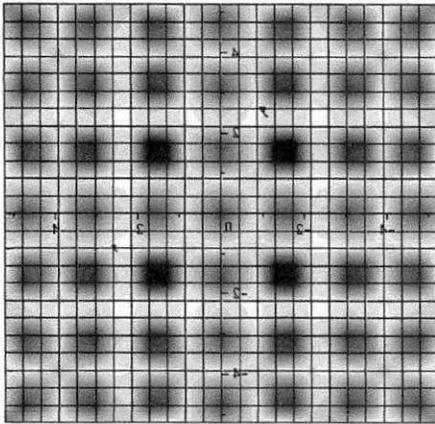


Figura 3.14: Projeção mostrando o potencial geométrico para a superfície de função  $h = c(\sin(2x)\sin(2y))$

vatura gaussiana que pode ser melhor visualizada através das figuras (3.12 e 3.14), como **estados ligados** ocorrem apenas para certas energias negativas,  $E < 0$ . Neste caso existe um **espectro discreto** de níveis ou estados de energia, então temos que, conforme mostra esta figura, a região onde as energias são negativas o movimento é ligado o qual temos uma maior probabilidade de encontrar partículas. Assim, podemos observar que à medida que a energia total negativa diminui, também diminui a área, determinada pelos pontos de retorno, da região onde as partículas podem se mover.

Isto provoca um aumento da quantidade de movimento e, por conseguinte, aumenta a energia cinética. Este processo ocorre até que as partículas atinjam um estado estável, provocando assim se confinamento de partículas, onde os pontos escuros apresentados na figura (3.14) é a projeção do pontencial que são chamados de pontos quântico ou poço quânticos. Podemos observar também que apesar de existirem vários poços, quatro são mais profundo que são facilmente identificados por serem mais escuros. Para os valores acima de 0 existem a curvatura gaussiana e curvatura média conforme podemos observar nas figura (3.9 e 3.10) existe uma pequena probabilidade de encontrarmos partículas dispersas em pontos claros, conforme podemos melhor visualizar na figura (3.12 e 3.13) que chamamos de estados não-ligados. Para  $E > 0$ , há um **espectro contínuo** de níveis de estados ou energia. A razão disto é que, quando  $E > 0$ , o movimento está limitado apenas a um ponto, de modo que só é necessária uma condição de fronteira. Desta forma o estado não ligado parece com a partícula livre, mas o comprimento de onda não é constante porque a quantidade de movimento da partícula depende da distância a 0. Podemos notar que, neste caso a curvatura gaussiana induz os resultados físicos nas duas teorias, mas a curvatura média agora parece ter um efeito significativo. Mudando os parâmetros da equação desta superfície ficamos com a equação que será apresentada na subseção seguinte

### 3.2.1 Superfície $h = c(\sin(x)\sin(y))$

A figura 3.15 mostra a superfície a ser analisada. Para chegarmos às figuras (3.16, 3.17 e 3.18) realizamos os calculos através da equações (3.2.7, 3.2.8 e 3.2.) que são as equações para calcular o potencial geométrico, a curvatura média e a curvatura gaussiana. Assim encontramos,

Curvatura Gaussiana

$$K = -\frac{\sin(x)^2\sin(y)^2 - \cos(x)^2\cos(y)^2}{(1 + \cos(x)^2\sin(y)^2 + \sin(x)^2\cos(y)^2)^2} \quad (3.2.13)$$

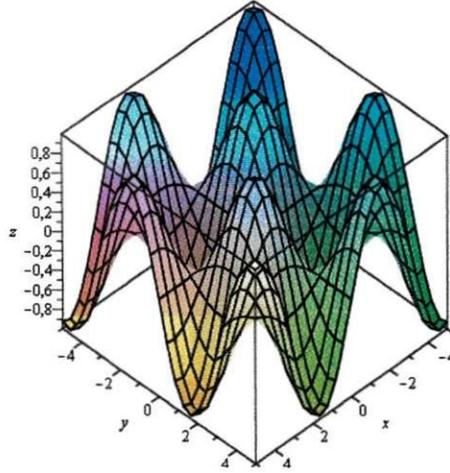


Figura 3.15: Superfície de função  $h = c(\sin(x)\sin(y))$ .

Curvatura Média

$$M = \frac{1}{2} \left( \frac{-(1 + \cos(x)^2 \sin(y)^2 \sin(x) \sin(y)) - 2((\cos(x) \sin(y)) \sin(x) \cos(y)))(\cos(x) \cos(y))}{1 + \cos(x)^2 \sin(y)^2 + \sin(x)^2 \cos(y)^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{((1 + \sin(x)^2 \cos(y)^2)(\sin(x) \sin(y)))}{1 + \cos(x)^2 \sin(y)^2 + \sin(x)^2 \cos(y)^2} \right) \quad (3.2.14)$$

Potencial Geométrico

$$V = \frac{1}{2} \left( \frac{-(1 + \cos(x)^2 \sin(y)^2 \sin(x) \sin(y)) - 2((\cos(x) \sin(y)) \sin(x) \cos(y)))(\cos(x) \cos(y))}{1 + \cos(x)^2 \sin(y)^2 + \sin(x)^2 \cos(y)^2} \right)^2 - \frac{((1 + \sin(x)^2 \cos(y)^2)(\sin(x) \sin(y)))}{1 + \cos(x)^2 \sin(y)^2 + \sin(x)^2 \cos(y)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(x)^2 \sin(y)^2 - \cos(x)^2 \cos(y)^2}{(1 + \cos(x)^2 \sin(y)^2 + \sin(x)^2 \cos(y)^2)^2} \quad (3.2.15)$$

Na figuras (3.16;3.17;3.18) mostramos como se comprota a curvatura gaussiana, a curvatura média e o potencial geométrico respectivamente de uma superfície. Conforme a figura (3.16 e 3.18) podemos observar que a curvatura gaussiana e o potencial geométrico se assemelham e que eles possui vários poços negativos. Nestas regiões de deformação ocorrem poços mais alargados, e conseqüentemente ocorre uma queda da energia potencial que também é negativa. Assim podemos notar também que a região atrativa coincide com a região da curvatura gaussiana negativa que é o potencial  $V_D$ , ou seja o potencial de Dirac. Essa curvatura ocorre no intervalo de  $4\mu$  de distância

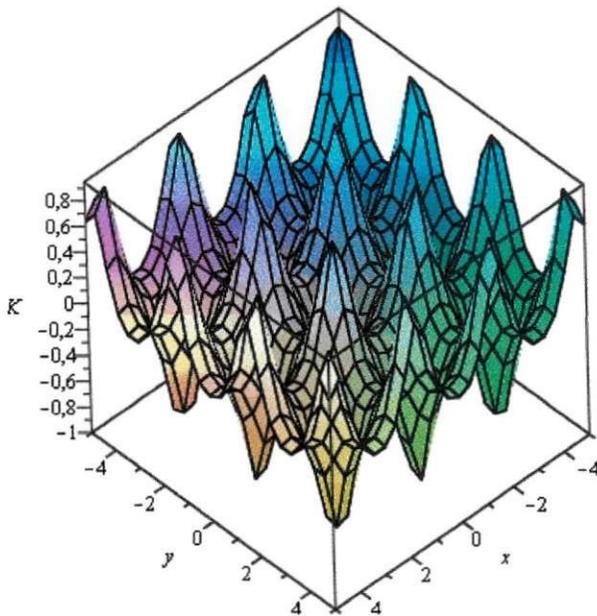


Figura 3.16: Curvatura gaussiana em uma superfície de função  $h = c(\sin(x)\sin(y))$ .

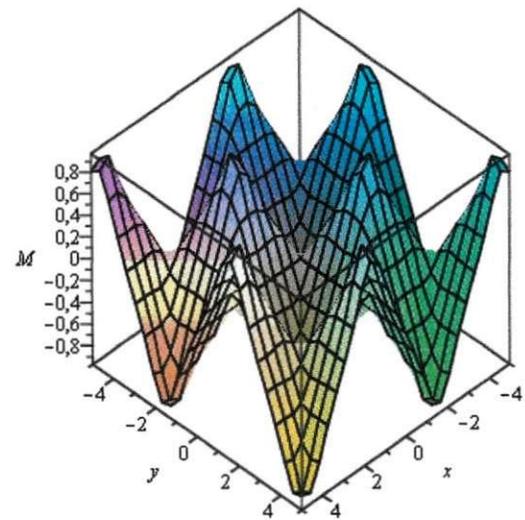


Figura 3.17: Curvatura média em uma superfície de função  $h = c(\sin(x)\sin(y))$ .

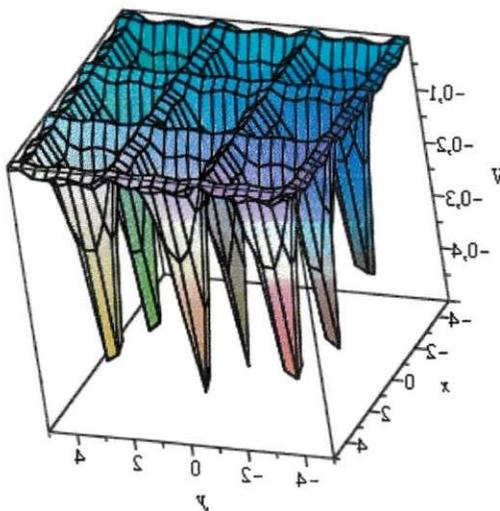


Figura 3.18: Potencial quântico geométrico em uma superfície de função  $h = c(\sin(x)\sin(y))$ .

uma da outra aproximadamente nas direções  $x$  e  $y$  entre estes poços existem quatro que são mais profundos.

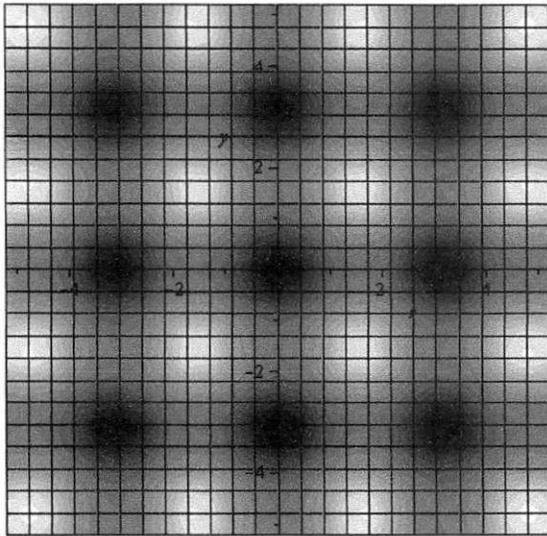


Figura 3.19: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície de função  $h = c(\sin(x)\sin(y))$

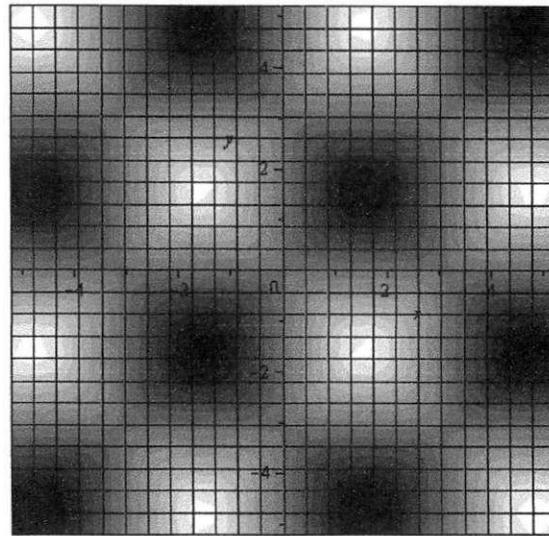


Figura 3.20: Projeção mostrando a curvatura média para a superfície de função  $h = c(\sin(x)\sin(y))$

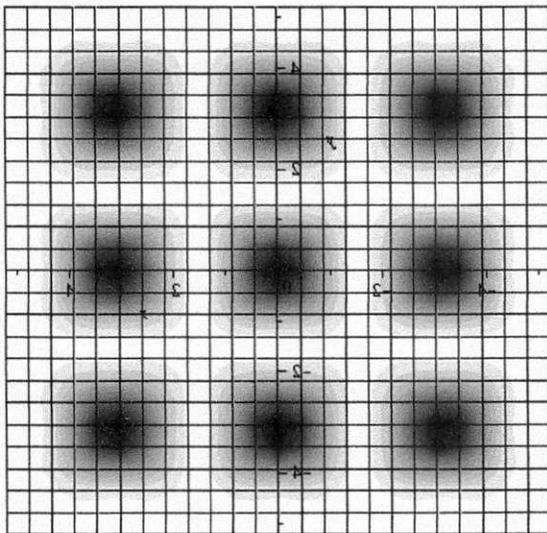


Figura 3.21: Projeção mostrando o potencial geométrico para a superfície de função  $h = c(\sin(x)\sin(y))$

Para ajudar na visualização fizemos a projeção destes gráficos no plano  $xy$ . De acordo com a figura (3.18) mostramos que o potencial geométrico é semelhante à curvatura gaussiana na parte negativa que pode ser melhor visualizada através das figuras (3.19 e 3.21), como **estados ligados** ocorrem apenas para certas energias negativas,

$E < 0$ . Neste caso existe um **espectro discreto** de níveis ou estados de energia, então temos que, conforme mostra estas figuras, a região onde as energias são negativas o movimento é ligado o qual temos uma maior probabilidade de encontrar partículas. Assim, podemos observar que à medida que a energia total negativa diminui, também diminui a área, determinada pelos pontos de retorno, da região onde as partículas podem se mover. Isto provoca um aumento da quantidade de movimento e, por conseguinte, aumenta a energia cinética. Este processo ocorre até que as partículas atinjam um estado estável, provocando assim o confinamento de partículas, onde os pontos escuros apresentados na figura (3.21) é a projeção do potencial que são chamados de pontos quânticos ou poço quânticos. Podemos observar que existem nove poços profundos e alargados que são facilmente identificados por serem bem escuros. Para os valores acima de 0 existem a curvatura gaussiana e curvatura média conforme podemos observar nas figuras (3.16 e 3.17) existe probabilidade de encontrarmos partículas dispersas em pontos claros, conforme podemos melhor visualizar na figura (3.19 e 3.20) que chamamos de estados não-ligados. Para  $E > 0$ , há um **espectro contínuo** de níveis de estados ou energia. A razão disto é que, quando  $E > 0$ , o movimento está limitado apenas a um ponto, de modo que só é necessária uma condição de fronteira. Desta forma o estado não ligado parece com a partícula livre, mas o comprimento de onda não é constante porque a quantidade de movimento da partícula depende da distância a 0. Podemos notar que, neste caso a curvatura gaussiana induz os resultados físicos nas duas teorias, mas a curvatura média também apresenta um efeito significativo.

### 3.3 Superfície Paraboloide Circular $h = c(x^2 + y^2)$

A figura 3.22 mostra a superfície a ser analisada. Para chegarmos às figuras (3.23, 3.24 e 3.25) realizamos os cálculos através das equações

$$\mathbf{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2} \quad (3.3.16)$$

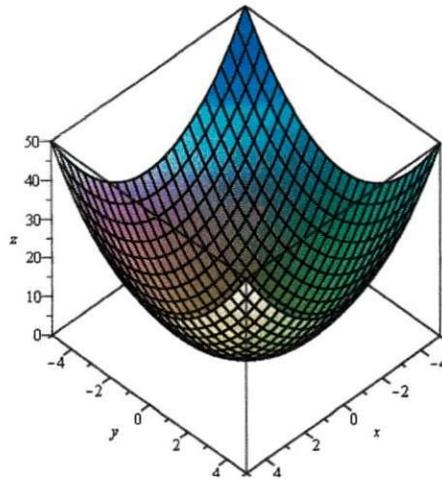


Figura 3.22: Superfície parabolóide circular de função  $h = c(x^2 + y^2)$

$$M = \frac{1}{2} \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.3.17)$$

$$V_S = -\frac{\hbar^2}{2m}(M^2 - K) \quad (3.3.18)$$

que são as equações para calcular , a curvatura gaussiana, a curvatura média, e o potencial geométrico respectivamente. Assim encontramos,

Curvatura Gaussiana

$$K = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} \quad (3.3.19)$$

Curvatura Média

$$M = \frac{1}{2} \frac{4 + 8x^2 + 8y^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.3.20)$$

Potencial Geométrico

$$V = -\frac{1}{8} \frac{(4 + 8x^2 + 8y^2)}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^3} + \frac{2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} \quad (3.3.21)$$

Na figuras (3.23;3.24;3.25) mostramos como se comporta a curvatura gaussiana, a curvatura média e o potencial geométrico respectivamente de uma superfície parabolóide circular. Conforme a figura (3.23) podemos observar que ela possui apenas

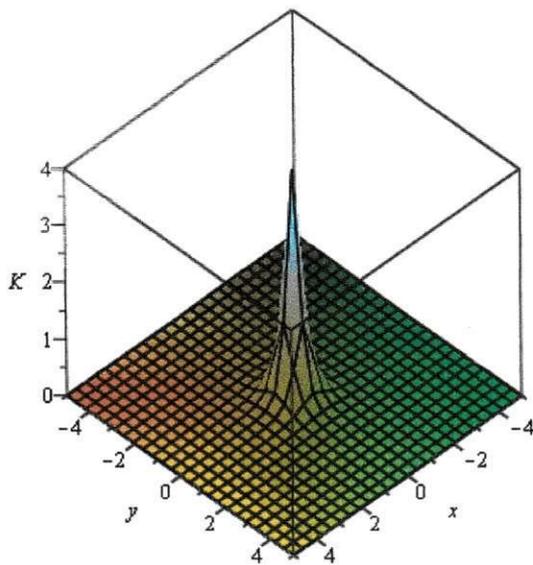


Figura 3.23: curvatura gaussiana em uma superfície parabolóide circular de função  $h = c(x^2 + y^2)$ .

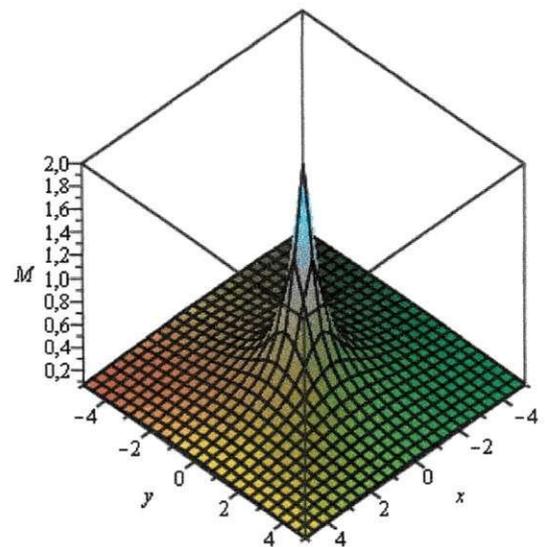


Figura 3.24: Curvatura média em uma superfície parabolóide circular de função  $h = c(x^2 + y^2)$ .

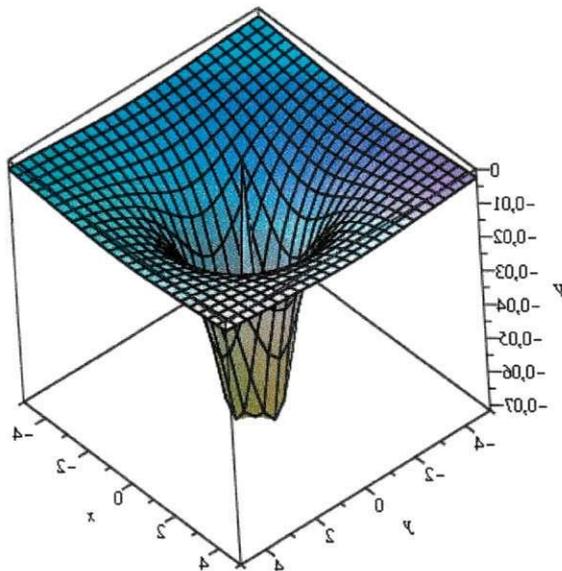


Figura 3.25: Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide circular de função  $h = c(x^2 + y^2)$ .

espalhamento. Nesta região de deformação ocorre um estreitamento muito agudo, que coincide com a curvatura média. Essa curvatura ocorre no intervalo de -2 a 2 apro-

ximadamente nas direções  $x$  e  $y$  para demais variações ela permanece constante com o valor igual a 0.

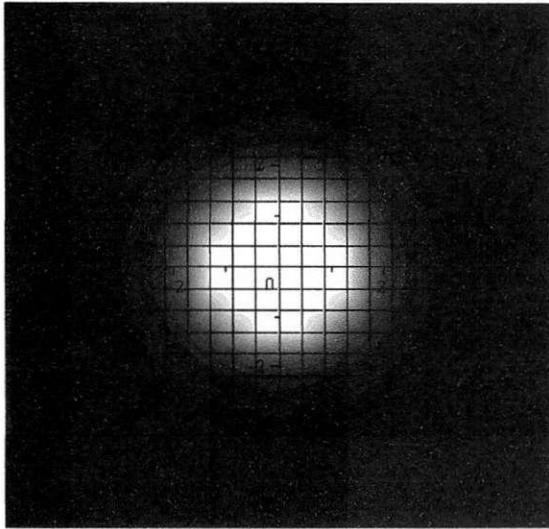


Figura 3.26: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide circular de função  $h = c(x^2 + y^2)$

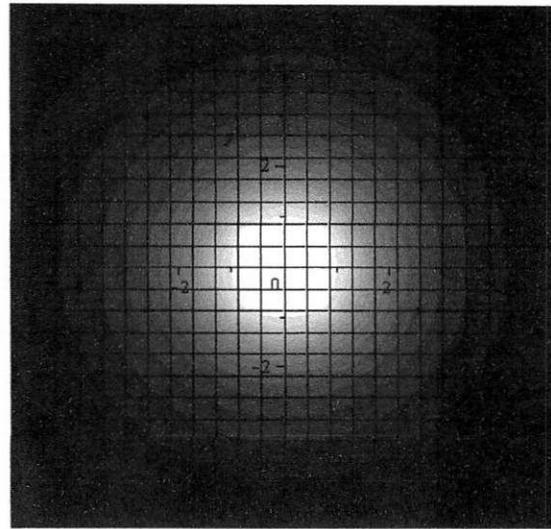


Figura 3.27: Projeção mostrando a curvatura média para a superfície parabolóide circular de função  $h = c(x^2 + y^2)$

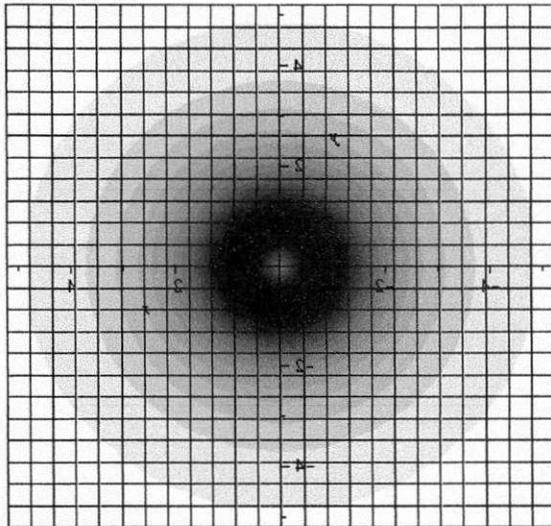


Figura 3.28: Projeção mostrando do potencial geométrico para a superfície parabolóide de função  $h = c(x^2 + y^2)$

Para ajudar na visualização fizemos a projeção destes gráficos no plano  $xy$ . De acordo com a figura (3.25) mostramos que o potencial geométrico não é semelhante à

curvatura gaussiana que pode ser melhor visualizada através das figuras (3.26 e 3.28), como **estados ligados** ocorrem apenas para certas energias negativas,  $E < 0$ . Neste caso existe um **espectro discreto** de níveis ou estados de energia, então temos que, conforme mostra a figura (3.25), a região onde as energias são negativas o movimento é ligado o qual temos uma maior probabilidade de encontrar partículas. Assim, podemos observar que à medida que a energia total negativa diminui, também diminui a área, determinada pelos pontos de retorno, da região onde as partículas podem se mover. Isto provoca um aumento da quantidade de movimento e, por conseguinte, aumenta a energia cinética. Este processo ocorre até que as partículas atinjam um estado estável, provocando assim o confinamento de partículas. Neste caso o confinamento é em forma de anel escuro conforme apresentado na figura (3.28). A projeção do potencial que é chamado de anel quântico quântico. Podemos observar também que este anel é o único local que existe potencial geométrico significativo. Para os valores acima de 0 a curvatura gaussiana e a curvatura média são semelhantes conforme podemos observar nas figuras (3.23 e 3.24) existe uma grande probabilidade de encontrarmos partículas dispersas nas curvaturas gaussiana e média, conforme podemos melhor visualizar nas figuras (3.26 e 3.27) que chamamos de estados não-ligados. Para  $E > 0$ , há um **espectro contínuo** de níveis de estados ou energia. A razão disto é que, quando  $E > 0$ , o movimento está limitado apenas a um ponto, de modo que só é necessária uma condição de fronteira. Desta forma o estado não ligado parece com a partícula livre, mas o comprimento de onda não é constante porque a quantidade de movimento da partícula depende da distância a 0. Podemos notar que as duas teorias prevêem resultados quantitativos e qualitativos diferentes, Pois, a curvatura gaussiana apresenta probabilidade de encontrarmos partículas quando a energia potencial é nula, enquanto o potencial quando sua energia for negativa.

### 3.4 Geometria de uma casca cilíndrica com deslocamento do parafuso

Como é bem conhecido da teoria de defeitos em meio elástico, a geometria efetiva induzida por um deslocamento do parafuso numa amostra cilíndrica é determinado pelo elemento linha,

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + (dz + kd\varphi)^2 \quad (3.4.22)$$

onde o parâmetro  $k$  é a medida da magnitude do defeito e as coordenadas cilíndricas obedece a identificação habitual,  $(\rho, \varphi, z) \sim (\rho, \varphi + 2\pi, z)$ . Quando  $k = 0$  (ausência de defeito).Eq.(3.4.22) simplesmente produz a geometria do espaço euclidiano. O procedimento para criar um deslocamento do parafuso na massa da amostra cilíndrica é composta por um processo de "corte e cola" aproximadamente descrito como se segue. Um corte no cilindro ao longo de um semiplano limitado pelo seu eixo, através de um deslocamento proporcional a  $k$ , e finalmente colados um ao outro. A figura (3.29) ilustra o processo para uma divisão da casca cilíndrica.

#### 3.4.1 Equivalência das Geometrias

Ao observar a eq.(3.4.22) segue-se que a geometria bidimensional de uma casca cilíndrica com deslocamento do parafuso é dada por

$$dl^2 = R^2 d\varphi^2 + (dz + kd\varphi)^2 \quad (3.4.23)$$

, onde o parâmetro  $R$  é o raio da casca e

$$(\varphi, z) \sim (\varphi + 2\pi, z) \quad (3.4.24)$$

Definindo um novo raio e uma coordenada longitudinal como

$$r = \sqrt{R^2 + k^2}, z = \frac{z}{r} \sqrt{r^2 - k^2}, \quad (3.4.25)$$

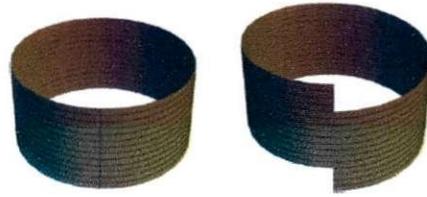


Figura 3.29: Corte e cola, processo para uma divisão de uma casca cilíndrica.

Eq.(3.4.23) torna-se

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{r^2}{r^2 + k^2} dz'^2 + \frac{2kr}{\sqrt{r^2 - k^2}} dz' d\varphi \quad (3.4.26)$$

Para completar, um novo ângulo variável é definido

$$\theta = \varphi + \frac{kz'}{r\sqrt{r^2 - k^2}} \quad (3.4.27)$$

levando a

$$dl^2 = r^2 d\theta^2 + dz'^2 \quad (3.4.28)$$

Notamos que as eqs. (3.4.24 e 3.4.27) produz

$$(\varphi, z) \sim (\varphi + 2\pi, z') \quad (3.4.29)$$

Assim, a geometria nas eqs.(3.4.23 e 3.4.24) é equivalente àquela na eqs. (3.4.28 e 3.4.29)- uma casca cilíndrica de raio  $R$  e desocamento parafuso do parâmetro  $k$  é geometricamente equivalente para uma casca cilíndrica ordinária de raio  $r = (R^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Para visualizarmos melhor essa geometria, vejamos a figura (3.30) que representa um acoplamento entre dois cilindros, onde estes apresentam uma diferença de pontencial de um cilindro para outro. Que são dados por:

$$V_S^1 = -\frac{\hbar^2}{8mR^2} \quad (3.4.30)$$

e

$$V_S^2 = -\frac{\hbar^2}{8m(R+k)^2} \quad (3.4.31)$$

Para este tipo de superfície a curvatura gaussiana ( $K$ ) é nula porque o raio desta tende ao infinito ( $R \rightarrow \infty$ ). Podemos observar conforme gráfico montado acima da figura (3.30) o potencial apresenta-se em forma de um degrau, é chamado de degrau de potencial de diodo.

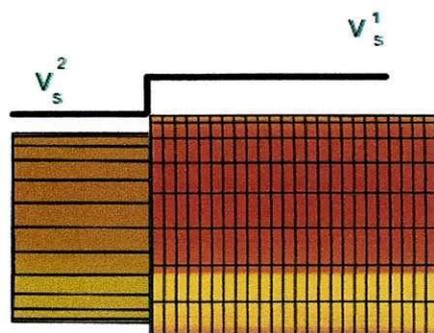


Figura 3.30: Cilindro.

## Capítulo 4

# Potencial Quântico Induzido em superfícies Paralelas

4.1 O modelo de superfície com várias camadas paralelas a uma determinada distâncias uma da outra

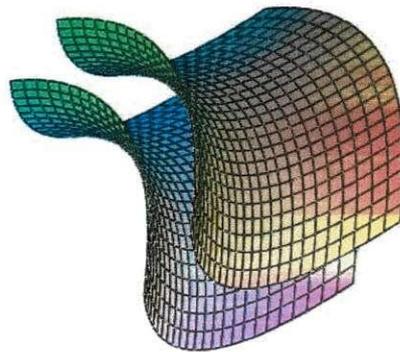


Figura 4.1: Superfície parabolóide hiperbólica paralelas de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

A função da figura (4.2) é dada por

$$\vec{Y} = \vec{X} + a\vec{N} \quad (4.1.1)$$

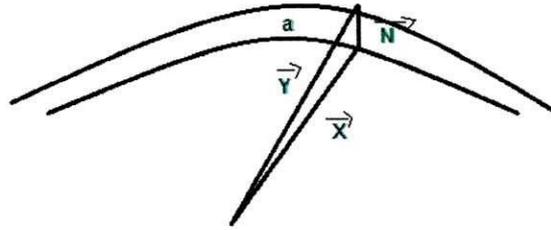


Figura 4.2: Esboço para a base de cálculo das superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

A partir da figura (4.2) montamos a equação (4.1.1) que nos serve de base para montarmos as equações para calcularmos as curvaturas gaussianas e média e o potencial geométrico para superfícies paralelas. Então após alguns cálculos, as equações mencionadas anteriormente ficam,

$$K_y = \frac{K}{1 - 2aM + a^2K} \quad (4.1.2)$$

$$M_y = \frac{M - Ka}{1 - 2aM + a^2K} \quad (4.1.3)$$

$$V_y = -\frac{\hbar^2}{2m}(H_y^2 - K_y) \quad (4.1.4)$$

A figura 4.1 mostra a superfície parabolóide hiperbólica a ser analisada. Para chegarmos às figuras (4.3; 4.4 e 4.5) realizamos os cálculos através das equações (4.1.2, 4.1.3 e 4.1.4) a uma distância,  $a = 0,5\mu$ , entre as superfícies.

Na figuras (4.3;4.4;4.5) mostramos como se comporta a curvatura gaussiana, a curvatura média e o potencial geométrico respectivamente de uma superfície parabolóide hiperbólica com várias camadas. Conforme a figura (4.3) podemos observar que ela possui um poço negativo duplo. Nesta região de deformação ocorre um estreitamento

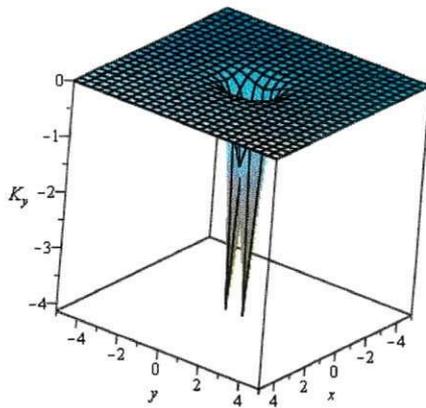


Figura 4.3: Curvatura gaussiana em uma superfície parabolóide hiperbólica com várias camadas de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

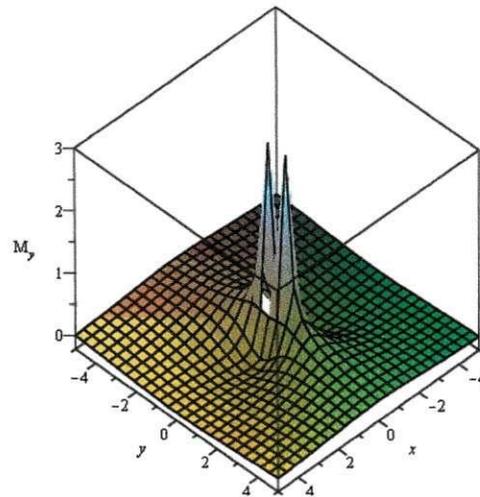


Figura 4.4: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica com várias camadas de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

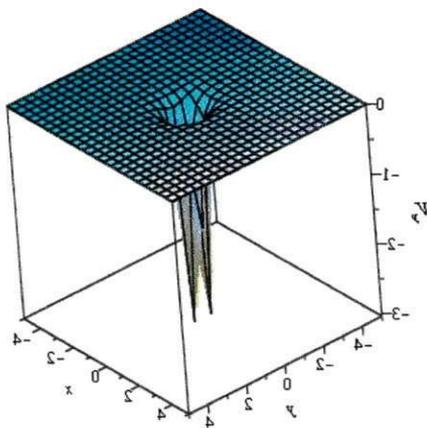


Figura 4.5: Potencial quântico geométrico em uma superfície parabolóide hiperbólica com várias camadas de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

muito agudo, e conseqüentemente ocorre uma queda da energia potencial que também é negativa. Assim podemos notar que a região atrativa coincide com a região da curvatura gaussiana negativa que é o potencial  $V_D$ , ou seja o potencial de Dirac. Essa curvatura ocorre no intervalo de -2 a 2 aproximadamente nas direções x e y para demais variações ela permanece constante com o valor igual a 0. Percebemos que quando

colocamos várias superfícies paralelas houve variação nas curvaturas gaussianas e média no potencial conforme as figuras (4.2; 4.3 e 4.5)

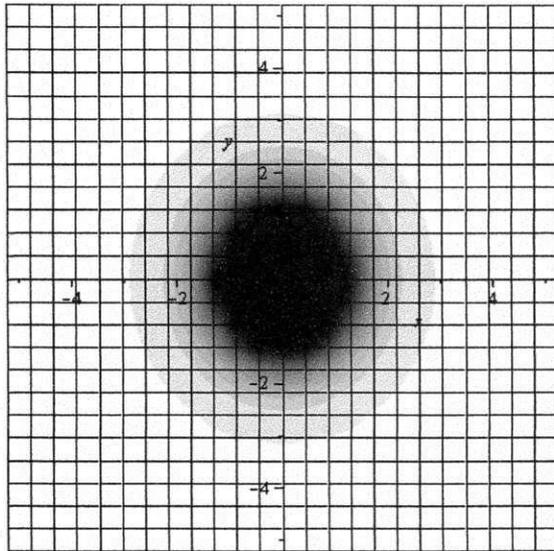


Figura 4.6: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólico de função  $h = c(x^2 - y^2)$ ;

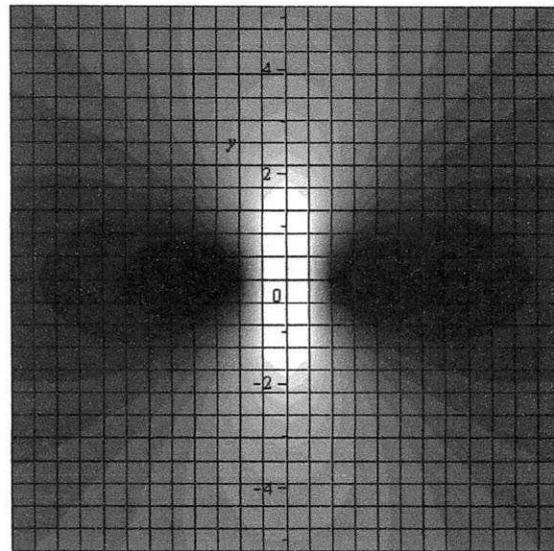


Figura 4.7: Projeção mostrando a curvatura média para a superfície parabolóide hiperbólico de função  $h = c(x^2 - y^2)$

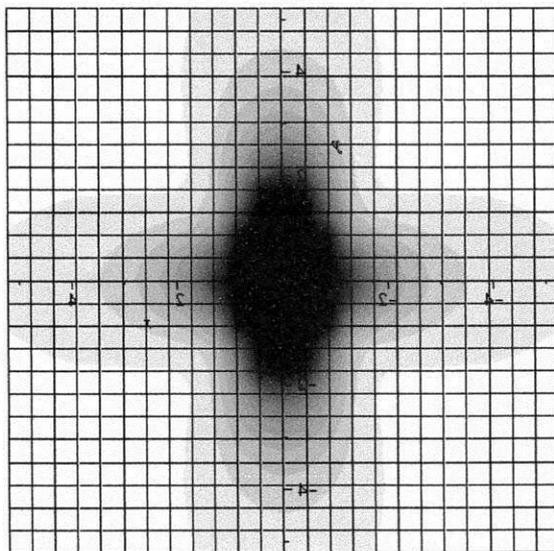


Figura 4.8: Projeção mostrando o potencial geométrico para a superfície parabolóide hiperbólico de função  $h = c(x^2 - y^2)$

Para ajudar na visualização fizemos a projeção destes gráficos no plano  $xy$ . De acordo com a figura (4.5) mostramos que o potencial geométrico e a curvatura gaussiana

mesmo ambos apresentando poços quânticos duplos, possuem uma diferença que pode ser melhor visualizada através das figuras (4.6 e 4.8), como **estados ligados** ocorrem apenas para certas energias negativas,  $E < 0$ . Neste caso existe um **espectro discreto** de níveis ou estados de energia, então temos que, conforme mostra esta figura, a região onde as energias são negativas o movimento é ligado o qual temos uma maior probabilidade de encontrar partículas em ambos os casos. Assim, podemos observar que à medida que a energia total negativa diminui, também diminui a área, determinada pelos pontos de retorno, da região onde as partículas podem se mover. Isto provoca um aumento da quantidade de movimento e, por conseguinte, aumenta a energia cinética. Este processo ocorre até que as partículas atinjam um estado estável, provocando assim o confinamento de partículas, onde este ponto escuro apresentado na figura (4.8) é a projeção do potencial que é chamado de ponto quântico ou poço quântico. Podemos observar também que este ponto é o único local que existe a curvatura gaussiana e potencial geométrico significativos, nos demais pontos a maioria é nulo. Então, para os valores acima de 0 não existem a curvatura gaussiana nem o potencial geométrico, mas conforme podemos observar na figura (4.4) existe uma pequena probabilidade de encontrarmos partículas dispersas em dois pontos, conforme podemos melhor visualizar na figura (4.7) que chamamos de estados não-ligados. Para  $E > 0$ , há um **espectro contínuo** de níveis de estados ou energia. A razão disto é que, quando  $E > 0$ , o movimento está limitado apenas a um ponto, de modo que só é necessária uma condição de fronteira. Desta forma o estado não ligado parece com a partícula livre, mas o comprimento de onda não é constante porque a quantidade de movimento da partícula depende da distância a 0. Podemos notar que, apesar das duas teorias fornecerem resultados quantitativos diferentes e qualitativos, temos a mesma coisa, um poço quântico estreito induzido pela geometria do parabolóide hiperbólico. Mais ainda, percebemos que a física do problema é determinada pela curvatura gaussiana nos dois modelos.

Analisando esta superfície para várias distâncias entre as camadas observamos que a curvatura gaussiana varia de direção de acordo com a distância. Observamos também que existe um valor limite da distância para que o valor da curvatura gaussiana passe do negativo para o positivo e vice versa. Para este tipo de superfície encontramos como valor limite  $0,5\mu$  onde acima deste valor a curvatura gaussiana passa a possuir espalhamento de partículas, ou seja, existe propabilidade de se encontrar partículas na área positiva como podemos observar nas figuras (4.9; 4.10; 4.11; e 4.12) que tem como medidas das distâncias ( $0,53\mu$ ;  $1\mu$ ;  $1,5\mu$ ; e  $2\mu$ ) respectivamente onde podemos observar também que ocorre variações na curvatura gaussiana de acordo com a variação do valor da distância, já para os valores abaixo do valor limite, os poços quânticos sofrem apenas uma variação volta a possuir um poço quântico simples, ou seja, idêntico ao da superfície simples conforme podemos observar nas figuras (4.13; 4.14; 4.15; e 4.16).

Podemos observar esta diferença com a mudança de direção através das figuras das projeções da curvatura gaussiana onde as que estão com a parte central em branco é porque a curvatura está voltada para cima, ou seja existe a probabilidade de espalhamento de partículas, conforme podemos observar nas figuras (4.18 ;4.19 ;4.20), e com a parte central escura é porque a curvatura está voltada para baixo como temos nas figuras (4.21; 4.22; 4.23; e 4.24), mas temos um detalhe a ser observado é que a figura (4.17) não apresenta sua parte central branca porque ela ainda possui uma probabilidade de existir partícula nesta parte, isto é, ainda possui curvatura gaussiana negativa.

Agora analisando a curvatura média podemos observar que ela também sofreu variações quando mudamos os valores da distância entre as camadas acima do valor limite como mostra as figuras (4.25; 4.26; 4.27; e 4.28) e para os valores abaixo deste valor limite ela permanece praticamente estável conforme podemos observar nas figuras (4.29; 4.30; 4.31; e 4.32)

Mas mesmo com todas estas mudanças podemos observar que o potencial geométrico

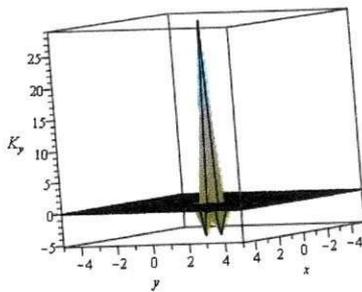


Figura 4.9: Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de  $a = 0,53333\dots$  para função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

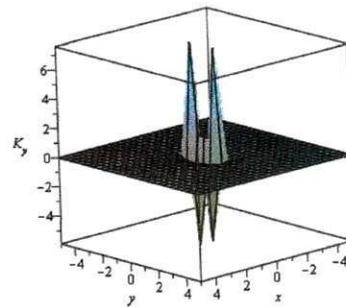


Figura 4.10: Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de  $a = 1$  para função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

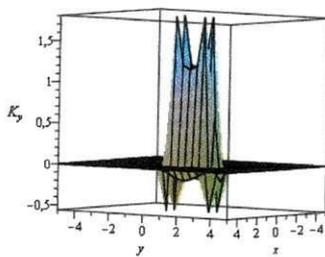


Figura 4.11: Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de  $a = 1,5$  para função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

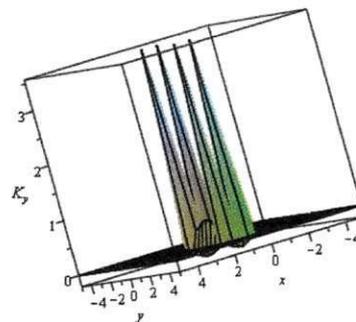


Figura 4.12: Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de  $a = 2$  para função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

permanece o mesmo para todas as distâncias seja abaixo ou acima do valor limite onde ocorre a variação nas curvaturas gaussiana e média. A diferença que existe é em relação à superfície simples e à superfície com o valor limite da distância que possuem um poço quântico simples enquanto que nesta superfície ela possui um poço quântico duplo.

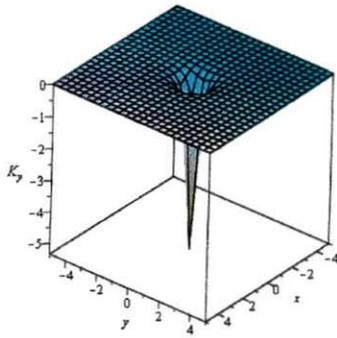


Figura 4.13: Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de  $a = 0,25$  para função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

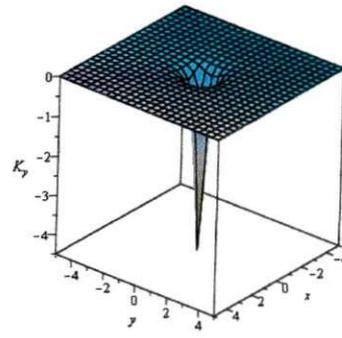


Figura 4.14: Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de  $a = 0,16$  para função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

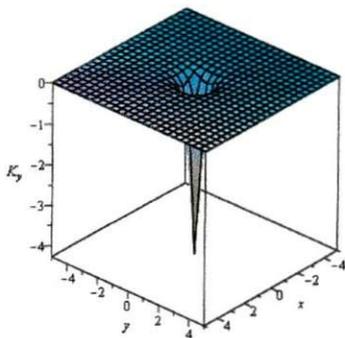


Figura 4.15: Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de  $a = 0,12$  para função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

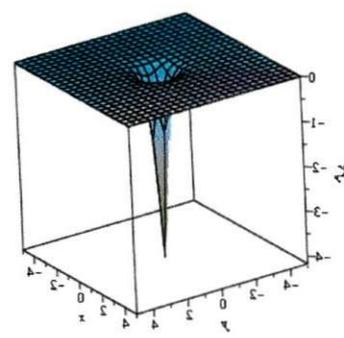


Figura 4.16: Curvatura gaussiana em superfícies paraboloides hiperbólicas paralelas a uma distância de  $a = 0,1$  para função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

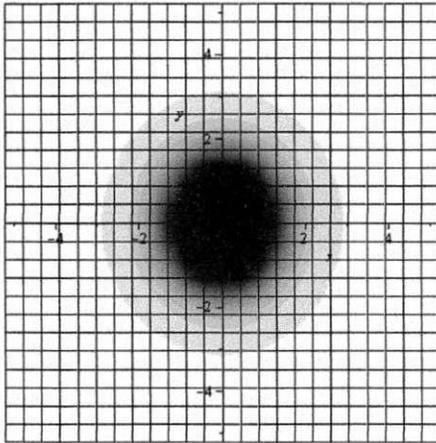


Figura 4.17: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,5333\dots$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$

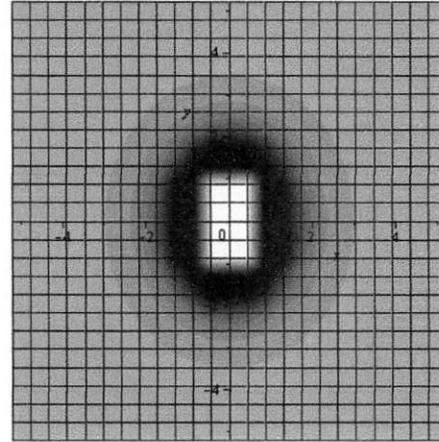


Figura 4.18: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 1$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

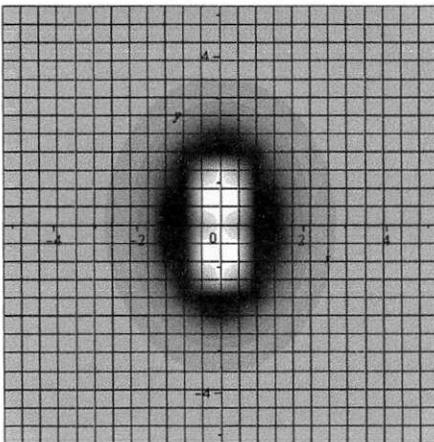


Figura 4.19: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 1,5$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

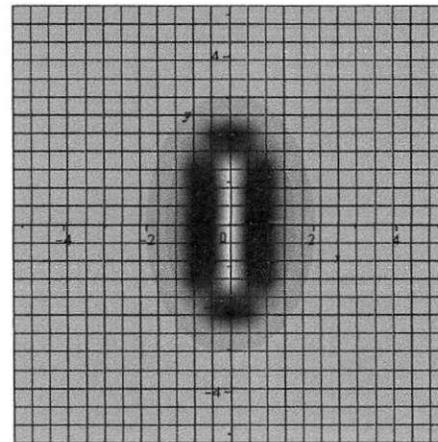


Figura 4.20: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 2$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

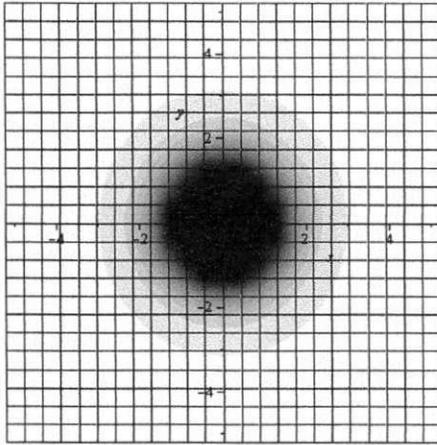


Figura 4.21: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,25$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

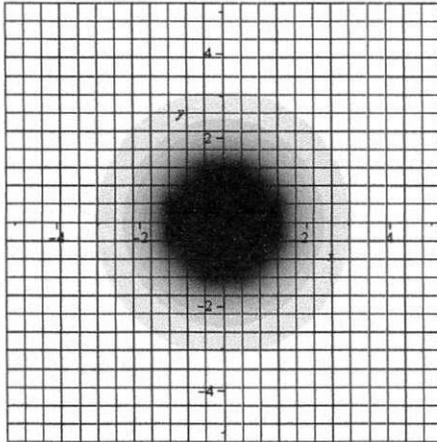


Figura 4.23: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,12$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

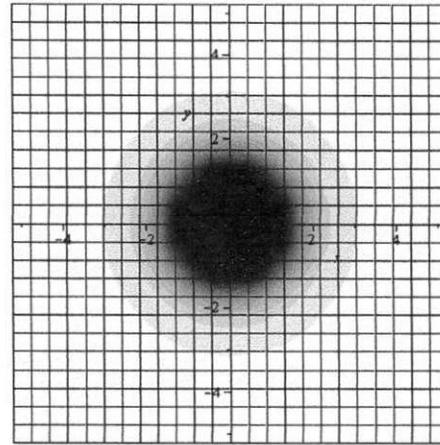


Figura 4.22: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,16$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

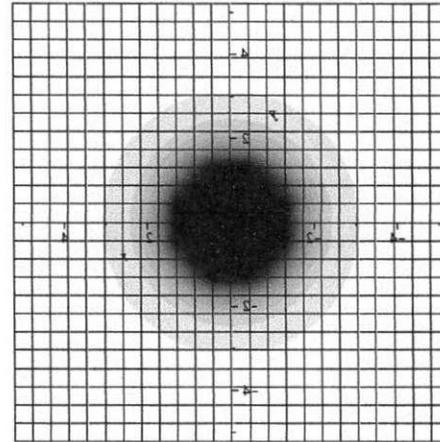


Figura 4.24: Projeção mostrando a curvatura gaussiana para a superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,1$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

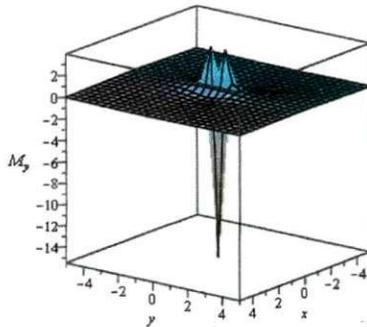


Figura 4.25: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,5333\dots$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

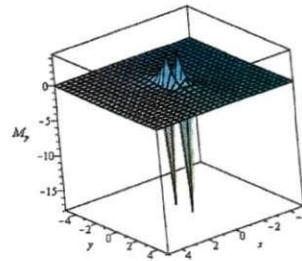


Figura 4.26: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 1$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

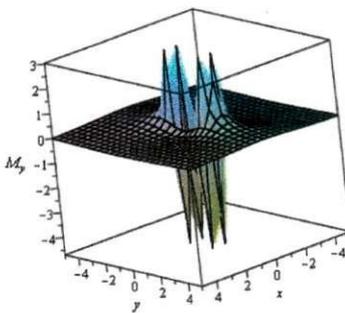


Figura 4.27: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 1,5$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

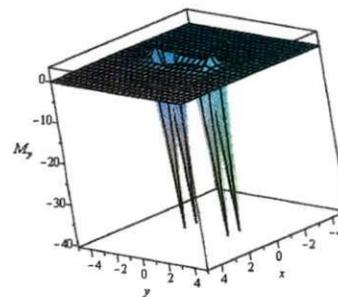


Figura 4.28: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 2$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

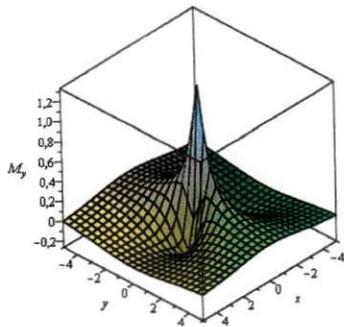


Figura 4.29: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,25$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

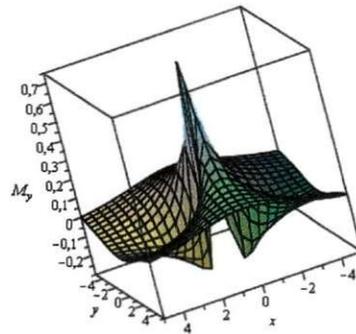


Figura 4.30: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,16$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

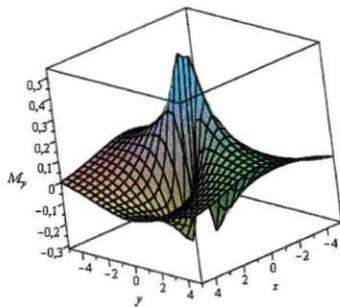


Figura 4.31: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,12$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

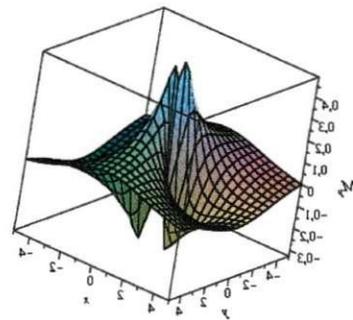


Figura 4.32: Curvatura média em uma superfície parabolóide hiperbólica paralela a uma distância de  $a = 0,1$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

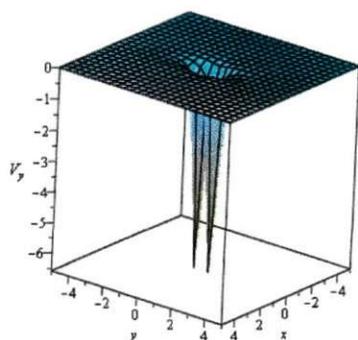


Figura 4.33: Potencial quântico geométrico em uma superfície paraboide hiperbólica paralela a uma distância  $a = 0,5333\dots$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

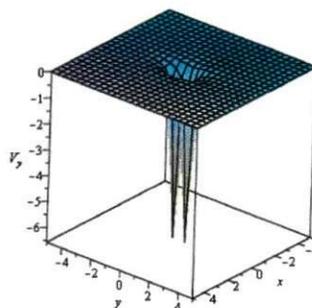


Figura 4.34: Potencial quântico geométrico em uma superfície paraboide hiperbólica paralela a uma distância  $a = 1$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

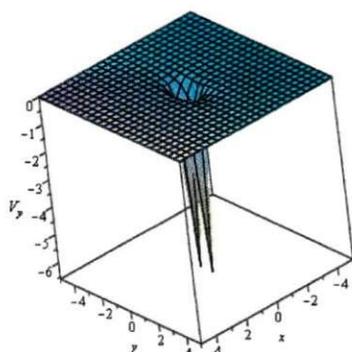


Figura 4.35: Potencial quântico geométrico em uma superfície paraboide hiperbólica paralela a uma distância  $a = 1,5$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

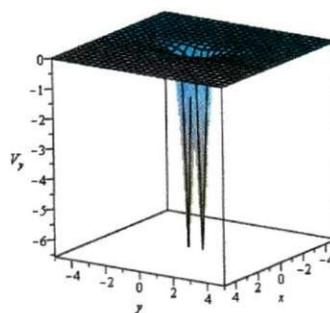


Figura 4.36: Potencial quântico geométrico em uma superfície paraboide hiperbólica paralela a uma distância  $a = 2$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

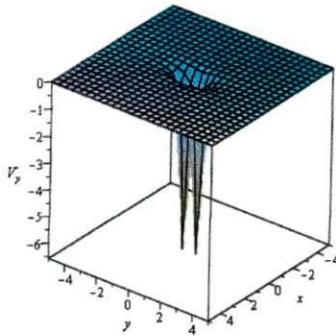


Figura 4.37: Potencial quântico geométrico em uma superfície paraboide hiperbólica paralela a uma distância  $a = 0,25$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

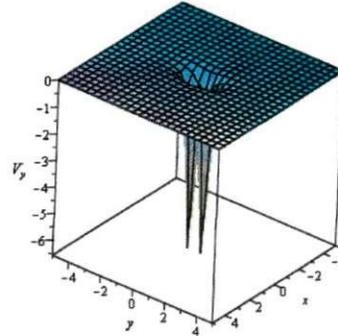


Figura 4.38: Potencial quântico geométrico em uma superfície paraboide hiperbólica paralela a uma distância  $a = 0,16$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

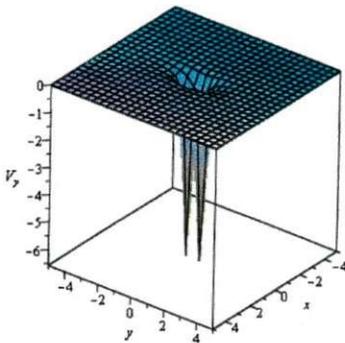


Figura 4.39: Potencial quântico geométrico em uma superfície paraboide hiperbólica paralela a uma distância  $a = 0,12$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

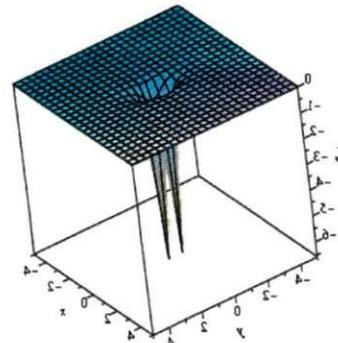


Figura 4.40: Potencial quântico geométrico em uma superfície paraboide hiperbólica paralela a uma distância  $a = 0,1$  de função  $h = c(x^2 - y^2)$ .

## Capítulo 5

### Conclusões

A riqueza que as geometrias trazem para a física é indiscutivelmente benéfica. Estudamos a geometria riemanniana que apesar de ser mais utilizada em outro tipo de análise, precisamos enfatizá-la uma vez que partimos da equação de Dirac em quatro dimensões para chegamos a equações de Schrodinger. Neste conteúdo utilizamos os conhecimentos em derivadas covariantes, transporte paralelo e tensores. No entanto para este trabalho nos prendemos apenas ao conhecimento voltando para duas dimensões. Aplicamos a geometria para encontramos as equações que nos ajudou a identificar como se comporta as curvatura principais, isto é, as curvatura gaussiana e média e o potencial geométrico.

Ao analisarmos a curvatura gaussiana de cada superfície podemos identificar que, para umas superfícies apesar das duas teorias fornecerem resultados quantitativos diferentes e qualitativos, temos a mesma coisa, um poço quântico estreito induzido pela geometria do parabolide hiperbólico. Mais ainda, percebemos que a física do problema é determinada pela curvatura gaussiana nos dois modelos. Para outras superfícies mesmo a curvatura gaussiana induzindo os resultados físico a curvatura média apresenta uma influência significativa. em alguma percebemos que é necessário a combinação entre as curvaturas gaussianas e média.

Ao analisarmos superfícies paralelas percebemos que tanto a curvatura gaussiana como a curvatura média sofrem variações e que o fator determinante destas é a

distância entre as superfícies. Já o potencial apenas aumenta sua área de probabilidade de confinamento de partículas.

No geral podemos dizer que o modelo geométrico pode ou não levar a diferenças significativas.

Estes métodos podem ser aplicados em aprisionamento de partículas quânticas. No caso de elétrons confinados por geometria em semicondutores e bicamadas de grafeno.

umas possuem uma inclinação voltada completamente para baixo, outras possuem voltadas para baixo e para cima e outras voltada completamente para cima. O mesmo ocorre com a curvatura média. Já o potencial geométrico só possui sua inclinação voltada para baixo e que semelhante às inclinações da curvatura gaussiana. É nessa região que podemos encontrar uma maior quantidade de partículas próximas uma das outras e então realizamos o aprisionamento destas partículas.

Analizamos também uma destas superfícies com várias camadas a uma determinada distância e percebemos que não houve variações em relação a suas curvaturas gaussianas e média e o potencial geométrico, mas ao variarmos esta distância identificamos que ao atingir um determinado valor da distância entre as superfícies as curvaturas gaussianas e média mudam de valor, ou seja de direção, já o potencial geométrico apenas aumentou uma inclinação.

## Apêndice A

### Equação de Dirac

A energia relativística é diferente da energia da mecânica newtoniana. Enquanto a energia de uma partícula livre na mecânica newtoniana tem a forma  $E = \frac{p^2}{2m}$ , onde  $p$  e  $m$  são o módulo do momento da partícula e sua massa, respectivamente, na mecânica relativística  $\frac{E^2}{c^2 - p^2} = m^2 c^2$ . Neste último caso,  $m$  é a massa de repouso da partícula e  $c$  a velocidade da luz. Como a mecânica quântica parte das identificações  $E \rightarrow i\hbar\partial_t$  e  $p \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ , onde  $\vec{\nabla} = \hat{i}\partial_x + \hat{j}\partial_y + \hat{k}\partial_z$ , a diferença entre a energia da relatividade e a newtoniana leva naturalmente a teorias quânticas completamente diferentes. Inicialmente usou-se a energia newtoniana e obteve-se:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\nabla^2\varphi}{2m} \quad (\text{A.1})$$

onde  $\varphi$  foi interpretado como sendo uma função associada com probabilidade de encontrarmos a partícula. Pois bem, para obtermos uma versão relativística usamos o mesmo procedimento, sendo que desta vez consideramos a energia  $\frac{E^2}{c^2 - p^2} = m^2 c^2$ . Procedendo desta forma temos,

$$\left(\frac{\partial}{\partial c^2 t^2} - \nabla^2\right)\phi = \square\phi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\phi \quad (\text{A.2})$$

onde  $\phi$ , em princípio, estaria associada a probabilidade de encontrarmos a partícula. Posteriormente, descobriu-se que a associação de  $\phi$  com a probabilidade de encontrarmos a partícula era problemática, pois permitia probabilidades negativas. Durante a

resolução deste problema, Dirac percebeu a necessidade de se tirar a raiz quadrada da energia, ou seja, de expressá-la na forma  $E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ . Todavia, a substituição direta de  $E \rightarrow i\hbar\partial_t$  e  $p \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$  nesta expressão torna-se totalmente inviável, pois o que seria  $i\hbar\partial_t\phi = (\sqrt{m^2c^4 - \hbar^2c^2\nabla^2})\phi$ ? Podemos até pensar em expandir a raiz, mas obteríamos uma série infinita. Este problema foi resolvido adotando-se o procedimento inverso. Ao invés de tirar a raiz e depois aplicar a substituição indicada acima, podemos escrever a energia na seguinte forma bem genérica  $E = c\vec{\alpha}\vec{p} + mc^2\beta$ , onde a natureza de  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  são, em princípio, desconhecidas;  $\vec{p}$  é o momento tridimensional da partícula. Sabemos apenas que  $\vec{\alpha}$  tem pelo menos um caráter vetorial, embora possa ser mais do que isso. Quadrando esta energia, temos

$$\begin{aligned} E^2 &= (c\alpha^i p_i + mc^2\beta) * (c\alpha^j p_j + mc^2\beta) \\ &= c^2\alpha^i * \alpha^j p_i p_j + c^2\alpha^i * (p_i \alpha^j) p_j + mc^3\alpha^i * \beta p_i + mc^3\alpha^i * (p_i \beta) + mc^3\beta\alpha^i p_j + m^2\beta^2 \end{aligned}$$

onde a natureza do produto "\*" é desconhecida, a priori. Comparando esta expressão com  $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ , vemos de imediato que

$$\beta^2 = \beta * \beta = I \equiv \text{identidade}, \quad (\text{A.4})$$

$$mc^3(\alpha^j * \beta + \beta * \alpha^j)p_j + c^2\alpha^i * (p_i \alpha^j)p_j + mc^3\alpha^i * (p_i \beta) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha^i * \alpha^j p_i p_j = p^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha^i * \alpha^j + \alpha^j * \alpha^i) = \delta^{ij}. (\delta^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)) \quad (\text{A.6})$$

Admite-se que, um referencial e em coordenadas cartesianas,  $\beta$  e  $\alpha$  são constantes, logo  $p_i \beta = 0$  e  $p_i \alpha^j = 0$ . Desta forma, a condição se simplifica para

$$\alpha^j * \beta + \beta * \alpha^j = 0 \quad (\text{A.7})$$

Se tomarmos "\*" como uma simples multiplicação, as condições acima levarão a  $\vec{\alpha} = 0$ . Isto sugere que  $\beta$  e  $\alpha$  sejam matrizes e que o produto em questão seja um produto entre matrizes. Perceba que  $\vec{\alpha}$  tem uma natureza matricial e vetorial ao mesmo tempo, ou seja,  $\vec{\alpha} = \alpha^1 \hat{i} + \alpha^2 \hat{j} + \alpha^3 \hat{k}$ , onde  $\alpha^j$  é um conjunto de matrizes.

Agora que já sabemos qual é a natureza de  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$ , façamos a identificação  $E \rightarrow i\hbar\partial_0$  e  $p \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$  na energia  $E = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta$  (note que  $E \equiv EI$ ). Estas identificações levam a expressão da energia ao seguinte operador  $i\hbar(\beta\partial_{ct} + \beta\alpha^i\partial_i) - mc$ . Denotando as funções sobre as quais este operador atua por  $\psi$ , teremos

$$i\hbar(\beta\partial_{ct} + \beta\alpha^i\partial_i)\psi - mc\psi = 0 \quad (\text{A.8})$$

Perceba que, em princípio,  $\psi$  é uma matriz. Com intuito de expressar esta equação em uma forma mais compacta, faz-se as seguintes definições  $\gamma^0$  e  $\gamma^i = \beta\alpha^i$  ( $i=1,2,3$ ), onde as matrizes  $\gamma^\mu$  são conhecidas como matrizes de Dirac. Desta forma, escrevemos  $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi) = 0$  que é conhecida como a equação de Dirac.

## Apêndice B

# Escala de Curvatura e Tensor de Ricci

Sabemos que o tensor de curvatura de Riemann  $\tilde{A}^{\odot}$ ,

$$R_{mij}^b = \frac{\partial \Gamma_{mj}^b}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{mj}^b}{\partial x^j} + \Gamma_{mj}^a \Gamma_{ai}^b - \Gamma_{mi}^a \Gamma_{aj}^b \quad (\text{B.1})$$

Contraindo (asumindo de 0 a 3) o primeiro e o terceiro Índice do tensor de curvatura de Riemann, obtemos

$$R_{mij} = R_{mij}^i = \frac{\partial \Gamma_{mj}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{mi}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{mj}^a \Gamma_{ai}^i - \Gamma_{mi}^a \Gamma_{aj}^i \quad (\text{B.2})$$

Este tensor  $\tilde{A}^{\odot}$  o chamado tensor de Ricci. Como o este  $\tilde{A}^{\odot}$  simetrico  $R_{ij} = R_{ji}$  podemos utilizar a seguinte propriedade

$$R_{ij} = R_{imj}^m = g^{mn} R_{nimj} = g^{mn} R_{mjni} = g^{nm} R_{mjni} = R_{jni}^n = R_{ji} \quad (\text{B.3})$$

Contraindo o tensor, temos

$$g^{ij} R_{ij} = R_i^i = R \quad (\text{B.4})$$

Este  $(R)$   $\tilde{A}^{\odot}$  chamado de escalar de curvatura.

# Bibliografia

- [1] MOFFAT, J. **Phys Rev. D**, 19.3554, 1979.
- [2] CARMO, M. **Projeto Euclides IMPA**, Rio de Janeiro. Second edition 1988.
- [3] BIRRELL, N. D; DAVIES, P. C. W. **Cambridge University Press**, 1982.
- [4] DA COSTA, R. C. **Phys. Rev.. A** 23 (1981) 1982.
- [5] BURGESS, M; JENSEN, B. **Phys.Rev.. A** 48 (1993) 1861
- [6] PACHOS, J. K. **Contemporary Physics** 1. (2008), arXiv:0812.1116v1.
- [7] OGAWA, N; FUJII, K.KOBUSHUKIN, A.**Prog. Theor. Phys.** 83, 894 (1990).
- [8] FERRARI, G. GUOGHI, G.**Phys. Rev. Lett.**, 100, 230403 (2008).
- [9] DO CARMO, M. P. **Prentice Hall**, 1976.
- [10] FILGUEIRAS, C.; OLIVEIRA, B. F. **Annals of Physics(Berlin)** 523, No. 11,898-909(2011)/DOI 10.1002/andp.201000158.
- [11] FILGUEIRAS, C.; MORAIS, F. **Annals of Physics** 323 (2008)3150-3157.
- [12] FERRARI, G.; CUOGHI, G. **Physical Review Letters**PRL 100,230403, 13 june 2008.
- [13] JOGLEKAR,Y. N. **Physical Review B**, 80,153405. 2009.
- [14] LORENCI, V. A.; MOREIRA, E. S. Jr. **Physics Letters A**,376 2281-2282. 2012.

- [15] KRONER, E.; BALIAN, R.; et al. (Eds), Proceedings of the XXXV les Houches Session 1980, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1981.
- [16] KATANAEV, M. O.; VOLOVICH. **Ann. Phys.**, (NY) 216 1992.
- [17] PUNTIGAM, R. A.; SOLENG, H. H. 14,1129. 2001.
- [18] KITTEL, C. **Physical Review**. v. 70, n. 11, p. 965-971, dez. 1946.
- [19] JENSEN, B.; DANDOLOFF, R. **Physics Letters A**. 375 448-451(2011).
- [20] KAMILA, V. R. A.; SILVA, C. F. F.; FILGUEIRAS, C. **The european Physical journal B**.(2013).
- [21] LANDAU, L; LIFCHITZ, E. Curso de Física: Hermus Livraria, distribuidora e Editora. (2004)
- [22] KREYSZIG, E. Dover Publications, Inc. New York. 1991.
- [23] ARFKEN, G. B; WEBER, H. J. Física Matemática . Editora Elsevier. 2007.
- [24] ALONSO, M. Física. editora Addison-Wesley. feveeriro, 1992.
- [25] DANDOLOFF, R.; SAXENA, A.; JENSEN, B. **Physical Review** .A 81. 014102 (2010).
- [26] CIRONE, M. A.; RZAZEWSKI, K.; SCHLEICH, W. P.; STRAUB, F.; WHEELER, J. A. **Physical Review**.A 65 022101 (2001).
- [27] DANDOLOFF, R. **Physical Letters**. A 373, 2667(2009).
- [28] KARCHER, H.; WEI, F. S.; HOFFMAN, D. edited by K. Uhlenbeck **Publish or Perish Press, Houston, TX**.(1993).
- [29] LEKNER, J. **Am. J. Physical** .75. 1151(2007).

- [30] RAZAVY, M. **Physical letters**. A 72, 89 (1979).; **Am. J. Physical**48. 285(1980).
- [31] AOKI, H.; SUEZAWA, H. **Physical Review**. A 46, R1163(1992).
- [32] KIM, J.; VAGNER, I.; SUNDARAM, B. **Physical Review**. b 46,(1992).
- [33] PERFETTO, E.; GONZALEZ, J.; GUINEA, F.; BELLUCCI, S.; ONORATO, P. **Physical Review**. B 76, 125430 (2007).
- [34] DANDOLOFF, R.; SAXENA, A.; JENSEN, B. **Physical Review**. A 81, 014102 (2010).
- [35] ATANASOV, V.; DANDOLOFF, R. **Physical Letters**. A 371, (2009), 118-123.
- [36] JENSEN, H.; KOPPE, H. **Annals of Physics**. 63, 586(1971).
- [37] PERES, N. M. B.; RODRIGUES, J. N.B.; STAUBER, T.; LOPES DOS SANTOS, J. M. R. **Journal Physical: Cond. Matter**.21,(2009) 344202.
- [38] ALHAIDARI, A. D. et al., **arXiv**. 1010.3437.
- [39] BLANTER, M. Y.; MARTIN, I. **Physical Review**. B 76(2007)1555433.
- [40] ORTIX, J.; VAN DEN BRINK, J. **Physical Review**. B 81, (2010) 165419.
- [41] JENSEN, B. **Physical Review**. A 80, (2009) 02210.
- [42] COOK, R. J. **Physical Review**. A 20, 224(1979).
- [43] RAAB, E. L.; PRENTISS, M.; CABLE, A.; CHU, S. and PRITCHARD, D. E. **Physical Review Letters**. 59,2631 (1987).
- [44] METCALF, H.; STRATEN, P. V. **Springer - Verlag, New York**,(1999).
- [45] ANDERSON, M. H.; ENSHER, J. R.; MATTHEWS, M. R.; WIEMAN, C. E.; CORNELL, E. A. **Science**,269, p. 198-201,(1995).

- [46] DAVIS, K. B.; MEWES, M. O.; ANDREWS, M. R.; VAN DRUTEN, N. J.; DURFEE, D. S.; KURN, D. M.; KETTERLE, W. **Physical Review Letters**. 75, n.22, p.3969-73, (1955).
- [47] BRADLEY, C. C.; SACKETT, C. A.; TOLLET, J. J.; HULET, R. G. **Physical Review Letters**. 75, n.9 p. 1687-90, (1995).
- [48] BRADLEY, C. C.; SACKETT, C. A.; TOLLET, J. J.; HULET, R. G. **Physical Review Letters**. 78, n.6 p. 985-9, (1997).