



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**A TERMODINÂMICA DE UM GÁS DE FÓTONS  
SOBRE A VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ  
VIA OPERADORES DE DIMENSÃO-5**

**Eugênio Bastos Maciel**

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**A TERMODINÂMICA DE UM GÁS DE FÓTONS  
SOBRE A VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ  
VIA OPERADORES DE DIMENSÃO-5**

**Eugênio Bastos Maciel**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

M152t Maciel, Eugênio Bastos.  
A termodinâmica de um gás de fótons sobre a violação da simetria de Lorentz via operadores de dimensão-5 / Eugênio Bastos Maciel. – Campina Grande, 2013.  
36 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.  
"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".  
Referências.

1. Eletrodinâmica. 2. Termodinâmica Modificada. 3. Quebra de Simetria - Lorentz. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Título.

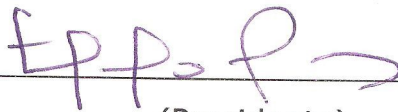
CDU 537.8(043)

**EUGÊNIO BASTOS MACIEL**

**A TERMODINÂMICA DE UM GÁS DE FÓTONS SOBRE A VIOLAÇÃO DA  
SIMETRIA DE LORENTZ VIA OPERADORES DE DIMENSÃO-5**

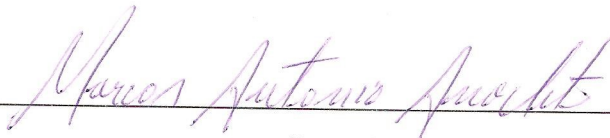
Dissertação aprovada em 26/07/2013

**BANCA EXAMINADORA**



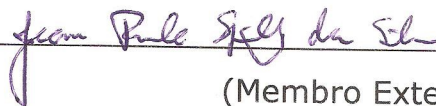
(Presidente)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro Interno)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro Externo)

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva  
Departamento de Física - UEPB

*Dedico esse trabalho aos meu pais, irmãos  
e minha amada esposa Dayanna.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus pelo milagre da vida.

A meus pais Orlando e Zulmira e meus irmãos Temístoclis, Rubenise, Rosemary e Priscila que são a base da minha existência.

A minha esposa Dayanna, esta pessoa especial que encontrei em meu caminho e me fez compreender o conceito do amor e de vida.

Ao professor Eduardo Passos, pelo estímulo, competência e paciência pelo qual me orientou neste trabalho.

A todos os meus colegas de curso, em especial aqueles mais próximos: Chirstian, Danilo, Suzana, Fábio, André e Igor, infelizmente não posso citar todos, mas à todos minha gratidão pelas conversas e incontáveis listas de exercícios que discutimos.

Aos meus amigos fora do curso, que sempre me incentivaram a estudar, entre eles: os casais Terezinha e Zé Filho, José Ramos e Maria José, minha tia Ivanilda, a senhora Maria das Neves de Lima que sempre acreditou nesta conquista, minha madrinha Lúcia a senhora Maria Francinete (em memória) e aos meus amigos do sítio que apostavam em mim: Eduardo, Vandilson, Gildo e Fernando.

Seria impossível não citar estas tres figuras que são como irmãos: Davi Gomes, Luiz Paulo e Danilo Arruda por tudo que me ajudaram.

A CAPES pelo apoio financeiro concedido.

*”Um guerreiro da luz nunca esquece a gratidão, durante a luta ele foi ajudado pelos anjos, as forças celestias colocaram cada coisa em seu lugar e permitiram que ele desse o melhor de sí. Os companheiros comentam: como tem sorte! e o guerreiro consegue muito mais do que a sua capacidade permite, por isso, quando o sol se põe ajoelha-se e agradece o manto protetor a sua volta. Sua gratidão não se limita ao mudo espiritual, ele jamais esquece os amigos pois o sangue deles se misturou ao seu no campo de batalha. O que é um guerreiro da luz? É aquele que é capaz de entender o milagre da vida, lutar até o final por algo em que acredita ”. (Paulo Coelho)*

## RESUMO

Neste trabalho, consideramos a teoria eletromagnética efetiva de Myers-Pospelov formulada por derivadas de altas ordens e campos constantes, constituindo assim, operadores de dimensão-5. A principal característica dessa teoria é a de modificar a relação de dispersão e descrever partículas altamente energética. Essa característica, abre a possibilidade de se estudar novos efeitos oriundos da escala de Planck, e por sua vez, no regime de energia de teorias como a da gravidade quântica. Uma vez que temos modificação na relação de dispersão, isto nos motiva a estudar a dinâmica de um gás de fóton neste contexto. Como resultado, observamos que as principais equações de estado como a entropia clássica do sistema, sofre uma correção logarítmica-linear na temperatura em sua descrição. Tal comportamento, pode estar associado a um estágio anterior ao início da evolução da escala do ultra-violeta (escala de Planck).

**Palavra-chave:** quebra de simetria de lorentz, eletrodinamica estendida, termodinamica modificada.



## ABSTRACT

In this paper, we consider the effective electromagnetic theory formulated by Myers-Pospelov derived from higher orders and constant fields, thus, dimension-5 operators. The main feature of this theory is to modify the dispersion relation and describe highly energetic particles. This feature opens up the possibility to study new effects from the Planck scale, and in turn the system power theories such as quantum gravity. Once we have modified the dispersion relation, this motivates us to study the dynamics of a photon gas in this context. As a result, we observe that the main equations of state as the entropy of the classical system, suffers a correction logarithmic-linear in temperature in your description. Such behavior can be associated with a stage prior to the beginning of the evolution of the scale of the ultra-violet (Planck scale).

**Keywords:** symmetry breaking of lorentz, electrodynamics extended, thermodynamic modified.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 A Dinâmica Eletromagnética com Operadores de Dimensão-5</b>	<b>5</b>
2.1 Eletromagnetismo Usual . . . . .	6
2.2 O Modelo e a Equação de Movimento . . . . .	8
2.3 Os Modos de Propagação dos Fótons . . . . .	10
2.4 O Propagador do Campo Eletromagnético . . . . .	14
<b>3 A Termodinâmica de um Gás de Fótons</b>	<b>16</b>
3.1 A Função de Partição . . . . .	16
<b>4 Propriedades termodinâmicas modificadas</b>	<b>20</b>
4.1 A Densidade de Energia e de Partículas . . . . .	20
4.2 A Pressão e a Entropia . . . . .	23
<b>5 Conclusão</b>	<b>25</b>
<b>A Relatividade e Função de Green</b>	<b>27</b>
A.1 Algumas propriedades do espaço-tempo . . . . .	27
A.2 A Função de Green Transversal . . . . .	28
<b>B Algumas fórmulas úteis</b>	<b>31</b>
B.1 A função $\delta$ de Dirac . . . . .	31
B.2 Identidades . . . . .	31
<b>Bibliografia</b>	<b>33</b>

# Lista de Figuras

- 2.1 Relação de Dispersão (2.3.37) para o caso (b) com  $\vec{n}^2 = 1$ . . . . . 13
- 2.2 Relação de Dispersão (2.3.37) para o caso (c) com  $\vec{n}^2 = 1$  e  $\cos \theta = 1/2$ . 14

# Capítulo 1

## Introdução

Apesar de que a simetria de Lorentz tenha alcançado o status de simetria fundamental da natureza e, sendo por exemplo base do Modelo Padrão da física das partículas fundamentais, estudos recentes questionam se a invariância de tal simetria, seja de fato, uma simetria exata da natureza em todos os regimes de energias. Uma justificativa teórica, é a busca de uma física além da descrita pelo Modelo Padrão. E a experimental, surge com o crescente avanço tecnológico que pode oferecer boas perspectivas de se detectar efeitos oriundos de uma escala de comprimento fundamental que seja incompatível com a simetria de Lorentz. Isto pode justificar possíveis modificações ou até mesmo extensões na física convencional [1, 2].

A moderna teoria quântica de campos já admite a possibilidade da quebra da invariância de Lorentz pelo mecanismo da quebra espontânea de simetrias via a solução de vácuo da teoria. Contudo, o Modelo Padrão não possui dinâmica suficiente para causar a violação espontânea da simetria de Lorentz. Então considera-se que a quebra de simetrias tão fundamentais como a simetria de Lorentz venha a ocorrer em teorias mais fundamentais, tais como Teoria de Cordas, Gravidade Quântica, etc, e a teoria resultante pode ser efetivamente descrita por uma estrutura que seja superior a atual estrutura do Modelo Padrão emergindo da escala de Planck  $\propto 10^{-35}m$ . Esta ideia

levou ao desenvolvimento de uma teoria efetiva conhecida como a Extensão do Modelo Padrão (SME em inglês) proposta por Colladay e Kostelecký na década de 90 [1, 2].

Além disso, a existência de uma escala fundamental tal como a escala de Planck, pode sugerir modificações na descrição da relação de dispersão de partículas altamente energética no mesmo cenário da gravidade da quântica. Este aspecto motivou Robert C. Myers e Maxim Pospelov a proporem uma generalização da SME baseada em operadores de dimensão-5 capazes de conduzir modificações cúbicas nas dinâmicas das partículas escalares, fermiônicas e vetoriais [3]. Além disso, a teoria de Myers-Pospelov impõe um limite de  $\xi < 10^{-15}$  para raios cósmicos ultraenergéticos. Neste caso,  $\xi$  é um coeficiente adimensional associado ao parâmetro tipo-tempo que controla a violação da simetria de Lorentz da teoria [4]. Além disso, a teoria de Myers-pospelov produziu outros limites através de observações cosmológicas [5, 6], radiação ciclotron [7], correções radiativas [8, 9], e testes experimentais [10].

Nesta dissertação, estudamos a teoria da violação da simetria de Lorentz no contexto da eletrodinâmica com um ingrediente a mais, incorporado por operadores de dimensões elevadas. Especificamente, considera-se uma modificação na densidade de Lagrangeana quadrática nos campos de calibre as quais alguns vetores constantes que controlam a violação da simetria de Lorentz são acoplados com operadores derivativos. Esta modificação, é representada pelo operador:  $\mathcal{L}_\gamma \sim (n \cdot \partial)^2 n_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu$  onde  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$  é o usual tensor dual ao tensor intensidade de campo eletromagnético e  $n_\mu$  é um parâmetro constante adimensional. Tal operador é ímpar frente a transformação de *CPT* e par por conjugação de carga. Além disso, a constante de proporcionalidade associada ao presente termo, corresponde ao inverso da massa de Planck  $M_P$ , regime de energia no qual apareceria uma nova física tal como a violação da simetria de Lorentz. Novos estudos tais como a redução dimensional [12] e a abordagem de operadores generalizados [11], também foram propostos para esta

modificação do setor do campo de calibre.

Portanto, podemos concluir que o modelo anisotrópico de Myers-Pospelov abre uma possibilidade de se encontrar novos efeitos oriundos da escala de Planck, principalmente por implementar modificações na relação de dispersão [13]. Tomamos essa característica como principal motivação, e estudamos as propriedades termodinâmicas de um gás de fóton. Neste sentido, verificamos que no regime de energia próximo a energia de Planck, as principais equações de estado como a entropia clássica do sistema, sofre uma correção logarítmica-linear em sua descrição. Recentes trabalhos que envolvem a violação da simetria de Lorentz e propriedades termodinâmicas são frequentes na literatura [14, 15, 17].

Adotando o sistema de unidades naturais o qual  $c = \hbar = 1$  este trabalho está organizado como, no Cap. II, introduzimos o modelo eletromagnético de Myers-Pospelov com um coeficiente constante que determina uma direção preferencial para o sistema. As equações de movimento e a relação de dispersão são obtidas em detalhes. No caso da relação de dispersão encontramos as soluções por frequência associada aos casos os quais o parâmetro constante é puramente tipo-tempo e tipo-espaço, independentemente. No Cap. III, apresentamos uma revisão da termodinâmica de um gás de fótons, onde vamos usar para este estudo, o método da mecânica estatística pelo ensemble grã-canônico e estatística de Bose-Einstein. No Cap. IV, estudamos as modificações nas propriedades termodinâmicas de um gás fótons num cenário onde teremos energias próximas a a escala de Planck. Neste contexto, obtemos a densidade de energia, a densidade de partículas, a pressão da radiação e a entropia. Ambas as equações de estado se apresentam como uma função logarítmica-linear da temperatura. No Cap. V, apresentamos nossas conclusões.

## Capítulo 2

# A Dinâmica Eletromagnética com Operadores de Dimensão-5

Um sistema físico possui simetria, quando é invariante frente a uma dada transformação, sendo assim, quando um sistema físico possui simetria de Lorentz podemos afirmar que é invariante frente as transformações de Lorentz (Rotações e Boosts). A teoria eletromagnética usual se mantém invariante frente a estas transformações de acordo com a teoria da relatividade especial de Einstein. Para especular uma possível violação desta simetria no eletromagnetismo é necessário que se faça uma extensão da teoria usual, onde em nosso contexto, esta extensão ocorre com a introdução de um termo composto por operadores de dimensão-5 na densidade de lagrangeana de Maxwell. Neste sentido, podemos através da equação de Euler-Lagrange observar como a dinâmica do eletromagnetismo se transforma com esta modificação.

Neste capítulo, vamos introduzir, a priori, uma revisão da teoria usual de Maxwell com os seus principais componentes a partir deste ponto estudamos as propriedades clássicas da eletrodinâmica estendida de Myers-Pospelov. Neste sentido, desenvolvemos principalmente as equações de movimento e a estrutura geral da relação de dispersão que governa a propagação das ondas eletromagnéticas.

## 2.1 Eletromagnetismo Usual

Sabemos que as equações de Maxwell descrevem a dinâmica do eletromagnetismo e que as mesmas foram o foco de pesquisas entre o fim do século XIX e o início do século XX, sendo responsáveis por descrever os fenômenos elétricos e magnéticos como sendo de uma mesma natureza. Essas equações podem ser escritas na presença das densidades de carga  $\rho(x, t)$  e corrente  $\vec{j}(x, t)$ , na forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (2.1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1.4)$$

no qual  $\vec{E}(x, t)$  e  $\vec{B}(x, t)$  são os campos elétrico e magnético que satisfazem as equações acima. Já, para  $c = 1$ , as equações de onda desses campos são dadas por:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1.5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1.6)$$

As equações de Maxwell podem ser escritas na forma covariante a partir da densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (2.1.7)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ou ainda na forma matricial:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$



É fácil observar que o tensor  $F_{\mu\nu}$  é antissimétrico

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}, \quad (2.1.9)$$

observa-se também, que quando fixamos  $\mu = 0$  e  $\nu = 0$  e variamos  $\nu$  em 1, 2 e 3, fica claro que:

$$F^{0i} = E^i, \quad (2.1.10)$$

Assim como

$$B_{ij} = \epsilon^{ijk} B^k, \quad (2.1.11)$$

onde o termo  $\epsilon^{ijk}$ , é o conhecido tensor de Levi-Civita, que por sua vez apresenta as seguintes características:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases} \quad (2.1.12)$$

quando os índices forem repetidos o tensor se anula, quando formarem permutações cíclicas ele possui valor 1, e quando for permutação não-cíclica o valor  $-1$ .

A partir da equação de Euler-Lagrange podemos de (2.1.7) encontrar as equações de movimento que são as equações de Maxwell na forma covariante, ou seja, a forma válida para todos os referenciais inerciais

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.1.13)$$

na ausência de fontes, e

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.1.14)$$

na presença de fontes.

Em termos das componentes vetoriais (2.1.7) passa a ser expressa como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho\phi + \vec{j} \cdot \vec{A}. \quad (2.1.15)$$

## 2.2 O Modelo e a Equação de Movimento

Vamos considerar a densidade de lagrangeana eletromagnética de Maxwell na presença de uma corrente  $j^\mu$  e do termo de Myers-Pospelov [3]. Este modelo pode ser escrito a seguir,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + g\varepsilon^{\alpha\mu\lambda\rho}n_\lambda(n \cdot \partial)^2 F_{\rho\alpha}A_\mu. \quad (2.2.16)$$

Os principais objetos desta teoria podem ser descritos como segue:  $F^{\mu\nu}$  é o tensor usual de intensidade de campo eletromagnético [34],  $n_\mu$  é o quadri-vetor constante que determina uma direção privilegiada no espaço-tempo caracterizando a violação da simetria de Lorentz  $\varepsilon^{\alpha\mu\lambda\rho}$  é o símbolo de Levi-Civita totalmente anti-simétrico. E ainda,  $g$  é uma constante com dimensão do inverso de massa por  $g = \frac{\xi}{M_P}$ . Como mencionamos anteriormente,  $\xi$  representa um parâmetro adimensional e  $M_P$  é massa de Planck. Note que a densidade de lagrangeana (2.2.16) deve ser invariante frente a seguinte transformação de calibre:  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$  a menos de uma derivada total.

Os operadores de dimensão-5 tal como o terceiro termo da lagrangiana (2.2.16) podem ser construídos satisfazendo cinco critérios: (a) quadrático no mesmo campo, no caso é o campo de calibre; uma ou mais derivadas além do termo cinético; (b) invariante de calibre, como já foi mencionado acima; (c) invariante de Lorentz, exceto pela natureza do quadri-vetor  $n_\mu$ ; (d) não redutível à operadores de baixas dimensões pela equação de movimento; (e) não redutível a uma derivada total.

É importante mencionar que as condições (b) e (e) garantem que esses operadores conduzem à modificações cúbicas na energia ( $O(E^3)$ ) pela modificação da relação de dispersão. Além disso, mencionamos também que este presente termo possui correspondência direta com o termo tipo o de Chern-Simons de Carrol-Field-Jackiw [18, 19, 20, 21, 22]. Isto pode ser melhor observado usando a notação da Extensão do

Modelo Padrão proposta por Colladay e Kostelecký que usa operadores de dimensões mais baixas[1],

$$\mathcal{L}_{CFJ} = (k_{AF})_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho} F_{\alpha\beta} A_\rho,$$

observe que retomamos o temo de Myers-Pospelov quando fazemos a substituição:

$$(k_{AF}^{(3)})_\mu = -g(n \cdot \partial)^2 n_\mu$$

Neste ponto determinaremos as equações de movimento via a densidade de Lagrangeana (2.2.16). Então associamos este modelo às equações de Euler-Lagrange dada a seguir:

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (2.2.17)$$

e assim, obtemos o seguinte resultado

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + g n_\alpha \varepsilon^{\nu\alpha\lambda\sigma} (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma} = j^\nu. \quad (2.2.18)$$

Logo, esta expressão nos fornece as equações de Maxwell modificadas em termos dos campos elétricos ( $\vec{E}$ ), magnéticos ( $\vec{B}$ ) e das componetes do quadri-vetor  $n_\mu = (n_0, \vec{n})$  que são escritas como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + 2g(n \cdot \partial)^2 (\vec{n} \cdot \vec{B}) = \rho, \quad (2.2.19)$$

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{B} + 2g(n \cdot \partial)^2 (n_0 \vec{B} - (\vec{n} \times \vec{E})) = \vec{j}, \quad (2.2.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2.21)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.2.22)$$

É válido lembrar que os campos elétrico e magnético podem ser expressos em termos do potencial vetor  $A_\mu$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A_0 \quad (2.2.23)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.2.24)$$

Como podemos observar, as modificações ocorrem na lei de Coulumb e lei de Amperè, que possuem fontes, no entanto as equações homogeneas permancem inalteradas. E ainda, a contribuição que viola a simetria de Lorentz, destaca a propriedade de que o campo elétrico funcione como fontes para cargas elétricas e o campo magnético como fonte de correntes magnéticas caso existam na natureza.

Podemos escrever a equação de onda também em função dos campos elétricos e magnéticos. Neste sentido, aplicamos o operador rotacional no lado esquerdo da equação (2.2.22) e obtemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \quad (2.2.25)$$

substituímos na equação (2.2.20), na expressão (2.2.25) com  $\vec{j} = 0$  e com o auxílio de algumas indentidades vetorais, obtemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - 2g(n \cdot \partial)^2 (n_0 \vec{E} - (\vec{n} \times \vec{E})) \right] = 0 \quad (2.2.26)$$

ou, ainda

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - 2g(n \cdot \partial)^2 (n_0(-\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t}(n \times \vec{E})) = 0. \quad (2.2.27)$$

Isto deve resultar em:

$$\square \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + 2g(n \cdot \partial)^2 \left( n_0(\vec{\nabla} \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{n} \times \vec{E}) \right) = 0 \quad (2.2.28)$$

onde  $\square \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  é o operador d'Alembertiano.

## 2.3 Os Modos de Propagação dos Fótons

Nesta seção, determinaremos os modos de propagação das ondas eletromagnéticas sobre o efeito da quebra da simetria de Lorentz. Neste sentido, é necessário reescrever a equação (2.2.18) em termos das derivadas totais na ausencia de fontes externas:

$$(\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu + 2g\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\mu} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 \partial_\lambda) A_\mu = 0. \quad (2.3.29)$$

No gauge de Feynman  $\partial \cdot A = 0$ , resolvemos a equação (2.3.29) para o Ansatz do campo  $A_\mu$ , tipo solução de ondas planas:  $A_\mu(x) = \epsilon_\mu e^{-ikx}$  onde  $k^\mu \equiv (w, \vec{k})$ . Neste caso, obtemos

$$(k^2 \eta^{\mu\nu} + 2gi\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\mu} n_\alpha (n \cdot k)^2 k_\lambda) \epsilon_\mu = 0. \quad (2.3.30)$$

Agora, multiplicamos a expressão acima pelo seu conjugado complexo,

$$(k^2 \eta^{\mu\nu} + 2ig\varepsilon^{\nu\alpha\lambda\mu} n_\alpha (n \cdot k)^2 k_\lambda) (k^2 \eta_{\mu\nu} - 2ig\varepsilon_{\nu\beta\rho\mu} n^\beta (n \cdot k)^2 k^\rho) = 0, \quad (2.3.31)$$

o que resulta na seguinte estrutura geral da relação de dispersão

$$(k^2)^2 - 4g^2 (n \cdot k)^4 ((k \cdot n)^2 - k^2 n^2) = 0. \quad (2.3.32)$$

Esta relação de dispersão admite soluções analíticas e exatas apenas para o caso em que o quadri-vetor constante  $n_\mu$  seja puramente tipo-tempo  $n_\mu = (n_0, \vec{0})$ . Sendo assim, a equação (2.3.32) se reduz a

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 \pm 2gn_0^3 |\vec{k}| \omega^2 = 0. \quad (2.3.33)$$

Esta expressão oferece soluções em termos do vetor onda  $\vec{k}$ . Isto pode ser visto a seguir

$$w_\pm(\vec{k}) = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1 \pm 2\alpha|\vec{k}|}}, \quad (2.3.34)$$

onde  $\alpha = gn_0^3$ . Para pequenos momentos, isto é,  $|\vec{k}| \ll 1/(2\alpha)$ , a aproximação da equação (2.3.34) é dada como

$$w_\pm(\vec{k}) \approx |\vec{k}| \pm \alpha |\vec{k}|^2. \quad (2.3.35)$$

Por outro lado, quando consideramos momentos muito grandes, conseqüentemente a expressão não será mais válida para o caso da frequência  $w_-(\vec{k})$ . Isto acontece pelo fato de que a parte imaginária de tal solução nos levaria a perda da unitariedade e instabilidade nas propagações das ondas. Este fato, implica diretamente numa cut-off

na região do ultravioleta evitando o colapso das soluções. Portanto, a quantização deste modelo deve ser associada a um certo limite superior para a intensidade dos momentos  $|\vec{k}|$  numa região  $|\vec{k}| < |\vec{k}|_{max} = 1/(2\alpha)$ . Este limite será usado para estudar as propriedades termodinâmica do modelo.

Vamos agora restringir nosso estudo para o caso do quadri-vetor tipo espaço  $n = (0, \vec{n})$  nesta situação a relação de dispersão (2.3.32) se resume à:

$$(w^2 - |\vec{k}|^2)^2 - 4g^2(\vec{k} \cdot \vec{n})^4 \left[ (\vec{k} \cdot \vec{n})^2 + (k_0^2 - \vec{k}^2)\vec{n}^2 \right] = 0, \quad (2.3.36)$$

Cuja solução por frequência é dada por:

$$w_{\pm}(\vec{k}) = \left[ \vec{k}^2 + 2g^2\vec{n}^2(\vec{k} \cdot \vec{n})^4 \pm 2g^2|\vec{k} \cdot \vec{n}|^3 \sqrt{1 + g^2\vec{n}^4(\vec{k} \cdot \vec{n})} \right]^{1/2}, \quad (2.3.37)$$

Para pequenos valores de momento temos o valor aproximado:

$$w(\vec{k}) \approx |\vec{k}| - g|\vec{n}|^3 |\cos \theta|^3 |\vec{k}|^2. \quad (2.3.38)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{k}$  e  $\vec{n}$ . Note que esta equação é similar a equação (2.3.35), exceto pelo fato de não ser válida para todo valor de momento. A velocidade de grupo é obtida de forma a satisfazer:

$$v_{g\pm} = \frac{1 + 4g^2|\vec{k}|^2 \cos^4 \theta \pm g|\vec{k}| |\cos \theta|^3 (3 + 4g^2|\vec{k}|^2 \cos^2 \theta) / \sqrt{1 + g^2|\vec{k}|^2 \cos^2 \theta}}{\left( 1 + 2g^2|\vec{k}|^2 \cos^4 \theta \pm 2g|\vec{k}| |\cos \theta|^3 \sqrt{1 + g^2|\vec{k}|^2 \cos^2 \theta} \right)^{1/2}}. \quad (2.3.39)$$

usamos para este resultado a condição de que  $\vec{n}^2 = 1$  característica de vetores tipo-espaço. Podemos analisar três situações distintas para a relação de dispersão (2.3.37):

- (a) Quando os vetores  $\vec{k}$  e  $\vec{n}$  são perpendiculares;
- (b) Quando são paralelos ou anti-paralelos com  $|\cos \theta| = 1$ ;
- (c) Em direções pela qual seja satisfeito a seguinte condição:  $|\cos \theta| < 1$ .

Para situação (a), ou seja,  $\vec{k}$  e  $\vec{n}$  sejam perpendiculares retomamos o caso usual  $w = |\vec{k}|$ , mencionado em [23] como uma direção "blindada" dos efeitos da violação da

simetria de Lorentz. Note que para analisarmos os casos (b) e (c), devemos considerar os gráficos das Figuras (2.3) e (2.3) dadas abaixo. Nestas situações, o momento  $k_- = (w_-, k)$  está fora do cone de luz, ameaçando a estabilidade da nossa teoria. No entanto para pequenos impulsos de momento devemos ter uma região restrita à:

$$\beta < 1 - g|\vec{k}| \cos \theta^3. \quad (2.3.40)$$

que por sua vez, oferece referenciais mais estáveis. Isto inclui um grande número de tais referenciais que possuem velocidades muito próximas ao cone de luz. Por outro lado, quando consideramos momentos muito grandes, temos que a quantidade  $\omega_-$  se aproxima de um valor constante  $w_-(\vec{k}) \approx \frac{1}{2g}$ , para o caso (b), e diverge para  $w_-(\vec{k}) \approx \sin \theta |\vec{k}|$  no caso (c). Em razão disto, a velocidade de grupo se aproxima de um valor  $v_-g(\vec{k}) \approx \sin \theta$ . Conseqüentemente, qualquer impulso (boost) deve apresentar instabilidade nas direções paralelas ou anti-paralelas para altos valores de momentos. Neste sentido, espera-se que tenhamos referências estáveis propagando-se nas direções perpendiculares.

Análise gráfica da solução por frequência  $w$  versus o vetor onda  $\vec{k}$  em cada uma das situações em questão.

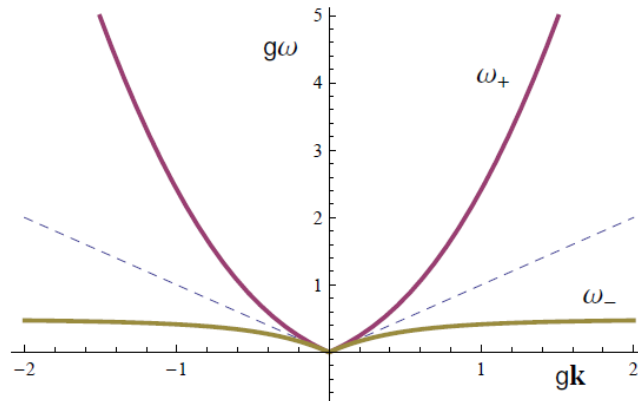


Figura 2.1: Relação de Dispersão (2.3.37) para o caso (b) com  $\vec{n}^2 = 1$ .

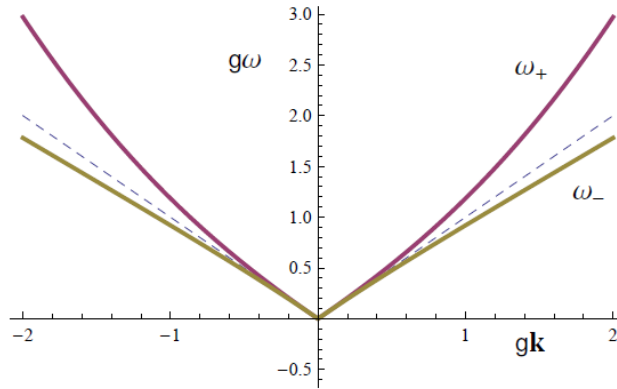


Figura 2.2: Relação de Dispersão (2.3.37) para o caso (c) com  $\vec{n}^2 = 1$  e  $\cos \theta = 1/2$ .

## 2.4 O Propagador do Campo Eletromagnético

Para determinarmos o propagador do campo eletromagnético, é necessário que façamos a introdução de um termo de fixação de calibre<sup>1</sup> na densidade de Lagrangeana (2.2.16), assim teremos que:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{g}{2}n_{\mu}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}A_{\nu}(n \cdot \partial)^2F_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}(\partial^{\mu}A_{\mu})^2, \quad (2.4.41)$$

podemos ainda reescreve-la em termos do módulo de suas derivadas totais:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_{\nu}(\square\eta_{\nu\sigma} - 2gn_{\mu}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}(n \cdot \partial)^2\partial_{\lambda})A_{\sigma} + \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}, \quad (2.4.42)$$

onde o termo  $\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}$  é um termo de superfície, que pode ser desprezado. A quantidade vista abaixo

$$\mathcal{O}_{\nu\sigma}(x) = \eta_{\nu\sigma}\square - 2g\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}n_{\mu}(n \cdot \partial)^2\partial_{\lambda}. \quad (2.4.43)$$

é conhecido como o operador cinético do fóton. Como o propagador é uma função de Green, podemos calculá-lo usando a seguinte identidade

$$\mathcal{O}_{\nu\sigma}(x)\Delta^{\lambda\nu}(x-y) = i\delta_{\sigma}^{\lambda}\delta(x-y), \quad (2.4.44)$$

$$(\eta_{\nu\sigma}\square - 2g\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}n_{\nu}(n \cdot \partial)^2\partial_{\lambda})\Delta^{\lambda\nu}(x-y) = i\delta_{\sigma}^{\lambda}\delta(x-y), \quad (2.4.45)$$

<sup>1</sup>A fixação de Calibre é um termo introduzido para que o propagador seja determinado de forma unívoca.



aplicando uma transformada de Fourier sobre o propagador na forma:

$$\Delta^{\mu\nu}(x-y) = \int (dk) \Delta^{\lambda\nu}(k) e^{ik(x-y)}, \quad (2.4.46)$$

podemos reescrever (2.4.45) no espaço dos momentos

$$\int (dk) e^{ik(x-y)} (-k^2 \eta_{\nu\sigma} + 2ig \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} n_\mu (n \cdot k)^2 k_\lambda) \Delta^{\lambda\nu}(k) = i\delta_\sigma^\lambda \int (dk) e^{ik(x-y)}, \quad (2.4.47)$$

para este resultado foi usado a definição da função delta  $\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int (dk) e^{ik(x-y)}$ , então observando a expressão (2.4.47), as integrais são iguais então os integrandos também o são, encontramos:

$$(-k^2 \eta_{\nu\sigma} + 2ig \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} n_\mu (n \cdot k)^2 k_\lambda) \Delta^{\lambda\nu}(k) = i\delta_\sigma^\lambda, \quad (2.4.48)$$

então tomando o operador inverso de  $\Delta^{\lambda\nu}(k)$  na expressão acima teremos o propagador de Feynmann:

$$\begin{aligned} (\Delta_F(k))_{\lambda\sigma} &= \frac{1}{G} \left[ -k^2 n_{\sigma\lambda} + 2ig(n \cdot k)^2 \epsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda} n^\alpha k^\beta - \right. \\ &\quad \left. 4g^2(n \cdot k)^4 \left( n_\sigma n_\lambda + k_\sigma k_\lambda \left( \frac{n^2}{k^2} \right) - (n_\sigma k_\lambda + n_\lambda k_\sigma) \frac{(n \cdot k)}{k^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

onde

$$G = (k^2)^2 - 4g^2(n \cdot k)^4((k \cdot n)^2 - k^2 n^2), \quad (2.4.50)$$

Para a situação puramente tipo-tempo  $n = n(n_0, 0, 0, 0)$  temos as correções na seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\Delta_F(k))_{\mu\nu} &= \frac{1}{((k^2)^2 - 4gk_0^4 |\vec{k}|)} \left[ -k^2 n_{\mu\nu} + 2igk_0^2 \epsilon^{lmr} k_m n_\mu n_{r\nu} - \right. \\ &\quad \left. \frac{4g^2 k_0^4}{k^2} k_l k_r \delta_\mu^l \delta_\nu^r + \frac{4g^2 k_0^4 |\vec{k}|^2}{k^2} n_{0\mu} n_{0\nu} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

## Capítulo 3

# A Termodinâmica de um Gás de Fótons

Neste capítulo, vamos apresentar uma revisão do método usual da termodinâmica de um gás de fótons, via uma análise da mecânica estatística. Usaremos neste caso o formalismo do ensemble Grã-Canônico, usamos este formalismo por nos proporcionar uma complexidade maior da dinâmica de um sistema termodinâmico.

### 3.1 A Função de Partição

A peça fundamental no desenvolvimento da dinâmica de um sistema termodinâmico via análise estatística é a chamada função de partição [32], uma vez que nos fornece toda informação necessária sobre a evolução do sistema. Esta quantidade pode ser definida na forma:

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_j e^{-\beta(\epsilon_j n_j - \mu N)}, \quad (3.1.1)$$

onde  $\beta = \frac{1}{K_B T}$  e  $K_B$  é a constante de Boltzmann. Uma vez que estamos tratando de um gás de Bósons devemos usar o modelo estatístico de Bose-Einstein, é válido lembrar que estamos no regime quântico, as partículas são indistinguíveis e não interagentes, sendo assim, pelas propriedades de simetria da função de onda um estado quântico do

gás ideal fica inteiramente caracterizado pelo conjunto de números:

$$\{n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\} \equiv \{n_j\}, \quad (3.1.2)$$

onde  $j$  designa o estado quântico de um orbital e  $n_j$  o número de partículas no orbital  $j$ . Observe que para Férmions  $n_j = 0$  ou  $1$ , consequência do princípio da exclusão de Pauli, entretanto, para Bósons  $n_j$  pode variar de  $0$  a  $N$  onde  $N$  é o número total de partículas. A energia do correspondente ao estado quântico  $n_j$  é dada por:

$$En_j = \sum_j \varepsilon_j n_j, \quad (3.1.3)$$

sendo  $\varepsilon_j$  a energia do orbital  $j$ . O número total de partículas é:

$$N = Nn_j = \sum_j n_j. \quad (3.1.4)$$

Sabendo que, no contexto do ensemble grã-canônico não ocorre restrições sobre a conservação do número total de partículas podendo elas variarem de  $0$  a  $\infty$ , é necessário que se faç a presente um novo somatório na expressão (3.1.1), com respeito ao valor total de  $N$ . Neste caso, temos

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \sum_j \{e^{-\beta\varepsilon_1 n_1 - \beta\varepsilon_2 n_2 + \dots}\}. \quad (3.1.5)$$

Ou ainda,

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j e^{-\beta(\varepsilon_1 - \mu)n_1 - \beta(\varepsilon_2 - \mu)n_2 - \dots} \quad (3.1.6)$$

a soma é feita sobre o conjunto de ocupação  $n_1 + n_2 + \dots$  com a restrição de que  $N = n_1 + n_2 + \dots$ , no entanto existe ainda uma outra soma correspondente a todos os valores de  $N$ , assim poderemos realizar uma soma múltipla sobre todos os estados de ocupação, sem qualquer restrição devido a este fato ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(T, V, \mu) &= \left\{ \sum_{n_1} e^{-\beta(\varepsilon_1 - \mu)n_1} \right\} \left\{ \sum_{n_2} e^{-\beta(\varepsilon_2 - \mu)n_2} \right\} \dots \\ &= \prod_j \left\{ \sum_n e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)n} \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

como a soma em  $n$  variando de 0 a  $\infty$ , podemos ainda expressar (3.1.7) da seguinte forma:

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \prod_j \left( \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_j}} \right), \quad (3.1.8)$$

onde o termo  $z = e^{\beta\mu}$  é conhecido como fugacidade do sistema. A expressão (3.1.8) é a famosa função de partição para a estatística de Bose-Einstein e, tomando dela o seu logaritmo natural, vamos obter um resultado que será bastante utilizado na descrição do nosso modelo, principalmente quando fomos expor a conexão com a termodinâmica, assim obtemos:

$$\ln \mathcal{Z}(T, V, \mu) = - \sum_j \ln(-ze^{-\beta\epsilon_j}). \quad (3.1.9)$$

O número total de partículas pode ser expresso pelo número de ocupação  $N = \sum_k n_k$ , onde por sua vez seu valor médio pode ser extraído de

$$\langle n_j \rangle = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_j} \ln \mathcal{Z}, \quad (3.1.10)$$

uma vez que no ensemble grã-canônico as partículas podem flutuar em torno dos valores esperados assim como a energia, então usando a equação (3.1.10) vamos ter o seguinte resultado

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1}. \quad (3.1.11)$$

Por simplicidade de cálculo, expressaremos a função de partição do sistema em termos de uma única partícula, neste caso escrevemos

$$\mathcal{Z}_N = \mathcal{Z}_1^N, \quad (3.1.12)$$

justificando o uso de um sistema constituído de partículas não interagentes. Como estamos no regime de estudo no ensemble grã-canônico a conexão com a termodinâmica é feita através do grande potencial termodinâmico  $\Phi$ , expresso por

$$\Phi = - \sum_j \frac{1}{\beta} N \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_j}). \quad (3.1.13)$$

Então, com base na relação de Euler da termodinâmica

$$\Phi = U - TS - N\mu = -pV, \quad (3.1.14)$$

chegamos á seguinte igualdade:

$$PV = K_B T \ln \mathcal{Z}_N. \quad (3.1.15)$$

que é a equação dos gases ideais no formalismo do ensemble grã canônico.

## Capítulo 4

# Propriedades termodinâmicas modificadas

Neste capítulo, vamos estudar as propriedades termodinâmicas de um gás de fótons modificadas, tomando como base a expressão da energia (2.3.34) obtida via o modelo de Myers-Pospelov. Vamos verificar primeiramente a densidade de energia e de partículas, logo após veremos a pressão e a densidade de entropia.

### 4.1 A Densidade de Energia e de Partículas

A partir da solução por frequência eq.(2.3.34), podemos escrever uma função de partição associada, e assim, obter as quantidades termodinâmicas de interesse:

$$\mathcal{Z} = \prod \left( \frac{1}{1 - ze^{\frac{-\beta|\vec{k}|}{\sqrt{1+2g|\vec{k}|}}}} \right). \quad (4.1.1)$$

Note que estamos considerando a energia fixa de uma única partícula (fóton). Agora, tomando o logaritmo natural da expressão (4.1.1), podemos mostrar o grande potencial termodinâmico sob o seguinte aspecto

$$\Phi = -\frac{1}{\beta} \sum \ln(1 - ze^{\frac{-\beta|\vec{k}|}{\sqrt{1+2g|\vec{k}|}}}). \quad (4.1.2)$$

Nete sentido, a densidade de energia poderá ser obtida fazendo

$$u = \frac{U}{V} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right)_\mu. \quad (4.1.3)$$

Associando as equações (4.1.2) e (4.1.3), obtemos

$$u = \sum \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1 \pm 2\alpha|\vec{k}|}} \frac{e^{\frac{-\beta|\vec{k}|}{\sqrt{1 \pm 2\alpha|\vec{k}|}}}}{1 - z e^{-\beta \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1 \pm 2\alpha|\vec{k}|}}}}. \quad (4.1.4)$$

Por outro lado, a transição do discreto para o contínuo [33], os estados acessíveis de energia para o sistema definem uma região no diagrama de fase chamada de região acessível. Matematicamente esta transição pode ser dada por

$$\sum_k \rightarrow \int dw \quad (4.1.5)$$

onde  $dw = dqdk$ . Então nossa densidade de energia é dada por

$$u = \frac{1}{h^3} \int \int \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1 \pm 2\alpha|\vec{k}|}} \frac{e^{\frac{-\beta|\vec{k}|}{\sqrt{1 \pm 2\alpha|\vec{k}|}}}}{1 - z e^{-\beta \frac{k}{\sqrt{1 \pm 2\alpha k}}}} d^3 q d^3 k. \quad (4.1.6)$$

nesta expressão  $h$  equivale ao volume de uma célula do espaço de fase. Observe que quando integramos nas coordenadas espaciais, elas nos fornece o volume total do espaço onde está contido o gás de fótons, e assim, ficamos apenas com a integral nas coordenadas de momento. Reescrevendo a equação (4.1.6) em coordenadas esféricas, temos

$$u = \frac{4\pi V}{8\pi^3} \int_0^{1/2\alpha} \frac{k^3}{\sqrt{1 \pm 2\alpha k}} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \frac{k}{\sqrt{1 \pm 2\alpha k}}} - 1} dk. \quad (4.1.7)$$

Uma vez que a energia total do sistema não é fixa a priori, não há vínculos entre as variáveis de momento, então elas variam de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Neste caso, podemos então tomar qualquer limite de integração com respeito ao momento. Quando o número de partículas não é conservado ( $\mu = 0$ ), podemos obter pela expressão (4.1.7) uma analogia à radiação do corpo negro. Nesta situação, considerando  $\alpha \rightarrow 0$  recuperamos o caso usual da lei de Stefan-Boltzmann,

$$u \approx \beta^{-4} \approx \sigma T^4. \quad (4.1.8)$$

Por outro lado, quando tomamos o limite de altas temperaturas encontramos o seguinte resultado

$$u \approx \frac{1}{6\pi^2\alpha^3\beta} \approx \frac{K_b T}{6\pi^2\alpha^3}. \quad (4.1.9)$$

Isto nos mostra que neste limite, a densidade de energia é afetada pelo termo  $\alpha$  que viola a simetria de lorentz, neste cenário, temos uma função linear na temperatura. A densidade de partículas é afetada pela quebra da simetria de Lorentz como,

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_\beta. \quad (4.1.10)$$

E através da equação (4.1.2), obtemos

$$n = \sum \frac{1}{h^3} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \frac{k}{\sqrt{1 \pm 2\alpha k}}} - 1}. \quad (4.1.11)$$

E para o caso contínuo ela se apresenta como

$$n = \frac{4\pi V}{8\pi^3} \int_0^{1/2\alpha} \frac{k^2}{z^{-1} e^{\beta \frac{k}{\sqrt{1 \pm 2\alpha k}}} - 1} dk. \quad (4.1.12)$$

Resolvendo a integral na equação (4.1.12), podemos encontrar o valor para densidade de partículas para o limite  $T \rightarrow \infty$ . Isto é dado, como

$$n \approx \frac{K_B T}{5\pi\alpha^2} \left( \sqrt{3} + \frac{1}{6} \right). \quad (4.1.13)$$

Através das expressões (4.1.9) e (4.1.13), é possível ver facilmente que a energia total  $U$  e o número total de partículas  $N$ , são lineares na temperatura,

$$U \approx \frac{K_B T}{6\pi^2\alpha^3} V \quad N \approx \frac{K_B T}{5\pi\alpha^2} \left( \sqrt{3} + \frac{1}{6} \right) V. \quad (4.1.14)$$

Contudo, quando consideramos a energia por partícula podemos encontrar um resultado de bastante interessante que pode ser dado como

$$\epsilon = \frac{U}{N} \approx \frac{5}{6\alpha} \left( \sqrt{3} + \frac{1}{6} \right). \quad (4.1.15)$$

Note que este resultado tem consequências diretas no princípio clássico da equipartição de energia, que afirma que cada termo quadrático da hamiltoniana contribui com



um valor:  $\epsilon = \frac{1}{2}K_B T$  para a energia total do sistema. Sendo assim, no regime das altíssimas energias (energias próximas a energia de Planck) esta expressão não é aplicada. Em outras palavras, o nosso resultado (4.1.15) prever que no instante inicial do surgimento da escalas energéticas, a energia por partícula não seria infinita, e sim, da ordem da escala de Planck, isto é

$$\epsilon \approx \chi M_P \quad (4.1.16)$$

uma vez que o fator não depende da temperatura, onde:  $\chi = \frac{5}{6\xi\eta_0^3}(\sqrt{3} + \frac{1}{6})$ .

## 4.2 A Pressão e a Entropia

A pressão de radiação pode ser obtida pelo uso da expressão (4.1.2) como

$$P = -\frac{\Phi}{V} = \frac{K_B T}{V} \ln(1 - e^{-\beta \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1+2\alpha|\vec{k}|}}}). \quad (4.2.17)$$

Integrando esta expressão pelos os mesmo critérios usados nas quantidades anteriores, encontramos

$$P = \frac{K_B T}{2\pi^2} \int_0^{1/2\alpha} k^2 \ln(1 - e^{-\beta \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1+2\alpha|\vec{k}|}}}). \quad (4.2.18)$$

Então para baixas temperaturas recuperamos o caso clássico proporcional à lei de Stefan-Boltzmann  $P \propto u \cong \sigma T^4$ , enquanto que em altas temperaturas obtemos uma lei logarítmica e linear na temperatura:

$$P \cong \frac{K_B T}{6\pi^2 \alpha^3} \ln(\alpha K_B T). \quad (4.2.19)$$

Através da expressões (4.1.9) e (4.2.19), podemos observar que no regime da violação da simetria de Lorentz o raio da pressão por densidade de energia pode ser em geral uma função da temperatura, como podemos ver

$$R = \frac{P}{u} = \ln(\alpha K_B T). \quad (4.2.20)$$

Note que no mesmo domínio de temperatura, as equações de estado da radiação do corpo negro violando a simetria de Lorentz podem ser aproximadas como

$$P \approx u \ln(6\pi^2 \alpha^4 u) \quad (4.2.21)$$

A densidade de entropia pode ser obtida da seguinte forma

$$s \equiv \frac{S}{V} = \int \frac{\partial u}{\partial T} \frac{dT}{T}. \quad (4.2.22)$$

Resolvendo esta integral vamos obter para o limite de altas temperaturas o seguinte resultado

$$s \approx \frac{K_B}{6\pi^2} \ln(K_B T) \quad (4.2.23)$$

e, para baixas temperaturas temos o caso usual,

$$s \approx \frac{4}{3} \sigma T^3. \quad (4.2.24)$$

Note que, os resultados (4.2.21) e (4.2.23) indicam a possibilidade da existência um estágio de energia anterior ao regime de energia da escala de Planck, o qual pode ser visto como uma correção logaritmica nas equações de estado clássicas do gás. Correções semelhantes, já foram encontradas em vários modelos cosmológicos que envolvem correções quânticas para previsões da relatividade geral [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. Por outro lado, dinâmica pré-Planckiana deste tipo, também foi prevista na literatura via métrica efetiva que viola a simetria de Lorentz [40].

# Capítulo 5

## Conclusão

O principal interesse desta dissertação, é verificar a consistência de teorias efetivas que introduzem operadores de dimensões elevadas, e assim, violando a invariância de Lorentz. Especificamente, estudamos os impactos do termo de Myers-Pospelov sobre algumas características da eletrodinâmica. Este estudo pode ser justificado por meio de testes astrofísicos observacionais que impõe limites intensos para o principal parâmetro desta teoria.

Em resumo, especionamos as equações de movimento e a relação de dispersão covariante para propagação dos fótons num sistema num referencial privilegiado. No caso da cinemática dos fótons, as soluções por frequências associadas aos campos de fundo tipo-tempo e tipo-espaço são obtidas separadamente. E ainda, pela análise assintótica da velocidade de grupo, no caso tipo-espaço, observamos um comportamento superluminal. Este, efeito nos levou a estudar a estrutura microcausal da teoria. Para o caso tipo-tempo, encontramos soluções instáveis diante de certos valores no momento, as quais sugerem a introdução de uma função cut-off. Essa função cut-off tem sido usada para a quantização desse modelo [41, 42]. Verificamos que a teoria efetiva tipo-espaço é estável, causal e seus efeitos microcausais são fortemente suprimidos. Portanto, essa situação é devidamente apropriada para estudos de quantizações. Isto oferece a teoria

de Myers-Pospelov definir novas regras para se procurar efeitos que violam a simetria de Lorentz no regime de Planck. A estrutura do propagador do fóton e da função de Green são também obtidas.

Uma vez que é observada que a teoria efetiva de Myers-Pospelov tipo-tempo pode ser limitada por um cut-off físico, usamos isto como parâmetro para estudar as propriedades termodinâmicas do modelo. Neste sentido, primeiro observamos que na presença da violação da invariância de Lorentz, a radiação do corpo negro obedece as equações de estados de Stefan-Boltzmann apenas para temperaturas muito baixas em relação a energia de Planck. Por outro lado, mostramos que no estágio de energia, anterior a do ultra-violeta (pré-Planckiano), a densidade de energia e a pressão são linearmente proporcionais na temperatura, diferentemente do comportamento clássico  $\sim T^4$ . Como consequência, o raio da pressão-energia e bem como a entropia obedecem uma função logarítmica-linear na temperatura. Estas observações, são os principais resultados da presente dissertação as quais estão sendo preparadas para publicação. Uma extensão imediata desse trabalho, seria a de estudar os impactos da lei logarítmica das equações de estado sobre a inflação cosmológica numa era pré-Planckiana. Em outras palavras, conjecturar como se desenvolveu a entropia antes do Big Bang ou do nascimento da escala de Planck.

# Apêndice A

## Relatividade e Função de Green

### A.1 Algumas propriedades do espaço-tempo

O espaço-tempo de Minkowski descreve os eventos que ocorrem em algum lugar no espaço, e em um certo momento. Podendo então ser caracterizado pela métrica  $g_{\mu\nu}$  com  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ .

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde as coordenadas do quadri vetor espaço-tempo seguem novamente para  $c = 1$  a seguinte notação

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \vec{r}), \quad (\text{A.2})$$

cuja função acontece mediante uma transformação de Lorentz, dada na forma:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{r}) (\text{componentes covariantes}) \quad (\text{A.3})$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = (t, \vec{r}) (\text{componentes contravariantes}) \quad (\text{A.4})$$

Tendo em vista o caráter do tensor métrico, observamos outras propriedades por ele apresentada, tais como:

$$g_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (\text{A.5})$$

onde  $\delta_{\nu}^{\mu}$  é o chamado Delta de Kronecker admitindo os seguintes valores: 1 se  $\mu = \nu$  e 0 para  $\mu \neq \nu$ .

Os quadrivetores diferenciais são expressos por:

$$\partial_{\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\partial^{\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (\text{A.7})$$

é válido lembrar que o operador diferencial d'Alembertiano é um escalar de Lorentz

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \partial_0 - \partial_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (\text{A.8})$$

## A.2 A Função de Green Transversal

A função de Green transversal poderá ser construída baseada numa redução do grau de liberdade correspondente a  $A_0$ , tomando então o divergente em (2.2.23)

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla A_0, \quad (\text{A.9})$$

e igualando à (2.2.19), vamos obter:

$$A_0 = 2g \frac{(n \cdot \partial)^2}{\nabla^2} (\vec{n} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{\nabla^2} \rho, \quad (\text{A.10})$$

substituindo esta expressão na lei de Amperé do nosso modelo, obtemos:

$$\square \vec{A} + 2g \frac{(n \cdot \partial)^2}{\nabla^2} \nabla \left( \vec{n} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \quad (\text{A.11})$$

$$+ 2g(n \cdot \partial)^2 \left( n_0 \nabla \times \vec{A} + \vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) +$$

$$+ 4g^2 \frac{(n \cdot \partial)^2}{\nabla^2} \times \nabla \left( \vec{n} \cdot \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}_T, \quad (\text{A.12})$$

onde  $J_T$  é chamada de corrente transversal

$$J_T = \vec{j} - \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{j})}{\nabla^2} + 2g \frac{(n \cdot \partial)^2}{\nabla^2} \vec{n} \times \nabla_\rho. \quad (\text{A.13})$$

usando a equação de continuidade  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$  é fácil verificar que  $\nabla \cdot \vec{J}_T = 0$ .

Considerando que o campo de gauge seja transversal e usando identidade vetorial adequada em (A.11), vamos obter:

$$\begin{aligned} & \left( \square + 4g^2(n \cdot \partial)^4(\vec{n}^2 - \frac{(n \cdot \nabla)^2}{\nabla^2}) \right) \vec{A} + 2g \frac{(n \cdot \partial)^2}{\nabla^2} \nabla \left( \vec{n} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \\ & + 2g(n \cdot \partial)^2 \left( n_0 \nabla \times \vec{A} + \vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \\ & + 4g^2(n \cdot \partial)^4 \left( \frac{\nabla(\vec{n} \cdot \nabla)}{\nabla^2} - \vec{n} \right) (\vec{n} \cdot \vec{A}) = \vec{J}_T, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Uma vez tomada esta expressão em termo de suas componetes termos como resultado:

$$M_{ij}(\partial_0, \nabla) A^i = J_T^j, \quad (\text{A.15})$$

onde

$$\begin{aligned} M_{ij}(\partial_0, \nabla) A^i &= \left[ \left( \square + 4g^2(n \cdot \partial)^4(\vec{n}^2 - \frac{(n \cdot \nabla)^2}{\nabla^2}) \right) \delta_{ij} \right. \\ &+ 2g(n \cdot \nabla)^2 \left( n_0 \varepsilon^{ilj} \partial_l + \partial_0 \left( \varepsilon^{ilj} n^l + \frac{\partial_i \partial_m}{\nabla^2} \varepsilon^{lmj} n^l \right) \right) + \\ &\left. 4g^2(n \cdot \partial)^4 \left( \frac{\partial_i \partial_l n^l}{\nabla^2} - n^i \right) n^j \right], \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A função de Green transversal retardada pode ser obtida por:

$$G_{jk}(x - y) = T_{jk}(\partial_0, \nabla) D(x - y), \quad (\text{A.17})$$

o tensor  $T_{jk}(\partial_0, \nabla)$  é compreendido como sendo:

$$\begin{aligned} T_{jk}(\partial_0, \nabla) &= \left( \delta_{jk} - \frac{\partial_j \partial_k}{\nabla^2} \right) \square + 2g(n \cdot \partial)^2 \left( n_0 + \frac{(\vec{n} \cdot \nabla)}{\nabla^2} \partial_0 \right) \varepsilon^{jkl} \partial_l \\ &+ 4g^2(n \cdot \partial)^4 \left( n^j + \frac{(\vec{n} \cdot \nabla)}{\nabla^2} \partial_j \right) \left( n^k + \frac{(\vec{n} \cdot \nabla)}{\nabla^2} \partial_k \right), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Sendo a função de Green escalar retardada  $D(x - y)$  definida de modo a satisfazer:

$$\left( \square^2 + 4g^2(n \cdot \partial)^4 \left( (n \cdot \partial)^4 - n^2 \square \right) \right) D(x - y) = 4\pi \delta(x - y), \quad (\text{A.19})$$

Por meio de uma transformada de Fourier podemos te-la na forma integral:

$$D(x - y) = \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int_c d^4k \frac{e^{-ik(x-y)}}{(k^2)^2 - 4g^2(n \cdot k)^4((k \cdot n)^2 - k^2n^2)}. \quad (\text{A.20})$$

onde o contorno da curva  $C$  no plano complexo  $k_0$  define as condições de contorno impostas pela função de Green. Para a função de Green retardada a curva está definida em torno do eixo real denotado por  $C_R$ , a função escalar correspondente controla o comportamento causal da teoria nos deixando aptos para na estudar a sua causalidade.



# Apêndice B

## Algumas fórmulas úteis

### B.1 A função $\delta$ de Dirac

A "função"  $\delta$  de Dirac definida por meio das propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } x \neq 0 \\ \infty; & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (\text{B.2})$$

para qualquer função contínua  $f(x)$ , somente pode ser justificada dentro do contexto da "teoria das distribuições". No entanto de uma maneira heurística podemos utilizar uma série de propriedades da "função"  $\delta$  que decorrem da aplicação das regras usuais do cálculo.

### B.2 Identidades

O símbolo alternando completamente antissimétrico de Levi-Civita satisfaz as seguintes identidades de contração que são bastante utilizadas em teoria quântica de campos:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} = -2(\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\tau}^{\nu} - \delta_{\tau}^{\mu}\delta_{\sigma}^{\nu}) \quad (\text{B.3})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\tau} = -6\delta_{\tau}^{\nu} \quad (\text{B.4})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24 \quad (\text{B.5})$$

# Bibliografia

- [1] COLLADAY, D. e KOSTELECKÝ, V. A., *CPT violation and the standard model*, *Phys. Rev. D* **55**, 6760-6774 (1997).
- [2] COLLADAY, D. e KOSTELECKÝ, V. A., *Lorentz-violating extension of the standard model*, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [3] R. C. MYERS and M. POSPELOV, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003) [arXiv:hep-ph/0301124].
- [4] M. GALAVERNI and G. SIGL, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 021102 (2008).
- [5] L. MACCIONE, S. LIBERATI, A. CELOTTI, and J. G. KIRK, J. COSMOL. ASTROPART. *Phys.* **10**, 013 (2007).
- [6] L. MACCIONE and S. LIBERATI, J. COSMOL. ASTROPART. *Phys.* **08**, 027 (2008).
- [7] R. MONTEMAYOR and L. F. URRUTIA, *Phys. Rev. D* **72**, 045018 (2005); *Phys. Lett. B* **606**, 86 (2005).
- [8] C. M. REYES, L. F. URRUTIA, and J. D. VERGARA, *Phys. Rev. D* **78**, 125011 (2008); C.M. REYES, L. F. URRUTIA, and J. D. VERGARA, *Phys. Lett. B* **675**, 336 (2009).
- [9] T. MARIZ, arXiv:1010.5013.

- [10] B. ALTSCHUL, arXiv:1010.2779.
- [11] V. A. KOSTELECKÝ and M. MEWES, *Astrophys. J.* **689**, L1 (2008); *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009).
- [12] P. HORAVA, *JHEP* 0903, 020 (2009); P. HORAVA, *Phys. rev. D.* **79**, 084008 (2009).
- [13] C. M. REYES, *Phys. Rev. D* **82** , 125036 (2010).
- [14] V. A. KOSTELECKÝ and N. RUSSEL, *Data Tables for Lorentz and CPT Violation*. arXiv:0801.0287 [hep-ph].
- [15] G. AMELINO-CAMELIA, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 35 (2002).
- [16] T. JACOBSON, S. LIBERATI and D. MATTINGLY, *Phys.Rev. D* **67**, 124011 (2003).
- [17] J. MAGEUIJO and L. SMOLIN, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 190403 (2002).
- [18] S. M. CARROL, G. B. FIELD, and R. JACKIW, *Phys. Rev. D***41**, 1231 (1990).
- [19] C. ADAM and F. R. KLINKHAMER, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001).
- [20] A. A. ADRIANOV, P. GIACCONI, and R. SOLDATI, *J. High Energy Phys.* **02**, 030 (2002).
- [21] J. ALFARO, A. A. ADRIANOV, M. CAMBIASO, P. GIACCONI, and R. SOLDATI, *Phys. Lett. B* **639**, 586 (2006).
- [22] T. MARIZ and J. R. NASCIMENTO and E. PASSOS, R. F. RIBEIRO, F. A. BRITO, *J. High Energy Phys.* **0510**, 019 (2005).
- [23] G. GUBITOSE, G. GENOVESE, G. AMELINO and A. CAMELIA MELCHIORRI, *Phys. Rev. D* **82**, 024013 (2010).

- [24] M. JAMIL, A. SHEICHY and M.U. FAROOQ, *Int.J.Mod.Phys. D* **19**, 1831 (2010).
- [25] T. ZHU and J-R. REN, *Eur.Phys.J. C* **62**, 413 (2009).
- [26] M. JAMIL and M.U. FAROOQ, *JCAP* **03**, 001 (2010).
- [27] R. BANERJEE and B.R. MAJHI, *Phys. Lett. B* **662**, 62 (2008).
- [28] R. BANERJEE and B.R. MAJHI, *JHEP* **095** 0806 (2008).
- [29] B.R. MAJHI, *Phys.Rev. D* **79**, 044005 (2009).
- [30] R. BANERJEE and S.K. MODAK, *JHEP* **063**, 0905 (2009).
- [31] S.K. MODAK, *Phys.Lett. B* **671**, 167 (2009).
- [32] SALINAS, SÍLVIO R. A. *Introdução a Física Estatística*. 2<sup>ª</sup> Edição- São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.
- [33] GREINER, WALTER. *Thermodynamics and statistical mechanics*. 1935. 3<sup>ª</sup> Edição: Springer.
- [34] GREINER, WALTER. *Classical electrodynamics*. 1935. 3<sup>ª</sup> Edição: Springer.
- [35] GREINER, WALTER. *Quantum Electrodynamics*.1935. 3<sup>ª</sup> Edição: Springer.
- [36] N.R. BRUNO, G. AMELINO-CAMELIA and J. KOWALSKI-GLICKIMAN, *Phys.Lett. B* **522**, 133, (2001).
- [37] G. AMELINO-CAMELIA, *Phys.Lett. B* **510**, 255 (2001) arXiv:gr-qc/0012051.
- [38] G. AMELINO-CAMELIA and M. ARZANO, arXiv:hep-th/0105120.
- [39] A. BALLESTEROS, F.J.HERRANZ and N.R. BRUNO, e-Print Archive: hep-th/0409295.

- [40] Giovanni Salesi, *Phys.Rev. D* **85** , 063502 (2012).
- [41] C. M. REYES, L. F. URRUTIA, and J. D. VERGARA, *Phys. Rev. D* **78**, 125011 (2008).
- [42] C.M. REYES, L. F. URRUTIA, and J. D. VERGARA, *Phys. Lett. B* **675**, 336 (2009).