



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Luiz Cordeiro de Lima Neto

Buracos Negros Carregados

Campina Grande  
2013



Luiz Cordeiro de Lima Neto

# Buracos Negros Carregados

Dissertação de Mestrado apresentado ao Curso de Pós-graduação em Física, Unidade Acadêmica de Física, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito

Co-orientador: Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos

Examinador: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia

Examinador Externo: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Campina Grande

2013

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG**

L732b Lima Neto, Luiz Cordeiro de.  
Buracos negros carregados / Luiz Cordeiro de Lima Neto. –  
Campina Grande, 2013.  
111 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de  
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, Prof. Dr.  
Luciano Barosi de Lemos".

Referências.

1. Buracos Negros Carregados. 2. Soluções de Reissner-  
Nordström. 3. Equações de Einstein. 4. Efeito Unruh. 5. Efeito  
Hawking. I. Brito, Francisco de Assis. II. Lemos, Luciano Barosi  
de. III. Título.

CDU 524.882(043)



# Buracos Negros Carregados

Luiz Cordeiro de Lima Neto

APROVADA EM 26 DE MARÇO DE 2013.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Orientador

---

Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos  
Universidade Federal de Campina Grande

---

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia  
Universidade Federal de Campina Grande

---

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva  
Universidade Estadual da Paraíba



# *DEDICATÓRIA*

*“...tempo é um tecido invisível em que se pode bordar tudo, uma flor, um pássaro, uma dama, um castelo, um túmulo. Também se pode bordar nada. Nada em cima de invisível é a mais sutil obra deste mundo, e acaso do outro.” (Machado de Assis)*

Dedico esse trabalho a meu adorado filho,  
Benjamin Cordeiro.





# *AGRADECIMENTOS*

Reservo este espaço para agradecer a algumas pessoas que foram fundamentais para a conclusão deste mestrado.

Primeiramente, queria agradecer aos meus familiares, com quem compartilhei muitos momentos de alegria e realizações e também foram o meu principal ponto de apoio para superar as adversidades. Ao meu Pai, que sempre esteve presente em todos os momentos, aos meus irmãos e as minhas irmãs, aos meus avós, as minhas tias e tios, e, especialmente, quero agradecer a minha adorada mãe, que apesar das circunstâncias da vida ter-me privado eternamente de sua companhia, seus ensinamentos sobre caráter, ética e respeito ao próximo foram a maior formação que tive em toda minha vida.

Queria, também, deixar meus sinceros agradecimentos a todo o corpo docente da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande que contribuiu diretamente ou indiretamente para a minha formação. Aos professores que ministraram as disciplinas que cursei, nas quais pude aprender ensinamentos muito além dos livros didáticos, os quais carregarei nos caminhos que percorrerei ao longo da vida. Não esquecendo os funcionários que contribuem efetivamente para o funcionamento desta unidade acadêmica.

Não posso deixar de agradecer aos meus colegas de pós-graduação que contribuíram com um relacionamento produtivo, amigável e extremamente agradável.

Agradeço, especialmente, ao professor Francisco de Assis Brito, que foi além de um exímio orientador acadêmico, um grande amigo. De seus conselhos e ensinamentos recordarei sempre. Ao professor Luciano Barosi de Lemos, que tive a honra de conhecer desde minha graduação, do qual fui orientando desde os primeiros semestres, e que contribuiu significativamente para a conclusão deste mestrado tendo sua parceria como coorientador.

Por fim, agradeço a UFCG e a CAPES pelo suporte financeiro, fundamental para que fosse possível a dedicação inerente aos estudos desta pós-graduação.



# *RESUMO*

Este trabalho apresenta elementos complementares da formação no nível de mestrado em Física. Discutimos, principalmente, aspectos de Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos. De forma detalhada, explanamos a obtenção das soluções de Reissner-Nordström para as equações de Einstein que mostram a dependência dos buracos negros carregados da sua massa e da sua carga. Analisamos, também, os casos onde a massa difere numericamente da carga conhecidos como casos não-extremos, e os casos onde estas grandezas são equivalentes conhecidos como extremos. Discutimos, também, as leis da mecânica dos buracos negros e a inevitável comparação com as leis usuais da Termodinâmica e, conforme foi demonstrado por Hawking, que essas semelhanças são um fenômeno físico explicado pela a mecânica quântica. Ao rever estes estudos, Unruh percebeu que um observador acelerado em um espaço plano mede radiação térmica. Os estudos apresentados nesta dissertação constituem o embasamento necessário para o trabalho em inúmeras áreas de desenvolvimento da Física na atualidade, visto que os buracos negros carregados (em dimensões extras) possuem uma ligação com a teoria das cordas, uma das teorias mais promissoras para a construção da teoria quântica da gravitação.

**Palavras-chave:** Buracos negros carregados; soluções de Reissner-Nordström; equações de Einstein; efeito Unruh; efeito Hawking.



# *ABSTRACT*

This work presents complementary elements of training at the master's degree level in Physics. We discussed, mainly, aspects of General Relativity and Quantum Field Theory. In details we expounded the obtaining of Reissner-Nordström's solutions for Einstein's equations that show the dependence of charged black holes on their mass and charge. We also the cases in which the mass differs numerically from charge, known as non-extreme cases, and cases where these quantities are equivalent, known as extreme. We also discuss the laws of mechanics of black holes and the inevitable comparison with the usual laws of thermodynamics and still, as demonstrated by Hawking, that these similarities are physical phenomena explained by Quantum Mechanics. By reviewing these studies, Unruh realized that an accelerated observer in a flat space measures thermal radiation. The studies presented in this dissertation formed the necessary principles for research in several areas of development of physics nowadays, whereas the charged black holes (in extra dimensions) are connected with the String Theory, one of the most promising theories for construction of the Quantum Theory of Gravitation.

**Keywords:** Charged black holes; Reissner-Nordström solutions; Einstein's equations; Unruh effect; Hawking effect.



# LISTA DE FIGURAS

1	Campo radial eletrostático de uma partícula pontual carregada $Q$ . . . . .	22
2	Esboço das funções $1 + f$ e $1 - f$ . . . . .	35
3	Diagrama das soluções de Reissner-Nordström para $(M >  Q )$ . . . . .	36
4	Diagrama representativo da validade da física clássica, teoria quântica de campos e relatividade geral. . . . .	41
5	Diagrama de Carter-Penrose para a métrica de Reissner-Nordström para o caso $M <  Q $ . Onde a singularidade é nua na origem. . . . .	42
6	Diagrama de Carter-Penrose para a métrica de Reissner-Nordström para o caso $M >  Q $ . . . . .	44
7	Diagrama de Carter-Penrose para a métrica de Reissner-Nordström para o caso $M <  Q $ . . . . .	45
8	Diagrama de Finkelstein para dois buracos negros colidindo. . . . .	55
9	Espaço-tempo de Minkowski em coordenadas de Rindler. A região I é a região acessível por um observador com aceleração constante na direção $x$ positivo. As coordenadas $(\eta, \xi)$ podem ser usadas na região I, ou separadamente na região IV. Os pontos da região I são marcados no sentido oposto da região IV (ou vice-versa). O campo vetorial $\partial_\eta$ correspondem aos geradores da simetria de calibre de Lorentz. O horizonte $H^\pm$ são horizontes de <i>Killing</i> para este campo vetorial, e também, representam as fronteiras do passado e do futuro como visto por um observador de Rindler. . . . .	61
10	Um vetor $V_0$ em um ponto $p$ é transportado paralelamente ao longo das curvas $C$ e $C'$ até um ponto $r$ resultando em um vetor $V_C(r)$ e outro vetor $V_{C'}(r)$ , respectivamente . . . . .	105





# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Buracos Negros de Reissner-Nordström</b>	<b>17</b>
2.1	Soluções de Reissner-Nordström . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Análise da Métrica de Reissner-Nordström</b>	<b>31</b>
3.1	Análise do caso não-extremo . . . . .	32
3.2	Análise do caso extremo . . . . .	37
3.2.1	Extensão para cinco dimensões . . . . .	38
3.2.2	Soluções de múltiplos buracos negros . . . . .	39
3.2.2.1	Gravidade e Teoria Quântica de Campos . . . . .	41
3.3	Diagramas de Penrose . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Termodinâmica dos Buracos Negros de Reissner-Nordström</b>	<b>47</b>
4.1	Gravidade superficial . . . . .	48
4.2	Leis da dinâmica dos buracos negros em comparativo com as leis usuais da termodinâmica . . . . .	51
4.2.1	Lei zero da dinâmica dos buracos negros . . . . .	51
4.2.2	Primeira lei da dinâmica dos buracos negros . . . . .	52
4.2.3	Segunda lei da dinâmica dos buracos negros . . . . .	53
4.2.4	Terceira lei da dinâmica dos buracos negros . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Efeito Unruh</b>	<b>59</b>
5.1	Sistema de coordenadas . . . . .	59

5.2	Quantização do campo escalar . . . . .	62
5.3	Densidade de partículas . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Efeito Hawking</b>	<b>73</b>
6.1	Radiação de Hawking . . . . .	74
6.2	Relação alternativa entre o efeito Unruh e o efeito Hawking . . . . .	79
6.3	Euclidianização da métrica e o cálculo da temperatura . . . . .	80
6.4	Segunda lei da termodinâmica generalizada . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>85</b>
	<b>Referências</b>	<b>87</b>
	<b>Apêndice A - Forma Covariante das Equações de Maxwell no Espaço-tempo Plano</b>	<b>91</b>
	<b>Apêndice B - Cálculos Explanados da Ação de Einstein-Maxwell</b>	<b>97</b>
	<b>Apêndice C - Cálculo Tensorial</b>	<b>101</b>
	<b>Apêndice D - Curvatura</b>	<b>105</b>
	<b>Apêndice E - Álgebra Tensorial</b>	<b>109</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O astrônomo alemão Karl Schwarzschild, no ano de 1916, foi o primeiro a encontrar soluções exatas das considerações de Einstein a respeito da gravidade [1]. Ele conseguiu aplicar a teoria da Relatividade Geral para explicar o comportamento do campo gravitacional de um corpo, relativamente massivo, colapsando. (Podemos imaginar, de forma ilustrativa, uma estrela que por ventura possua uma massa grande a tal ponto que o trabalho realizado pela força gravitacional seja maior que a soma das energias que a estrela produz, justamente, contrabalançando-o [2].) Schwarzschild demonstrou que se a massa de um corpo estiver concentrada em uma região esfericamente simétrica e suficientemente pequena, a ponto do resultado da divisão do valor absoluto da massa pelo raio seja maior do que determinado valor crítico o encurvamento do espaço-tempo será de tal forma que nada que esteja muito próximo a este corpo singular, nem mesmo a luz, será capaz de escapar da sua atração gravitacional. Como nem mesmo a luz pode escapar dessas “*estrelas comprimidas*”, elas foram inicialmente denominadas estrelas escuras, ou frias. Posteriormente, em 1967, o físico americano John Wheeler deu-lhes um nome mais atraente — **buracos negros** (*black holes*) [1, 3]. Negros porque esses objetos não podem emitir luz, e buracos porque qualquer coisa que esteja muito próxima a ele cai dentro dele e nunca mais sai.

O engenheiro e físico, também, alemão Hans Reissner, ainda em 1916, e o engenheiro e físico finlandês Gunnar Nordström no ano de 1918, em trabalhos independentes encontraram as primeiras soluções das equações de Einstein na presença de campos eletromagnéticos [3, 4, 5], este resultado pode ser considerado uma extensão dos resultados obtidos por Schwarzschild. Estas soluções receberam o nome de **soluções de Reissner-Nordström**, e corpos em colapso gravitacional, simetricamente esféricos, e ainda, carregados receberam o nome de **buracos negros carregados** ou **buracos negros de Reissner-Nordström**. A obtenção destas soluções pode ser vista com riqueza de detalhes no capítulo 2.

O matemático inglês, Roger Penrose, usando técnicas matemáticas “poderosas” in-

trodeziu novos métodos na descrição das propriedades dos buracos negros (os detalhes ficam suprimidos nesta dissertação). Ele demonstrou, através da relatividade geral que os buracos negros originados de forma clássica sempre possuem uma singularidade em seu interior. No ano de 1969, Penrose introduziu a chamada “**conjectura da censura cósmica**”, segundo a qual toda singularidade que se forma a partir de um colapso gravitacional fica escondida (ou “censurada”) dentro de um horizonte de eventos [6].

O físico britânico Stephen Hawking iniciou seus estudos (na época em que era estudante de doutorado, no início da década de 60) a partir dos métodos introduzidos por Penrose, mas, foi no ano de 1971 que ele deu sua primeira grande contribuição para a física dos buracos negros, ele demonstrou que objetos dessa natureza não só seriam indestrutíveis, já que nada poderia escapar de sua atração gravitacional, mas também não diminuiriam de tamanho por meio de nenhum processo clássico, aumentando de tamanho a cada porção de matéria que conseguisse abocanhar [3, 7].

No entanto, em 1974, Hawking trouxe a tona uma nova discussão ao meio da comunidade científica, ele demonstrou matematicamente que um “buraco negro” na verdade não seria tão “negro” assim como pensava-se [7]. Isso porque, até então em todos os cálculos feitos haviam levado em consideração apenas a Relatividade Geral, entretanto, quando aplica-se a Mecânica Quântica as coisas tornam-se um tanto quanto “surpreendentes”. O fato é que, através da Teoria Quântica de Campos, Hawking chegou à conclusão de que observadores distantes perceberiam um fluxo de partículas elementares provenientes do buraco negro — com temperatura bem definida. Essas partículas adquiririam massa retirando energia do próprio buraco negro, que, como consequência, evaporaria [6, 8]. Desta forma, eles não seriam tão indestrutíveis como o próprio Hawking, assim como os estudiosos do tema, acreditavam a princípio.

Ao rever os estudos de Hawking o físico canadense William Unruh acabou descobrindo um novo efeito, que recebeu o seu nome, **efeito Unruh**. Ele afirma que observadores acelerados em espaços planos detectam partículas, que seriam **partículas virtuais** para observadores inerciais, como sendo **partículas reais** [7]. Esse efeito está detalhado no capítulo 5.

O fato de buracos negros possuírem temperatura sugere que eles também tenham outras propriedades termodinâmicas. Entretanto, Hawking não foi o primeiro a propor isto. O físico israelense Jacob Bekenstein, inspirado nas quatro leis mecânicas dos buracos negros, enunciadas em 1973 por James Bardeen, pelo físico australiano Brandon Carter, além do próprio Hawking, já havia associado uma entropia aos buracos negros. Toda-

via, Bekenstein não dispunha de um embasamento matemático mais preciso. Ele apenas observou a semelhança estrutural entre as leis da termodinâmica e as leis citadas acima. Pela propositura de Bekenstein, tal entropia seria proporcional à área do horizonte de eventos [7], o que veio a se confirmar mais tarde por meio dos estudos de Hawking. A semelhança matemática entre a termodinâmica e os buracos negros está contemplada no capítulo 4.

De acordo com a Teoria Quântica de Campos, pares de partículas e antipartículas virtuais são constantemente criados e imediatamente aniquilados no vácuo. Perto do horizonte, devido à atração gravitacional, uma das partículas do par pode ser capturada pelo buraco negro enquanto a outra escapa para o infinito, constituindo a **radiação de Hawking**. A energia contida nessa radiação é retirada do campo gravitacional do buraco negro, o que se traduz em uma diminuição da sua massa e, conseqüentemente, de seu raio [3, 6, 7, 8].

Este fenômeno recebeu a denominação de **efeito Hawking**. A seção 6.1 contém uma descrição matemática desse efeito.

Existe um raio a partir do qual a teoria da relatividade geral deixa de valer, tornando necessária a construção de uma teoria quântica da gravitação para que seja possível a previsão do que acontece nessa situação extrema. Conforme sabemos, essa teoria ainda não foi devidamente construída, levando grupos de teóricos de todas as partes do mundo a esse propósito. Uma teoria bastante promissora é a Teoria das Cordas, tornando-se uma das principais teorias que se dispõe a intermediar o “mundo” clássico e o quântico, e a esse respeito, o físico argentino Juan Maldacena percebeu que branas possuem características semelhantes aos buracos negros carregados em dimensões estendidas [9], justificando a relevância dos estudos contidos nesta dissertação.



## 2 *BURACOS NEGROS DE REISSNER-NORDSTRÖM*

Um ano após o físico alemão Albert Einstein formular a Teoria da Relatividade Geral surgiu a primeira indicativa da existência de buracos negros. No ano de 1916 o então oficial do exercito alemão, Karl Schwarzschild, obteve soluções das equações de Einstein para o vácuo com simetria esférica. Pouco depois ele acabou morrendo no front russo, deixando como feito o achado das primeiras soluções exatas das equações de Einstein, que em sua homenagem receberam o nome de “**soluções de Schwarzschild**” [3]. **Os buracos negros de Schwarzschild** possuem duas características principais: são estáticos e simetricamente esféricos [10].

Ainda em 1916 o engenheiro e físico, também alemão, Hans Reissner conseguiu as primeiras soluções das equações de Einstein na presença de campos eletromagnéticos. Pouco depois, em 1918 o engenheiro e físico finlandês Gunnar Nordström, de forma totalmente independente, encontrou as mesmas soluções [6]. Em homenagem a eles, estas soluções foram nomeadas de **soluções de Reissner-Nordström**.

Durante muito tempo estas soluções não foram devidamente compreendidas, foi apenas no ano de 1960 que ficou claro para os pesquisadores da área que as soluções de Schwarzschild descrevem buracos negros estáticos descarregados e que as soluções de Reissner-Nordström generalizam as soluções de Schwarzschild, contemplando a adição de cargas elétricas ao objeto. Isso graças aos trabalhos do físico-matemático americano Martin Kruskal e de outros dois físicos, o americano John Graves e o alemão Dieter Brill [3].

Na literatura, os buracos negros simetricamente esféricos, estáticos e com carga elétrica são chamados de **buracos negros de Reissner-Nordström** ou **buracos negros carregados**.



## 2.1 SOLUÇÕES DE REISSNER-NORDSTRÖM

A presente seção contempla as soluções de Reissner-Nordström. Elas serão encontradas gradativamente ao longo do texto. Vale a pena frisar que o sistema de unidades de medidas adotado será um sistema no qual a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo  $c$  e a constante gravitacional de Newton  $G$  em quatro dimensões são iguais a 1.

Partiremos, então, da **ação de Einstein-Maxwell** [10]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}], \quad (2.1)$$

onde

$$\mu = 0, 1, 2, 3.$$

Esta ação (2.1) é exatamente a junção da **ação de Einstein-Hilbert** [11] (a primeira integral) com a **ação de Maxwell** no espaço-tempo curvo sem o termo da fonte (a segunda integral).

Será através da ação de Einstein-Hilbert que obteremos as equações que carregam a descrição do campo gravitacional, tal como propôs Einstein. Por meio da segunda integral obteremos as equações da eletrodinâmica de uma partícula carregada em um campo gravitacional. Podemos ver no Apêndice A que as equações de Maxwell são equações covariantes.

Para encontrarmos as equações de movimento de Einstein, ou simplesmente **equações de Einstein**, aplicaremos o método denominado de *princípio de mínima ação* ( $\delta = \delta/(\delta g^{\mu\nu})$ ) na ação (2.1) da forma [12, 13, 14, 15]:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta \{ \sqrt{-g} [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \} \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \{ (\delta \sqrt{-g}) [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \sqrt{-g} (\delta [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]) \} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donde encontramos que<sup>1</sup>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Note que o primeiro termo desta equação (2.3) pode ser identificado como o **tensor**

---

<sup>1</sup>Estes cálculos, em específico, podem ser vistos de forma relativamente detalhada no Apêndice B.

de Einstein  $G_{\mu\nu}$  [16], ou seja:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.4)$$

Que é diretamente proporcional ao tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$  da forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Com isso, imediatamente, temos que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Sendo assim, é fácil perceber que ao fazermos uma simples reorganização nos termos do lado direito da equação (2.3) encontramos que

$$G_{\mu\nu} = 2 \left( F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right). \quad (2.7)$$

A equação (2.5) define um tensor genérico, entretanto o que nos interessa para este caso é um tensor em específico, o tensor momento-energia do eletromagnetismo, sendo assim, definiremos o tensor  $T_{\mu\nu}$  como sendo o tal.

Perceba agora que ao compararmos a equação (2.5) com a equação (2.7), este tensor  $T_{\mu\nu}$  ganha uma forma bem definida [10]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu}^{\rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right), \quad (2.8)$$

onde  $F_{\mu}^{\rho} = g^{\sigma\rho}F_{\mu\sigma}$  e  $F^{\alpha\beta} = g^{\lambda\alpha}g^{\xi\beta}F_{\lambda\xi}$ .

Chegamos, então, a um ponto extremamente importante para a contextualização das soluções das equações de Einstein (2.6) para buracos negros carregados, pois é através de manipulações matemáticas nesta equação (2.8) que encontraremos a forma explícita da métrica de Reissner-Nordström, objetivo principal deste capítulo.

O passo agora é encontrarmos todas as componentes da equação (2.8), e para isso necessitamos definir o elemento de linha, já que é através dele que determinaremos o tensor  $g_{\mu\nu}$ . Consideraremos, então, a forma geral do elemento de linha de um espaço-tempo estático e simetricamente esférico, que pode ser escrito da forma [17, 18, 19]

$$ds^2 = -e^{A(r)}dt^2 + e^{B(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.9)$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$  é a métrica de uma esfera bidimensional  $S^2$ .

O elemento de linha (2.9) é uma consequência da definição de uma variedade com simetria esférica, e através do teorema de Birkhoff<sup>2</sup> sabemos que as suas soluções são estáticas [17].

Um termo matemático que agora nos será útil é denominado de *conexão*. A conexão é o termo que é responsável pelo transporte paralelo de vetores em um espaço curvo [16, 21, 22, 23, 24, 25], e pode ser visto com mais detalhes, além de nas referências citadas, no Apêndice C.

Desta maneira, definiremos então a conexão representada pelo tensor simétrico

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha} (\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}). \quad (2.10)$$

Os  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  são conhecidos como os *símbolos de Christoffel* e conexões com essas características são denominadas de **conexões afim**, que, também, podem ser vistas no Apêndice E. Além disso,  $\partial_{\mu}$  é a derivada parcial em relação a componente  $x^{\mu}$  ( $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ ) e  $g_{\mu\nu}$  é métrica.

Para encontrarmos as componentes do tensor  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ , dado pela equação (2.10) acima, basta usarmos o elemento de linha dado pela equação (2.9). Ressaltando que, a simetria esférica do espaço-tempo impõe torção nula, o que implica que  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$  [16].

Primeiramente, percebemos que

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0. \quad (2.11)$$

Este resultado já era esperado, tendo em vista que sabíamos que o espaço-tempo é estático e por esse motivo não pode haver dependência temporal.

As componentes não-nulas da conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  são:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = -\frac{1}{2}A', \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}B', \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}e^{A-B}A', \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -re^B, \quad (2.15)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -re^B \text{sen}^2\theta, \quad (2.16)$$

---

<sup>2</sup>O teorema de Birkhoff diz-nos que qualquer solução de vácuo simetricamente esférica é estática, conforme [10, 20].

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = r^{-1}, \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta \cos\theta, \quad (2.18)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = r^{-1} \quad (2.19)$$

e

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cot\theta. \quad (2.20)$$

Onde  $A'$  e  $B'$  são, respectivamente, as derivadas totais de  $A$  e  $B$  em relação a  $r$ .

O tensor de Maxwell  $F_{\mu\nu}$  é definido por [16, 21]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Entretanto estamos tratando de um buraco negro estático, e de forma geral o campo elétrico de uma superfície simetricamente esférica carregada e estática comporta-se como o campo elétrico de uma carga pontual localizada no centro desta esfera. Este resultado pode ser facilmente obtido utilizando a lei de Gauss [26, 27, 28].

Uma consequência deste fato é que podemos adotar a posição da carga como sendo a origem do sistema de coordenadas (veja a Figura 1).

Como o campo elétrico dependerá apenas da coordenada radial, podemos redefinir o tensor de Maxwell  $F_{\mu\nu}$  da equação (2.21) apenas como a matriz [21]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & 0 & 0 \\ -E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Onde também desconsideramos as componentes do campo magnético desta carga.

Perceba também que ainda existe a possibilidade de usarmos o campo de calibre dual  $*F_{\mu\nu}$  [29, 30, 31, 32] no tensor (2.22),

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \quad (2.23)$$

onde  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  são os símbolos de Levi-Civita<sup>3</sup>.

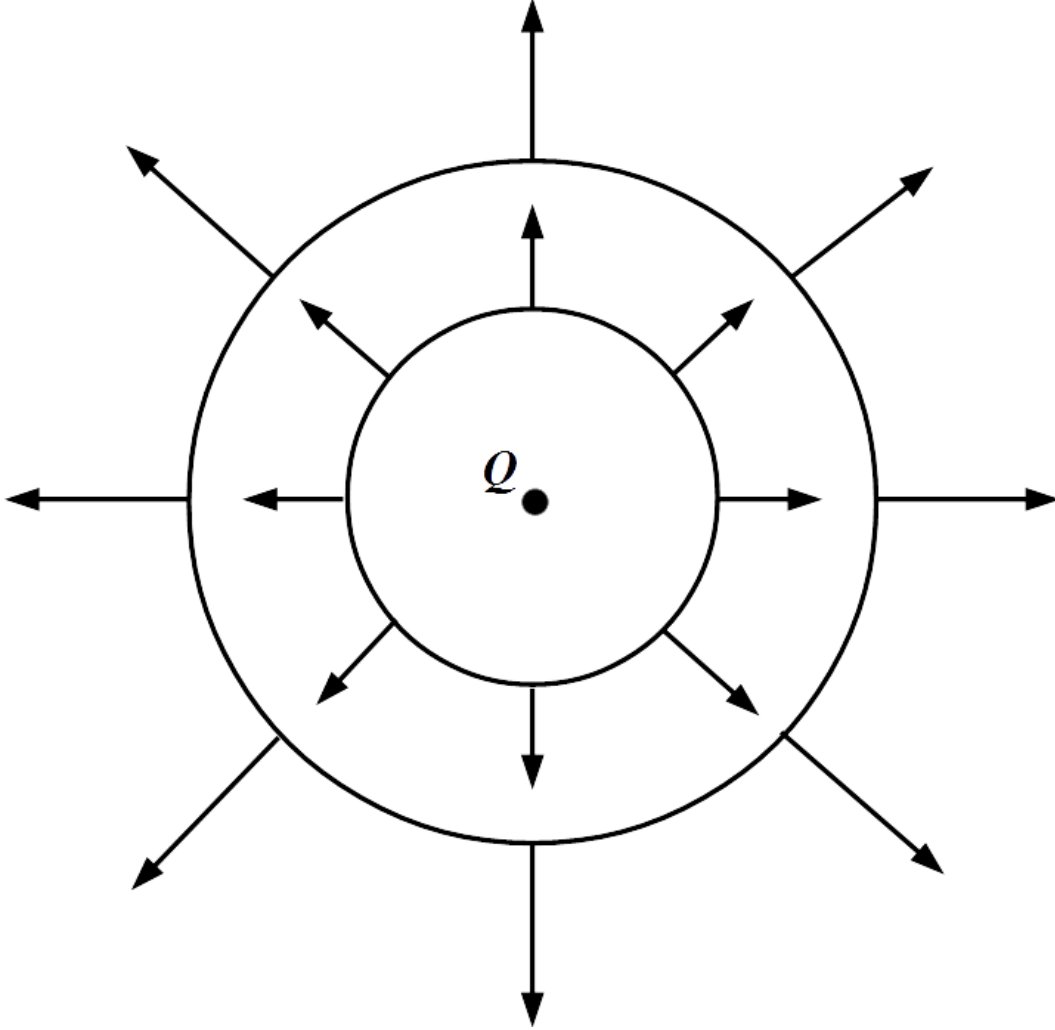


Figura 1: Campo radial eletrostático de uma partícula pontual carregada  $Q$ .

Análogo ao procedimento que usamos para encontrar as equações de movimento de Einstein, descrito pela equação (2.2), podemos utilizar o princípio de mínima ação mais uma vez para encontrarmos as equações de movimento do eletromagnetismo. Entretanto, desta vez o funcional será  $\delta = \delta/\delta(\partial A_\mu)$ , onde  $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$  é o potencial 1-forma de Maxwell ( $\phi = \frac{Q}{r}$ ).

Para fazermos esse procedimento, também definiremos o tensor  $F_{\mu\nu}$  da forma [11, 32]

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu. \quad (2.24)$$

<sup>3</sup>Os símbolos de Levi-Civita são definidos por:

$$\sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ são permutações cíclicas de } 0, 1, 2, 3; \\ -1 & \text{se } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ são permutações não-cíclicas de } 0, 1, 2, 3; \\ 0 & \text{para quaisquer índices iguais.} \end{cases}$$

Desta maneira, as equações de movimento serão dadas por<sup>4</sup>

$$\nabla_{\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.25)$$

que é a derivada covariante de  $F^{\mu\nu}$ , ou seja,

$$\nabla_{\nu} F^{\mu\nu} = \partial_{\nu} F^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} F^{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} F^{\mu\lambda}. \quad (2.26)$$

Donde podemos identificar o primeiro termo do lado direito da igualdade como sendo exatamente a descrição covariante das equações de Maxwell (veja o apêndice A), e para uma situação onde não exista fontes, que é o caso, este termo é nulo. Por sua vez, o segundo termo também é nulo, e isso se deve ao fato de ser o produto tensorial de um tensor simétrico (os símbolos de Christoffel) com um tensor antissimétrico (o tensor de Maxwell). Com isso, resta-nos apenas o último termo, que ao notarmos que os símbolos de Christoffel definido na equação (2.10) podem ser reescritos da forma [16]

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \partial_{\lambda} g_{\rho\nu}, \quad (2.27)$$

e que

$$g^{\nu\rho} \partial_{\lambda} g_{\rho\nu} = \frac{1}{g} \partial_{\lambda} \ln g = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda} \sqrt{-g}, \quad (2.28)$$

permite-nos reescrever a equação (2.26) apenas como

$$\nabla_{\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.29)$$

Onde

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{A+B}{2}} r^2 \sin \theta. \quad (2.30)$$

Perceba, também, que a partir da definição da derivada covariante de  $F_{\mu\nu}$ , que pode ser escrita explicitamente como

$$\nabla_{\lambda} F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} F_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} F_{\mu\rho}, \quad (2.31)$$

podemos fazer permutações cíclicas nos seus índices para encontrarmos a identidade

$$\nabla_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = \nabla_{\lambda} F_{\mu\nu} + \nabla_{\nu} F_{\lambda\mu} + \nabla_{\mu} F_{\nu\lambda} = 0. \quad (2.32)$$

Isso porque, uma vez que  $F_{\mu\nu}$  é antissimétrico e  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}$  é simétrico, os gamas se anulam.

---

<sup>4</sup>Estes cálculos também estão presentes no apêndice B.

Esta identidade (2.32) é conhecida como *identidade de Bianchi*.

Com isso, podemos resolver a equação (2.29), lembrando que o valor de  $\sqrt{-g}$  foi dado pela equação (2.30).

Primeiramente vejamos quais componentes são nulas.

De antemão já esperamos que a componente temporal ( $\nu = 0$ ) seja nula. Mais uma vez reportamos ao fato de que é isto que espera-se para um campo estático. Esta expectativa é de fato confirmada, veja:

$$\begin{aligned} \partial_0 \left( e^{\frac{A+B}{2}} r^2 \text{sen}\theta F^{01} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_0 (E_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Vejamos que as demais componentes  $\nu = 2, 3$  também são identicamente nulas. Do mesmo modo que o campo não depende do tempo, também não depende das componentes angulares devido à simetria do problema (isso pode ser constatado matematicamente usando a identidade (2.32)).

A componente  $\nu = 1$ , por sua vez, é a única componente não trivial da equação, e nos fornece

$$\begin{aligned} \partial_1 \left( e^{(A+B)/2} r^2 \text{sen}\theta \cdot (-e^{-(A+B)} E_1) \right) &= 0 \\ \partial_1 \left( r^2 e^{\frac{1}{2}(A+B)} E_1 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Uma solução estática geral desta equação é

$$E_1 = \frac{Q}{r^2} e^{\frac{1}{2}(A+B)}. \quad (2.35)$$

Onde  $Q$  é uma constante de integração que pode ser identificada como a carga elétrica de Coulomb, basta usarmos a definição de carga elétrica [29, 33]

$$Q_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi} \oint *F. \quad (2.36)$$

Veja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \oint *F &= \frac{1}{8\pi} \oint *F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi *F_{23}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Eventualmente,

$$*F_{23} = \sqrt{-g}F^{10} = (e^{(A+B)/2}r^2 \operatorname{sen}\theta e^{-(A+B)}F_{01}) = Q \operatorname{sen}\theta. \quad (2.38)$$

Finalmente,

$$Q_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad Q \operatorname{sen}\theta = Q. \quad (2.39)$$

O nosso próximo passo consistirá em encontrarmos cada componente não-nula do tensor momento-energia do eletromagnetismo expresso na equação (2.8). Para isso, substituiremos nela o resultado obtido na equação (2.35) para  $E$  (lembrando que o campo elétrico é apenas radial, então,  $E = E_1$ ), assim como as componentes do tensor  $F^{\mu\nu}$  dadas em (2.22).

A primeira componente analisada será  $T_{00}$ . Veja que pela equação (2.8)

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left( g^{11}F_{01}F_{01} - \frac{1}{4}g_{00} [F_{01}g^{00}g^{11}F_{01} + F_{10}g^{11}g^{00}F_{10}] \right). \quad (2.40)$$

Onde substituindo as componentes da equação (2.22) na equação (2.40) obtemos que

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{4\pi} \left( e^{-B}E^2 - \frac{1}{2}e^{-B}E^2 \right) \\ &= \frac{1}{8\pi}e^{-B}E^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Finalmente, substituindo o resultado da equação (2.35) na equação (2.40) encontramos que

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{Q}{r^2} \right)^2 e^A. \quad (2.42)$$

Através do mesmo procedimento acima encontramos as demais componentes não-nulas como sendo:

$$T_{11} = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{Q}{r^2} \right)^2 e^B, \quad (2.43)$$

$$T_{22} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{Q}{r} \right)^2, \quad (2.44)$$

$$T_{33} = \operatorname{sen}^2\theta T_{22}. \quad (2.45)$$

Todas as demais componentes são nulas.



Agora podemos expressar o tensor  $T_{\mu\nu}$  e todas as suas componentes na matriz,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{Q}{r^2} \right)^2 \begin{pmatrix} e^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Um dos últimos termos, não menos importante, de que necessitamos para definir completamente a métrica de Reissner-Nordström será encontrado agora. Estamos nos referindo ao tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , que é definido como a contração do tensor de Riemann com ele próprio da forma

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \\ &= \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ele nos fornecem as seguintes componentes não-nulas:

$$R_{00} = \frac{e^{A(r)-B(r)} (rA'(r)^2 - rB'(r)A'(r) + 4A'(r) + 2rA''(r))}{4r}, \quad (2.48)$$

$$R_{11} = \frac{-rA'(r)^2 + rB'(r)A'(r) + 4B'(r) - 2rA''(r)}{4r}, \quad (2.49)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2}e^{-B(r)} (-rA'(r) + 2e^{B(r)} + rB'(r) - 2), \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= \frac{1}{2}e^{-B(r)} \text{sen}^2(\theta) (-rA'(r) + 2e^{B(r)} + rB'(r) - 2) \\ &= \text{sen}^2\theta R_{22}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Tendo armazenado todas estas informações, a construção das soluções de Reissner-Nordström adianta-se mais um passo. Agora iremos extrair informações das equações de Einstein (2.6) reescritas da forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (2.52)$$

O primeiro ponto é que facilmente pode ser visto que

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.53)$$

então a equação (2.52) reduz-se a

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Agora é só comparar os lados da equação (2.54) substituindo os valores encontrados para cada componente  $T_{\mu\nu}$  através das equações (2.42), (2.43), (2.44) e (2.45), assim como, os valores encontrados para  $R_{\mu\nu}$  através das equações (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51).

Deste modo, para a componente  $\mu = \nu = 0$  teremos que

$$\frac{e^{A-B}}{4r} [rA'(A' - B') + 4A' + 2rA''] = \left(\frac{Q}{r^2}\right) e^A, \quad (2.55)$$

e para componente  $\mu = \nu = 1$  teremos que

$$\frac{rA'(B' - A') + 4B' - 2rA''}{4r} = -\left(\frac{Q}{r^2}\right) e^B. \quad (2.56)$$

De modo que, as equações (2.55) e (2.56) combinadas nos fornecem que

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{dB}{dr}, \quad (2.57)$$

o que implica que,

$$\int dA = -\int dB, \quad (2.58)$$

então, concluímos que

$$A = -B. \quad (2.59)$$

A componente  $\mu = \nu = 2$ , por sua vez, fornece-nos a equação

$$\frac{1}{2}e^{-B} [r(B' - A') + 2e^B - 2] = -\left(\frac{Q}{r}\right)^2 e^{A+B}. \quad (2.60)$$

Entretanto, pela identidade obtida na equação (2.59) esta equação (2.60) pode ser reorganizada, tornando-se

$$e^A r A' + e^A = 1 - \left(\frac{Q}{r}\right)^2, \quad (2.61)$$

que facilmente pode ser entendida como

$$\int d(re^A) = 1 - \left(\frac{Q}{r}\right)^2, \quad (2.62)$$

e integrada da forma

$$\begin{aligned} d(re^A) &= \int \left[ 1 - \left( \frac{Q}{r} \right)^2 \right] dr \\ e^A &= 1 + \left( \frac{Q}{r} \right)^2 + \frac{C}{r}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde  $C$  é uma constante de integração, que pode ser identificada como  $C = -2M$ . Logo

$$e^A = e^{-B} = 1 + \left( \frac{Q}{r} \right)^2 - \frac{2M}{r}. \quad (2.64)$$

Finalmente, reunindo todas as informações evidenciadas ao longo desta seção, temos, então, construída as soluções de Reissner-Nordström para buracos negros simetricamente esféricos, estáticos e portadores de carga elétrica. Basta apenas substituir os valores encontrados para as exponenciais  $e^A$  e  $e^B$ , no elemento de linha (2.9).

Feito isso, o elemento de linha (2.9) torna-se

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + d\Omega^2. \quad (2.65)$$

Esta é a forma como o elemento de linha (ou por exagero de linguagem, métrica) de Reissner-Nordström é conhecido na literatura [18, 19, 21], que, conforme pode ser visto, é uma extensão do elemento de linha Schwarzschild<sup>5</sup>.

No decorrer desta dissertação recorreremos algumas vezes a esta métrica (2.65). Entretanto, faremos uma pequena modificação em sua forma chamando

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad (2.66)$$

ou ainda,

$$\Delta = (r - r_+) (r - r_-). \quad (2.67)$$

E com isso, a reescreveremos da seguinte forma [10]:

$$ds^2 = - \frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.68)$$

---

<sup>5</sup>O elemento de linha Schwarzschild é dado por

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + d\Omega^2.$$

No próximo capítulo analisaremos alguns casos especiais referentes ao estudo da métrica de Reissner-Nordström. Especificamente, trataremos os pontos divergentes desta métrica do ponto de vista do sistema de coordenadas adotado. A métrica escrita como está não cobre todos os pontos regulares do espaço-tempo. Desta maneira, resolveremos este problema redefinindo a métrica em termos de um sistema de coordenadas adequado.



### 3 ANÁLISE DA MÉTRICA DE REISSNER-NORDSTRÖM

Neste capítulo faremos uma análise da divergência da métrica de Reissner-Nordström expressa na equação (2.65) para os casos “não-extremos” e “extremos”. Estes casos consistem eventualmente em:

- caso não-extremo — quando a massa do buraco negro  $M$  é maior ou menor que sua carga elétrica  $Q$ ;
- caso extremo — quando a massa do buraco negro  $M$  é exatamente igual à sua carga elétrica  $Q$ .

Nestas condições há divergências da métrica, no entanto, estas divergências não possuem caráter físico, haja vista que não há singularidades. Na verdade o que há é apenas um problema matemático referente ao sistema de coordenadas utilizado. Desta maneira, compete-nos solucionar esse problema.

De uma forma geral, existem pontos onde a métrica diverge sem que haja problemas físicos relacionados. Problemas desta natureza são percebidos devido ao fato de que a métrica não está bem definida nestes locais. Chamaremos estes casos de “*pseudo-singularidade*” [34] e as coordenadas destes pontos de *coordenadas singulares* [19, 20, 21].

Conforme já esperávamos, também, existe singularidade quando  $r \rightarrow 0$ . Nesse ponto o escalar de curvatura<sup>1</sup>  $R$  tende ao infinito [18, 21], definindo uma singularidade que chamaremos de singularidade física, pois as teorias científicas desenvolvidas até então não foram capazes de descrever o que ocorre neste local.

---

<sup>1</sup>O escalar de curvatura  $R$  é definido como sendo a contração do tensor de Ricci com a métrica,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

e mede a curvatura do espaço-tempo, conforme pode ser visto no apêndice D.

A Relatividade Geral é capaz de descrever o comportamento de objetos relativamente grandes, velozes e massivos, enquanto a Mecânica Quântica descreve objetos relativamente pequenos. Quando o raio do buraco negro tende a zero surge a necessidade de uma teoria que una a Relatividade Geral à Mecânica Quântica. Uma teoria promissora que se dispõe a fazer essa intermediação é a Teoria das Cordas. Na subseção 3.2 faremos uma menção ao caso de buracos negros extremos em dimensões extras, mais especificamente, para o caso de cinco dimensões, e soluções de múltiplos buracos negros, o que introduz a possibilidade da descrição de buracos negros através desta teoria.

### 3.1 ANÁLISE DO CASO NÃO-EXTREMO

Uma forma de analisarmos a divergência de uma métrica em geral é exatamente onde o fator  $g_{tt}$  se anula [34]. Para a métrica de Reissner-Nordström (2.68) ( $ds^2 = (\Delta/r^2)dt^2 + (r^2/\Delta)dr^2 + r^2d\Omega^2$ ) isso ocorre, justamente, ou quando  $r = 0$ , que é uma singularidade física, ou quando  $\Delta = 0$  ( $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 = (r - r_+)(r - r_-)$ ), que é um ponto onde a coordenada é singular.

O nosso interesse é justamente o último caso, de modo que isto ocorre quando

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.1)$$

Estes pontos são referidos como o horizonte interno  $r_-$  e o horizonte externo  $r_+$  do buraco negro.

É fácil perceber que a métrica (2.68) pode ser dividida em três regiões:

- I.  $r_+ < r < \infty$ ;
- II.  $r_- < r < r_+$ ;
- III.  $0 < r < r_-$ .

Perceba agora que só teremos horizonte de eventos se

$$M \geq |Q|.$$

Caso esta condição não seja satisfeita, o termo  $\sqrt{M^2 - Q^2}$  não apresentará valores reais. Portanto, não haverá horizontes. Isso implica dizer que a singularidade pode ser vista pelo observador, neste caso dizemos que a singularidade é *nua* [10, 18, 21, 34],

entretanto de acordo com a hipótese da *conjectura da censura cósmica*<sup>2</sup> isto nunca pode decorrer em processos físicos [10]. Além do mais, essa singularidade pode ser evitada tendo em vista que as linhas de universo provenientes de  $r$ 's constantes são do tipo-tempo<sup>3</sup> em qualquer parte do espaço [34].

Para o caso onde  $M > |Q|$  a métrica (2.68) apresenta problemas nos pontos  $r = r_{\pm}$ .

O que ocorre nesta situação é que as coordenadas são singulares, similar ao caso de Schwarzschild<sup>4</sup> para  $r = 2M$ .

O problema com o sistema de coordenadas em questão é que  $dt/dr \rightarrow \infty$  ao longo das geodésicas radiais nulas que se aproximam de  $r = r_{\pm}$ .

Um caminho para solucionar esse problema pode ser uma breve análise da estrutura causal da geometria do espaço-tempo por meio do estudo dos cones de luz.

A medida que o cone de luz se aproxima do horizonte a sua progressão na direção  $r$  torna-se “lenta” com respeito à coordenada  $t$ .

Então, podemos considerar curvas radiais nulas, das quais  $\theta$  e  $\phi$  são constantes, e, desta forma,  $ds^2 = 0$ .

Isto implica em

$$ds^2 = 0 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2, \quad (3.2)$$

ou

$$dt = \pm \frac{r^2}{\Delta}dr. \quad (3.3)$$

ou ainda,

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r^2}{\Delta}. \quad (3.4)$$

Note que, se  $r$  é muito grande, então,  $dt/dr = \pm 1$ , que é o comportamento do cone de luz no espaço-tempo plano. No entanto, em  $r = r_{\pm}$ ,  $dt/dr \rightarrow \infty$ , e o cone de luz “encolhe” a medida que ele progride em relação a esse ponto.

Podemos fazer uma melhor análise deste fato definindo as novas coordenadas  $r^*$  e  $\tilde{t}$ .

Definiremos primeiramente a coordenada  $r^*$ , da forma:

$$dr^* = \frac{r^2}{\Delta}dr. \quad (3.5)$$

---

<sup>2</sup>Esta conjectura foi proposta por Roger Penrose e pode ser vista com maiores detalhes em [10, 18, 21, 34]

<sup>3</sup>Ou seja, estão dentro do cone de luz

<sup>4</sup>Veja, mais uma vez, [10, 18].



Deste modo, temos que

$$r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-). \quad (3.6)$$

Esta coordenada é conhecida como *coordenada de tartaruga*.

Em sequência definiremos a coordenada  $\tilde{t}$  como

$$\tilde{t} = t + \xi(r), \quad (3.7)$$

onde

$$\xi(r) = r^* - r. \quad (3.8)$$

Dessa forma,

$$d\tilde{t} = dt + \xi'(r)dr, \quad (3.9)$$

onde

$$\xi'(r) = \frac{d\xi'}{dr} = \frac{Q^2 - 2Mr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (3.10)$$

Para ficar mais ilustrativo, denominaremos a função  $f$  de

$$f = 1 - g_{00}, \quad (3.11)$$

ou seja,

$$f = \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}. \quad (3.12)$$

Agora reescreveremos a métrica de Reissner-Nordström em função de  $\xi'(r)$  e  $f$  da forma

$$ds^2 = -(1 - f)d\tilde{t}^2 - (1 - f)\xi'(r)^2 dr^2 + 2(1 - f)\xi'(r)d\tilde{t} + r^2 d\Omega^2, \quad (3.13)$$

que ainda pode ser simplificada se notarmos que

$$(1 - f)\xi'(r)^2 = \frac{f^2}{1 - f} \quad (3.14)$$

e

$$(1 - f)\xi'(r) = f. \quad (3.15)$$

Daí fica fácil perceber que

$$ds^2 = -(1-f)d\tilde{t}^2 + 2(1-f)\xi'(r)d\tilde{t} + (1+f)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.16)$$

Desconsiderando as coordenadas angulares, temos que

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \left[1 + \frac{d\tilde{t}}{dr}\right] \left[(1+f) - (1-f)\frac{d\tilde{t}}{dr}\right] = 0, \quad (3.17)$$

o que implica em

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = -1 \quad (3.18)$$

e

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = \frac{1+f}{1-f}. \quad (3.19)$$

Agora as componentes da métrica estão bem definidas em  $r_+$  e  $r_-$  nesse sistema de coordenadas.

A matriz  $g_{\mu\nu}$ , explicitamente, fica

$$\begin{pmatrix} 0 & f(r_{\pm}) & 0 & 0 \\ f(r_{\pm}) & 1+f(r_{\pm}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Note que podemos construir um diagrama do espaço-tempo para esse caso, sem haver, a necessidade de resolvermos as equações  $1+f$  e  $1-f$ . Os gráficos destas funções estão representados na figura 2 e foi construído conhecendo-se apenas alguns valores.

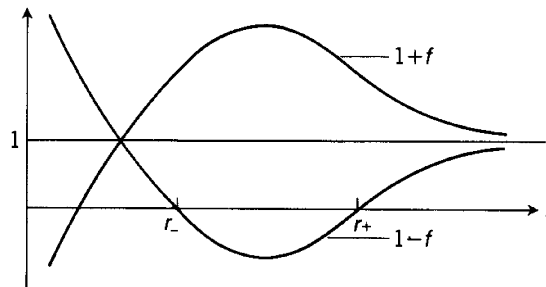


Figura 2: Esboço das funções  $1+f$  e  $1-f$ .

Primeiramente, note que com  $r$  crescendo para o infinito  $f$  vai a zero, desta forma,

$dt/dr \rightarrow 1$ , que é justamente o comportamento do cone de luz no espaço-tempo plano. E é o que espera-se de soluções assintoticamente planas.

Veja que na *região I*,  $r$  vindo do infinito,  $(1 + f)$  aumenta, enquanto,  $(1 - f)$  diminui, com isso, a inclinação aumenta até chegar no ponto  $r_+$ , onde ela se torna infinita.

Por sua vez, na *região II*, a inclinação aumenta com  $r$  partindo de menos infinito e passa para um valor negativo em  $r = Q^2/M$  e depois decresce novamente para menos o infinito quando  $r$  se aproxima de  $r_-$ .

Por fim, na *região III* a inclinação decresce do infinito para 1 quando os gráficos se cruzam e continua decrescendo a zero quando o gráfico de  $1 + f$  cruza o eixo  $r$ . A curva então decresce até  $-1$ .

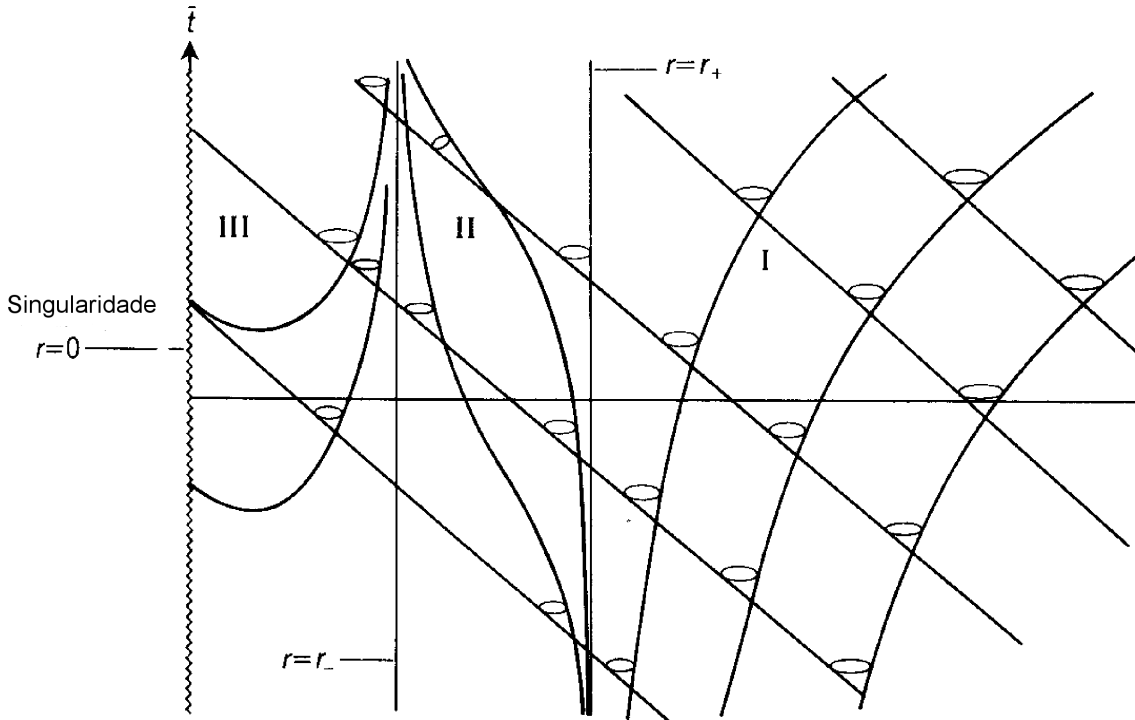


Figura 3: Diagrama das soluções de Reissner-Nordström para  $(M > |Q|)$ .

Também podemos tratar a métrica de Reissner-Nordström fazendo outra substituição. Podemos reescrevê-la em termos de  $r^*$ , definido em (3.5) e (3.6). Ou seja,

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}(-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2. \quad (3.21)$$

Esta representação soluciona o problema da progressão do cone de luz, mas, não resolve o problema da métrica que continua indefinida nos horizontes. Nesse contexto

podemos definir coordenadas que são naturalmente adaptadas às geodésicas nulas [18]:

$$\begin{aligned} v &= t + r^*, \\ u &= t - r^*, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde as geodésicas radiais nulas ascendentes são caracterizadas por  $v = \text{constante}$ , e as descendentes satisfazem  $u = \text{constante}$ . Estas coordenadas são conhecidas como **coordenadas de Eddington-Finkelstein** [10].

Note que se trocarmos a coordenada  $t$  da métrica (3.21) pela coordenada  $v$  descrita acima ela fica reescrita como [10]

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \tag{3.23}$$

De modo que agora ela está bem definida em todos os pontos, exceto em  $r = 0$ , e com isso o problema da pseudo-singularidade também foi resolvido.

O caso onde a massa do buraco negro é igual a sua carga,  $M = |Q|$ , é o caso que chamamos de **buracos negros de Reissner-Nordström extremos**, o procedimento de análise é muito similar ao descrito acima, e pode ser visto nas referências [10, 18, 21]. No entanto, a este caso reservamos uma atenção adicional na seção a seguir.

## 3.2 ANÁLISE DO CASO EXTREMO

No caso limite, onde  $r_{\pm} = M$  ou  $M = |Q|$ , o buraco negro é chamado de extremo. Neste caso ele tem o limite de carga máxima permitido dado sua massa.

A métrica de um buraco negro de Reissner-Nordström extremo pode ser escrita da forma [33, 35]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.24}$$

onde  $r_0 = M$ .

Podemos também definir  $r$  como  $\tilde{r} = r - r_0$ , que após uma álgebra simples nos possibilitará reescrevermos a equação (3.24) da forma

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r_0}{\tilde{r}}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{r_0}{\tilde{r}}\right)^2 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2). \tag{3.25}$$

Nesta forma de escrita, a métrica dos buracos negros de Reissner-Nordström extremos possui o horizonte localizado em  $\tilde{r} = 0$ .

Estas coordenadas possuem, ainda, simetria  $SO(3)$  e são conhecidas como coordenadas isotrópicas [35].

A geometria de um buraco negro extremo possui uma propriedade especial adicional. No limite próximo ao horizonte,  $r \approx 0$ , a equação (3.25) torna-se

$$ds^2 = - \left( \frac{\tilde{r}}{r_0} \right)^2 dt^2 + \left( \frac{r_0}{\tilde{r}} \right)^2 d\tilde{r}^2 + r_0^2 d\Omega^2. \quad (3.26)$$

Fazendo uma nova transformação  $\rho = r_0/\tilde{r}$  esta equação fica reescrita como:

$$ds^2 = \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^2 (-dt^2 + d\rho^2) + r_0^2 d\Omega^2, \quad (3.27)$$

que é um produto direto de um espaço-tempo anti-de Sitter<sup>5</sup> ( $AdS$ ) com uma esfera ( $S$ ). A constante de curvatura é negativa nas direções  $\rho$  e  $t$ , assim, o espaço-tempo é  $AdS_2$ . Similarmente, as direções angulares possuem duas esferas de curvaturas positivas ( $S^2$ ). Em ambos casos os raios das curvaturas são  $r_0 = M$ . Como resultado, a geometria no limite do horizonte é  $AdS_2 \times S^2$  [35]. Esta é conhecida como a métrica de Bertotti-Robinson [33].

Estas soluções são frequentemente examinadas em estudos que relacionam buracos negros à gravidade quântica [18], e embora elas tenham surgido como soluções de uma teoria supersimétrica, a saturação deste limite é equivalente à saturação de uma fronteira BPS<sup>6</sup>, o que implica que as soluções de um buraco negro de Reissner-Nordström extremo têm uma superssimetria preservada [33].

### 3.2.1 EXTENSÃO PARA CINCO DIMENSÕES

Os buracos negros de Reissner-Nordström têm generalizações para outras dimensões do espaço-tempo. O caso extremo em cinco dimensões é um ponto de partida para o estudo da entropia microscópica do buraco negro através da correlação entre buracos negros e teoria das cordas, não contemplado neste trabalho.

A métrica em cinco dimensões pode ser escrita de uma forma similar à métrica de

---

<sup>5</sup>O espaço-tempo anti-de Sitter é o espaço com constante cosmológica negativa [36].

<sup>6</sup>Estados **Bogomolnyi-Prasad-Soinnerfield (BPS)** são estados que são invariantes através de uma sub-álgebra não trivial de toda álgebra supersimétrica. Tal que, os estados sempre carregam cargas conservadas, e a álgebra supersimétrica determina a massa dos estados excitados em termos de suas cargas [37].

Reissner-Nordström em quatro dimensões<sup>7</sup> [29, 33, 35],

$$ds^2 = - \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right]^2 dt^2 + \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right]^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2, \quad (3.28)$$

automaticamente, podemos, mais uma vez, definir  $\tilde{r} = \sqrt{r^2 - r_0^2}$ , e obtemos

$$ds^2 = - \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{\tilde{r}} \right)^2 \right]^{-2} dt^2 + \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{\tilde{r}} \right)^2 \right] (dr^2 + \tilde{r}^2 d\Omega_3^2). \quad (3.29)$$

Usando essa expressão (3.29) é fácil perceber que o horizonte em  $\tilde{r} = 0$  tem o raio  $r_0 = M$ , e área

$$A = \Omega_3 r^3 = 2\pi^2 r_0^3. \quad (3.30)$$

Esta informação será útil se quisermos calcular numericamente a entropia de um dado buraco negro carregado. A fórmula será apresentada no capítulo 6.

### 3.2.2 SOLUÇÕES DE MÚLTIPLOS BURACOS NEGROS

Os buracos negros carregados permitem-nos encontrar soluções de múltiplos buracos negros. Para isto, basta percebermos que, de uma forma geral, a equação (3.25) pode ser escrita como [10]

$$ds^2 = -H^{-2} dt^2 + H^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (3.31)$$

onde

$$H = 1 + \frac{M}{r}, \quad (3.32)$$

substituindo, obviamente,  $r_0$  por  $M$ .

Perceba agora que  $dr^2 + r^2 d\Omega^2$  é exatamente a métrica euclidiana em três dimensões, e a equação (3.31) pode, então, ser reescrita como

$$ds^2 = -H^2 dt^2 + H^{-2} d\vec{x} \cdot d\vec{x}. \quad (3.33)$$

Na coordenada original  $r$  o campo elétrico da solução extrema pode ser expresso em

---

<sup>7</sup>O procedimento para encontrar essas soluções é análogo ao procedimento descrito na seção 2.1, o diferencial é o acréscimo de mais uma dimensão na ação e na métrica da esfera  $r^2 d\Omega^2$ . A simetria esférica torna trivial essa generalização.

termos do potencial vetor  $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$  da forma

$$E_1 = F_{10} = -\partial_1 A_0 = \frac{Q}{r^2}. \quad (3.34)$$

Imediatamente, teremos a componente tipo-tempo do potencial vetor dada por

$$A_0 = \frac{Q}{r}. \quad (3.35)$$

Nas novas coordenadas  $\tilde{r} = r - M$ , e com a condição extrema ( $M = |Q|$ ),  $A_0$  torna-se

$$A_0 = \frac{M}{\tilde{r} + M}, \quad (3.36)$$

ou equivalentemente,

$$H = 1 + A_0. \quad (3.37)$$

Se aplicarmos o laplaciano em ambos os lados da equação (3.37), veremos que

$$\nabla^2 H = \nabla^2 A_0. \quad (3.38)$$

De uma forma geral, se  $H$  é independente do tempo (e em nosso caso é) ele obedecerá as equações de Laplace,

$$\nabla^2 H = 0, \quad (3.39)$$

e possuirá soluções do tipo

$$H = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{|\vec{x} - \vec{x}^i|}. \quad (3.40)$$

Isso por conta da igualdade expressa na equação (3.38). Estas são funções harmônicas que descrevem uma configuração estática de buracos negros de Reissner-Nordström extremos de massas  $M_i$  e com horizontes localizados na posição  $\vec{x}^i$ .

Note que a múltipla solução de um buraco negro estático só é possível quando há um balanço exato entre a atração gravitacional e a repulsão eletrostática. Isto ocorre quando  $M = |Q|$ .

A múltipla solução é uma característica que interliga os buracos negros à teoria das cordas.

Maldacena, em sua tese de doutorado, percebeu que um buraco negro extremo tem

uma correspondência direta com uma superposição de soluções de cordas: ambos preservam a mesma supersimetria [9].

### 3.2.2.1 GRAVIDADE E TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

O elétron possui a massa muito menor que o módulo de sua carga ( $M \ll |Q|$ ) de modo que a atração gravitacional é insignificante se comparada com a repulsão de Coulomb. Entretanto, o elétron é um objeto intrinsecamente quântico, uma vez que o comprimento de onda Compton é muito maior que o raio de Schwarzschild.

Claramente a aplicabilidade da relatividade geral requer que

$$\frac{\text{comprimento de onda Compton}}{\text{raio de Schwarzschild}} = \frac{\hbar/Mc}{MG/c^2} = \frac{\hbar c}{M^2 G} \ll 1, \quad (3.41)$$

isto é,

$$M \gg \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \equiv M_P, \quad (3.42)$$

onde  $M_P$  é a massa de Planck. Isto é satisfeito para um objeto macroscópico, mas não para partículas elementares.

De modo geral o domínio da aplicabilidade da física clássica, da teoria quântica de campos e da relatividade geral, são ilustrada no diagrama 4.

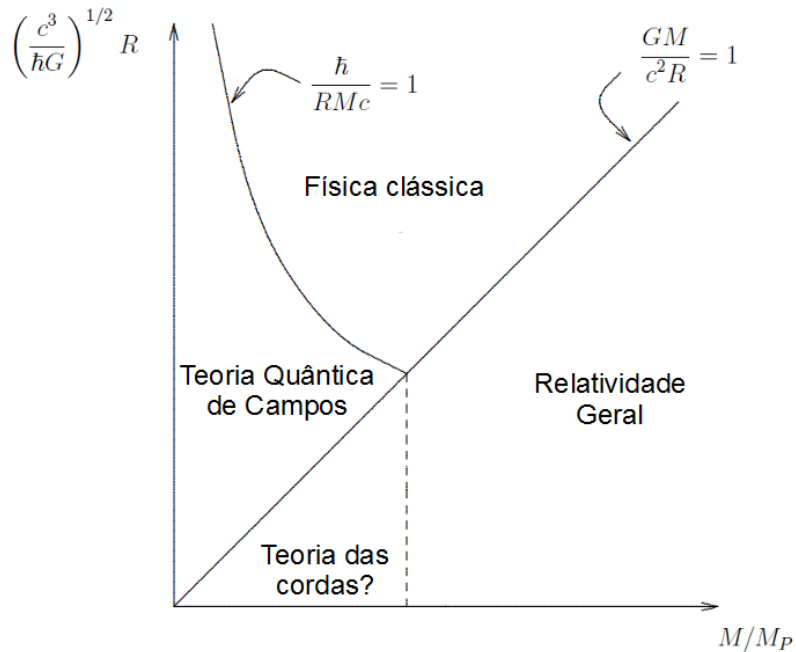


Figura 4: Diagrama representativo da validade da física clássica, teoria quântica de campos e relatividade geral.



### 3.3 DIAGRAMAS DE PENROSE

Nesta seção mostraremos a compactação conforme dos buracos negros de Reissner-Nordström representadas nos diagramas de Penrose para os três casos listados anteriormente.

Iniciaremos mostrando o diagrama para quando  $M < |Q|$ .

Neste caso, conforme citamos, os valores de  $r_{\pm}$  não são reais. A função  $\Delta$  é sempre positiva e a métrica não possui singularidades em  $r = r_{\pm}$ , de modo que não existem horizontes e a singularidade é nua. Desta maneira o diagrama de Penrose pode ser traçado diretamente para essa métrica e pode ser visto na figura 5.

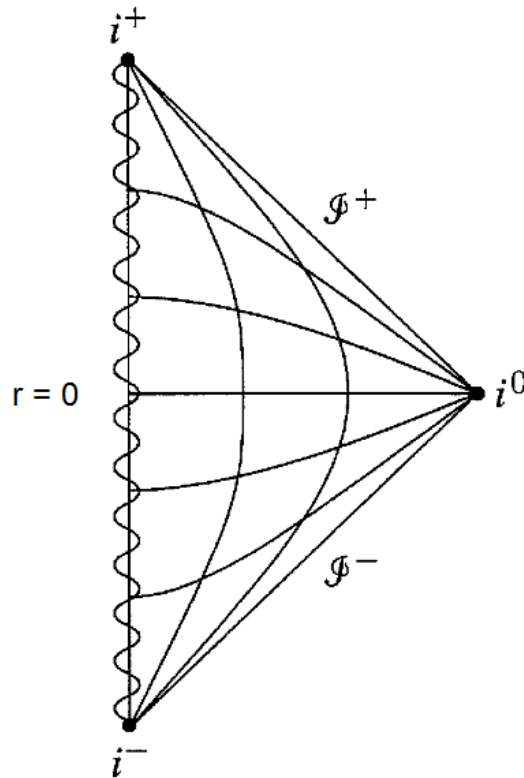


Figura 5: Diagrama de Carter-Penrose para a métrica de Reissner-Nordström para o caso  $M < |Q|$ . Onde a singularidade é nua na origem.

Para  $r$  indo ao infinito a solução aproxima-se do espaço-tempo plano, e os diagramas conformes possuem, praticamente, a mesma estrutura causal, exceto pelo fato de que, diferentemente do espaço-tempo de Minkowski,  $r = 0$  é uma singularidade.

No caso onde  $M > |Q|$ , para fazermos a construção do diagrama de Penrose, necessitamos mais uma vez exercitarmos as transformações de coordenadas.

Note que do mesmo modo que reescrevemos a equação (3.21) na forma da equação (3.23) trocando  $t$  por  $v$ , podemos reescrevê-la da forma

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dvdu + \text{parte angular} \quad (3.43)$$

fazendo

$$-dt^2 + dr^2 = dvdu. \quad (3.44)$$

De modo que agora introduziremos as novas coordenadas

$$\bar{v} = \exp \left[ \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} v \right] \quad (3.45)$$

e

$$\bar{u} = -\exp \left[ \frac{r_- - r_+}{2r_+^2} u \right]. \quad (3.46)$$

Assim,

$$d\bar{v}d\bar{u} = \frac{(r_+ - r_-)^2}{4r_+^4} \exp \left[ \frac{(r_+ - r_-)v + (r_- - r_+)u}{2r_+^2} \right] dvdu, \quad (3.47)$$

ou, ainda, lembrando que  $v = t + r^*$  e  $u = t - r^*$ ,

$$d\bar{v}d\bar{u} = \frac{(r_+ - r_-)^2}{4r_+^4} \exp \left[ \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} r^* \right] dvdu. \quad (3.48)$$

A exponencial da equação (3.48) acima ainda pode ser expandida em termos de  $r^*$ , definido pela equação (3.6), da forma:

$$\exp \left[ \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} r^* \right] = \frac{(r - r_+)}{(r - r_-)^{r_-^2/r_+^2}} \exp \left[ \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} r \right]. \quad (3.49)$$

Desta forma a equação (3.48) fica

$$d\bar{v}d\bar{u} = \frac{(r_+ - r_-)^2}{4r_+^4} \frac{(r - r_+)}{(r - r_-)^{r_-^2/r_+^2}} \exp \left[ \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} r \right] dvdu. \quad (3.50)$$

Com isso o elemento de linha (3.43) fica:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} \frac{4r_+^4 (r - r_-)^{r_-^2/r_+^2}}{(r_+ - r_-)^2 (r - r_+)} \exp \left[ \frac{r_- - r_+}{r_+^2} r \right] dvdu + \text{parte angular}. \quad (3.51)$$



A região III possui uma singularidade intrínseca em  $r = 0$  do tipo-tempo e, então, pode ser evitada por uma curva do tipo-tempo na direção futuro partindo da região I e cruzando  $r = r_-$  [21].

O caso  $Q^2 = M^2$  pode ser entendido similarmente ao caso  $Q^2 < M^2$ , e o diagrama de Penrose está mostrado na figura 7.

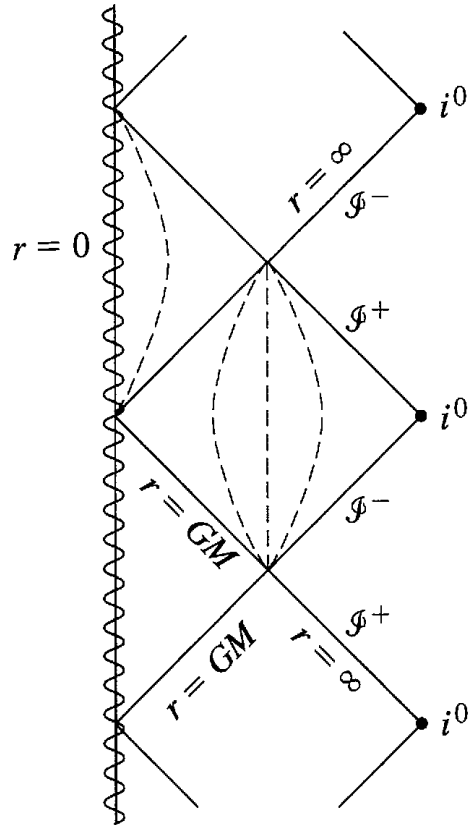


Figura 7: Diagrama de Carter-Penrose para a métrica de Reissner-Nordström para o caso  $M < |Q|$ .

A diferença entre estes dois casos é que a região II para o caso extremo de Reissner-Nordström desaparece. Por ele a região assintoticamente plana exterior (região I) se conecta diretamente com a região interior que contém a singularidade.



## 4 *TERMODINÂMICA DOS BURACOS NEGROS DE REISSNER-NORDSTRÖM*

No capítulo 2 vimos que, segundo a teoria da gravitação de Einstein, existem objetos extremamente massivos que causam um encurvamento do espaço-tempo em sua volta de tal modo que nada pode escapar de sua atração gravitacional a partir de uma determinada região circundante a ele, nem mesmo a luz. Conforme já citamos, objetos com esta característica são chamados de *buracos negros*. A fronteira desta região onde não é mais possível o retorno é chamada de *horizonte de eventos* [10, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 29, 32, 33, 34, 35].

Baseado na ideia de que nada pode escapar a partir dos horizontes de eventos, Stephen Hawking utilizando-se apenas da Relatividade Geral demonstrou que não é possível a redução da área deste horizonte<sup>1</sup> sob qualquer hipótese clássica [10], ou seja, os buracos negros seriam corpos com volume crescente à medida que “abocanham” matéria ou estagnados caso isso não ocorra, mas nunca decresceriam.

Outro ponto interessante é que se nada escapa a partir dos horizontes toda informação que cruzar sua fronteira será eternamente perdida [38]. O que viola uma lei natural muito bem fundamentada e experimentada, a *segunda lei da Termodinâmica*, que afirma que a entropia de um sistema físico irreversível nunca decresce [39, 40, 41, 42, 43].

Para ilustrar as consequências da irreduzibilidade da área do horizonte de eventos listadas acima imaginemos um sistema físico qualquer dotado de entropia como, por exemplo, um bule de café. Agora imaginemos que esse sistema fora subtraído por um buraco negro e cruza o horizonte de eventos. Como nada emerge a partir desta localidade toda a informação contida neste sistema também fora perdida para sempre, incluindo sua entropia que deixara de existir. O mais drástico disto tudo é que dizer que a entropia do ‘bule

---

<sup>1</sup>A área do horizonte de eventos de um buraco negro com simetria esférica é calculada usando a fórmula Euclidiana  $A = 4\pi r^2$  [8].

de café' desapareceu significa dizer que 'a entropia do universo onde ele estava contido também diminuiu'. Este paradoxo é chamado de **paradoxo da informação**.

No entanto, Bekenstein se contrapôs à violação desta lei e inspirado nas quatro leis mecânicas dos buracos negros, enunciadas em 1973 por Bardeen, Carter e Hawking, associou a cada buraco negro uma entropia proporcional à área do seu horizonte de eventos. De maneira que enunciou a segunda lei generalizada da termodinâmica: toda vez que matéria ou energia cai no buraco, aumentando o seu tamanho, sua entropia também aumenta, garantindo que a entropia do Universo como um todo nunca diminua [38].

A princípio para muitos esta ideia de entropia associada aos buracos negros não fazia nenhum sentido, inclusive para Hawking [38], porém, dois anos mais tarde ele próprio, ao levar em consideração a Teoria Quântica de Campos, chegou à conclusão que o seu colega Bekenstein estava correto em sua conjectura [8], conforme poderá ser visto no capítulo 6.

Neste capítulo iremos mostrar as leis da dinâmica dos buracos negros e a eminente correlação entre elas e as leis usuais da termodinâmica.

## 4.1 GRAVIDADE SUPERFICIAL

O termo gravidade superficial é um termo bastante importante no estudo da termodinâmica dos buracos negros. Conforme veremos mais adiante, mais precisamente no capítulo 6, este termo é diretamente proporcional à temperatura desses corpos<sup>2</sup>. Neste capítulo veremos que é através dele que é feita a comparação direta entre a lei zero da mecânica dos buracos negros e a lei zero da termodinâmica usual. Além disso, esta grandeza também é relacionável às demais leis, conforme veremos.

Para início de análise, consideraremos um espaço-tempo, simetricamente esférico e estático, tal qual [19],

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.1)$$

Em especial, para o caso de Reissner-Nordström,  $f = (1 - 2M/r + 2Q^2/r^2)$ .

Agora imaginemos uma partícula com massa  $m_0$  estacionária a uma distância  $r$  do centro do campo gravitacional com coordenadas e quadri-velocidades expressas por

$$x^\mu = (t, r, \theta, \phi) \quad (4.2)$$

---

<sup>2</sup>O estudo sobre a possibilidade de buracos negros possuírem temperatura associada a eles foi apresentado à comunidade pela a primeira vez por Hawking no ano de 1975.

e

$$u^\mu = (\dot{t}, 0, 0, 0), \quad (4.3)$$

respectivamente.

Deste modo,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 = -d\tau^2, \quad (4.4)$$

e

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = f^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.5)$$

e, por consequência,

$$u^0 = f^{-\frac{1}{2}}, \quad u^i = 0. \quad (4.6)$$

Segundo [19] a aceleração desta partícula é definida como

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu, \quad (4.7)$$

onde, conforme o apêndice E,

$$\nabla_\nu u^\mu = \partial_\nu u^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\lambda. \quad (4.8)$$

Como a única componente não-nula de  $u^\mu$  é  $u^0$ ,

$$\nabla_0 u^\mu = \partial_0 u^\mu + \Gamma_{00}^\mu u^0. \quad (4.9)$$

Usando a definição da conexão  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ , também contida no apêndice E, fácil perceber que a única componente não nula da conexão  $\Gamma_{00}^\mu$  é

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} f f', \quad (4.10)$$

onde  $f' = \frac{df}{dr}$ , de modo que

$$\nabla_0 u^\mu = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} f'. \quad (4.11)$$

Desta maneira a única componente não nula da aceleração será a componente  $a^1$ , que



ficará escrita como

$$a^1 = f^{-1/2}(\nabla_0 u^\mu) = \frac{1}{2}f'. \quad (4.12)$$

A magnitude do vetor aceleração, por sua vez, será dada por

$$a = \sqrt{g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu} = \sqrt{g_{11}}a^1 = \frac{1}{2}f^{-\frac{1}{2}}f', \quad (4.13)$$

onde  $f' = df/dr$ .

Provido disto, ao multiplicarmos a equação acima (4.13) pela massa  $m_0$  de uma partícula sob a ação da gravidade do buraco negro, teremos a expressão da força necessária para movermos esta partícula no espaço-tempo de um ponto a outro, esta força diverge no horizonte, conforme pode ser visto, entretanto, se a partícula é posta em movimento por um observador no infinito ao longo de uma corda sem massa, ao mexer a corda a uma pequena distância  $\delta s$ , ele realizará um trabalho infinitesimal da forma

$$\delta W = m_0 a(\infty) \delta s, \quad (4.14)$$

que do ponto de vista da partícula será

$$\delta W = m_0 a(r) \delta s. \quad (4.15)$$

Este processo pode ser interpretado como sendo uma máquina convertendo o trabalho em radiação na posição  $r$ , que é emitida para o observador no infinito — neste processo temos o *desvio para o vermelho*<sup>3</sup> dado pelo o fator  $\sqrt{g_{00}} = f^{1/2}$  [18], e assim,

$$\delta E_\infty = f^{1/2} m_0 a \delta s. \quad (4.16)$$

Entretanto, pelo princípio de conservação de energia,  $\delta E_\infty = \delta W_\infty$ , então

$$a_\infty(r) = f^{1/2} a(r) = \frac{1}{2} f'(r). \quad (4.17)$$

$a_\infty(r)$  é a aceleração medida pelo observador no infinito e a quantidade  $m_0 a_\infty(r)$  é a força aplicada por ele para manter a partícula em sua posição [19].

Esta grandeza medida no horizonte de um buraco negro é chamada de **gravidade superficial**  $\kappa$  [19].

Para o caso dos buracos negros de Reissner-Nordström o horizonte está localizado em

---

<sup>3</sup>Uma explanação mais detalhada pode ser vista em [19].

$r = r_+$ , desta maneira

$$\kappa = a_\infty(r_+) = \frac{1}{2}f'(r). \quad (4.18)$$

Como  $f' = 2M/r^2 - Q^2/r^3$ , ela pode ser escrita como

$$\kappa = \frac{M^2 - Q^2 + M\sqrt{M^2 - Q^2}}{r_+^3}, \quad (4.19)$$

ou ainda, como

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)^2}. \quad (4.20)$$

## 4.2 LEIS DA DINÂMICA DOS BURACOS NEGROS EM COMPARATIVO COM AS LEIS USUAIS DA TERMODINÂMICA

Citamos anteriormente que Bekenstein percebeu uma relação matemática entre as leis da Termodinâmica e as leis da dinâmica dos buracos negros. Agora Mostraremos esta visão na perspectiva dos buracos negros de Reissner-Nordström.

### 4.2.1 LEI ZERO DA DINÂMICA DOS BURACOS NEGROS

Ao analisarmos o termo gravidade superficial  $\kappa$ , expresso pela equação (4.20) da seção anterior, podemos perceber que esta expressão não depende da coordenada, depende apenas da massa e da carga do buraco negro, para o caso dele ser apenas carregado<sup>4</sup>. Isto possibilita-nos enunciar a lei zero da dinâmica dos buracos negros.

- *Lei zero da dinâmica dos buracos negros*

Na dinâmica dos buracos negros todas as partes do horizonte de eventos de um buraco negro em equilíbrio possuem a mesma *gravidade superficial*  $\kappa$  [44].

Esta lei possui uma analogia irrefutável com a *lei zero da termodinâmica*, a qual em seu enunciado diz que todas as partes de um sistema físico em equilíbrio térmico possuem a mesma temperatura  $T$  [40, 42].

---

<sup>4</sup>Independentemente da configuração do buraco negro, a gravidade superficial  $\kappa$  não dependerá da localização do ponto a ser medida.

## 4.2.2 PRIMEIRA LEI DA DINÂMICA DOS BURACOS NEGROS

Trataremos da primeira lei da dinâmica dos buracos negros para o caso específico de Reissner-Nordström com carga elétrica, todavia podemos estender, sem nenhuma complicação, para os casos onde haja cargas magnéticas, rotação<sup>5</sup>, ou redizer ao caso mais simples, que é o caso de Schwarzschild.

A determinação da área  $A$  do horizonte de eventos é bastante simples, já que essa é a área de uma esfera cujo raio<sup>6</sup> é  $r_{\pm}$ , isso quer dizer que

$$A = 4\pi r_{\pm}^2. \quad (4.21)$$

Uma porção infinitesimal dessa área é, então,

$$dA = 8\pi \left[ \frac{\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} dM - \frac{Q \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)}{\sqrt{M^2 - Q^2}} dQ \right]. \quad (4.22)$$

Note que a equação (4.22) pode ser reescrita em termos da gravidade superficial<sup>7</sup>  $\kappa$  da forma

$$dA = 8\pi \left[ \frac{1}{\kappa} dM - \frac{1}{\kappa} \frac{Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}} dQ \right]. \quad (4.23)$$

Se fizermos uma pequena observação, podemos identificar o último produto do último termo da equação (4.23) como sendo o potencial elétrico do buraco negro no horizonte  $\Phi_H$  e assim reescrevê-la como

$$dA = \frac{8\pi}{\kappa} (dM - \Phi_H dQ). \quad (4.24)$$

Desta equação (4.24) podemos, ainda assim, isolar  $dM$ , e isto nos dará [44]

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Phi_H dQ. \quad (4.25)$$

Que pode ser comparada à *primeira lei da termodinâmica*, que diz que a variação infi-

<sup>5</sup>Os buracos negros com rotação são chamados de buracos negros de Kerr-Newman.

<sup>6</sup>Relembrando que

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}.$$

<sup>7</sup>Resultado transcrito através da equação (4.20).

infinitesimal da energia interna  $U$  de um sistema com temperatura  $T$  e com Pressão  $P$  se relacionam com a entropia através das variações da entropia  $dS$  e da pressão  $dP$  por [41]

$$dU = TdS - PdV. \quad (4.26)$$

A forma geral da primeira lei da dinâmica dos buracos negros é:

- *Primeira lei da dinâmica dos buracos negros*

Na dinâmica dos buracos negros a variação infinitesimal da massa  $M$ , da carga  $Q$  e do momento angular  $J$  de um buraco negro estacionário são relacionados por

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ, \quad (4.27)$$

onde  $\Omega$  é a velocidade angular no horizonte e  $\Phi_H$  é o potencial elétrico eletrostático no horizonte [20].

### 4.2.3 SEGUNDA LEI DA DINÂMICA DOS BURACOS NEGROS

No início deste capítulo discutimos a relação entre a Segunda Lei da Termodinâmica, que estabelece que a entropia de um sistema fechado nunca decresce [40] e a perda de informação decorrente de buracos negros. Citamos que Bekenstein para solucionar esse dilema adicionou uma dada entropia aos buracos negros, se contrapondo à ideia original de que a estes corpos não se relacionavam grandezas termodinâmicas. Nesta seção veremos a aparente relação existente entre a segunda lei da mecânica dos buracos negros e a segunda lei da termodinâmica.

De forma sucinta, podemos enunciar matematicamente a segunda lei da termodinâmica da forma [40]:

$$dS \geq 0. \quad (4.28)$$

Um fenômeno similar ocorre com a área do horizonte do buraco negro:

- *Segunda lei da dinâmica dos buracos negros*

Na dinâmica dos buracos negros a área do horizonte nunca pode decrescer [44]:

$$dA \geq 0. \quad (4.29)$$

Foi através da semelhança entre essas duas leis que Bekenstein associou uma entropia aos buracos negros proporcional à área do horizonte de eventos. No entanto essa associação careceu de uma formulação matemática mais precisa que viera a ser pouco mais tarde enunciada por Hawking.

Podemos demonstrar a validade dessa segunda lei para o caso de Reissner-Nordström usando os seguintes argumentos:

$$d(A) \propto d(r_+^2) \geq 0, \quad (4.30)$$

onde,

$$d(r_+^2) = d\left(\left[M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right]^2\right), \quad (4.31)$$

ou,

$$d(r_+^2) = 2\left(\frac{\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}}dM - \frac{Q\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)}{\sqrt{M^2 - Q^2}}dQ\right) \geq 0, \quad (4.32)$$

o que implica que

$$dM \geq \frac{QdQ}{r_+} = \Phi_H dQ, \quad (4.33)$$

ou seja,

$$M \geq \int \frac{Q\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)}{\sqrt{M^2 - Q^2}}dQ \quad (4.34)$$

sendo assim,

$$M \geq \frac{Q^2}{2} - M\sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (4.35)$$

Esta argumentação é sustentada pela conjectura da censura cósmica.

O enunciado dessa segunda lei repercute em duas consequências diretas. A primeira é a obtenção do limite de eficiência da conversão massa/energia na colisão entre dois buracos negros, a outra é que buracos negros não bifurcam [10].

Para analisarmos a primeira consequência, consideremos a energia irradiada  $E_R$  da colisão de dois buracos negros carregados com massas  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente, formando um terceiro com massa  $M_3$  (estamos considerando o caso onde  $Q$  é igual a  $M$ , apenas por

simplificação dos cálculos<sup>8</sup>):

$$E_R = M_1 + M_2 - M_3, \quad (4.36)$$

desta maneira, a eficiência  $\eta$  da conversão de massa em energia é

$$\eta = \frac{M_1 + M_2 - M_3}{M_1 + M_2}, \quad (4.37)$$

ou,

$$\eta = 1 - \frac{M_3}{M_1 + M_2}, \quad (4.38)$$

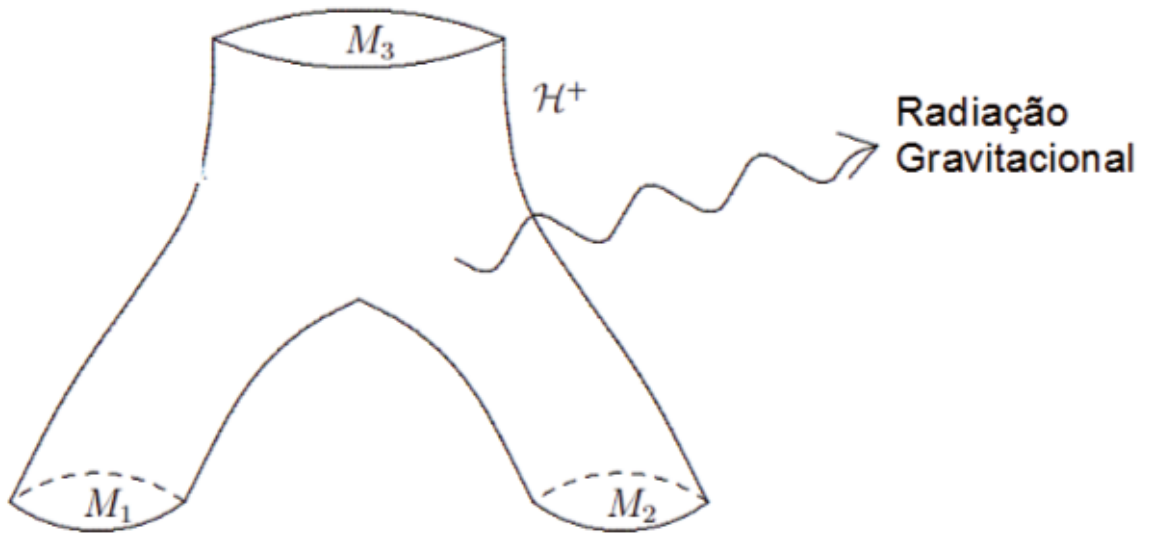


Figura 8: Diagrama de Finkelstein para dois buracos negros colidindo.

Agora levemos em consideração a seguinte desigualdade:

$$A \propto r_+^2 \geq 0, \quad (4.39)$$

o que nos leva a concluir que

$$M_3 \geq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}. \quad (4.40)$$

Então,

$$\eta \leq 1 - \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{M_1 + M_2}, \quad (4.41)$$

ou seja, a eficiência da conversão de massa em energia resultante da colisão de dois buracos

<sup>8</sup>Ressaltando que para o caso de Schwarzschild os cálculos são igualmente simples.

negros é [10]

$$\eta \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.42)$$

A energia irradiada pode ser usada para realizar trabalho, assim, o teorema da área limita a energia útil que pode ser extraída dos buracos negros do mesmo modo que a segunda lei da termodinâmica limita a eficiência de motores térmicos.

Podemos agora analisar a segunda consequência dessa lei, a não bifurcação de buracos negros. Para isso consideremos  $M_3$  se subdividindo em  $M_1 + M_2$ . O teorema da área diz que

$$M_3 \leq M_1^2 + M_2^2, \quad (4.43)$$

mas a conservação de energia diz que

$$M_3 \geq M_1^2 + M_2^2. \quad (4.44)$$

Com isso temos uma contradição e assim o processo não ocorre [10].

#### 4.2.4 TERCEIRA LEI DA DINÂMICA DOS BURACOS NEGROS

Na termodinâmica, o zero absoluto é inacessível, isto por que, é impossível reduzir a temperatura de um sistema a zero por um número finito de processos [40, 42].

Com respeito aos buracos negros:

- *Terceira lei da dinâmica dos buracos negros*

É impossível reduzir a gravidade superficial a zero por um número finito de operações [44].

Também podemos perceber que com a gravidade superficial indo a zero teremos um buraco negro sem horizonte, mais uma vez surge a proibição da censura cósmica.

De uma forma geral fica claro que a área do horizonte de eventos conecta-se formalmente com a fórmula da entropia, e que, a gravidade da superfície conecta-se com a fórmula da temperatura. Entretanto, conforme questionado por Bekenstein, se um buraco negro tem temperatura, tal qual um sistema termodinâmico, eles irradiam energia? Isso, indiscutivelmente, contraria as descrições básicas dos buracos negros clássicos. A solução deste problema foi dada por Hawking. A partir deste questionamento, ele acabou

descobrimo que buracos negros possuem temperatura bem definida e conseqüentemente irradiam. Mais detalhes estão contidos no próximo capítulo.





## 5 *EFEITO UNRUH*

A física dos buracos negros está relacionada a espaços-tempo curvos, evidentemente, entretanto, neste capítulo estudaremos um efeito que decorre apenas em espaços-tempo planos. A ideia geral desse efeito, porém, é bastante aproveitável para o objeto de estudo do próximo capítulo.

Especificamente neste capítulo, estudaremos o efeito Unruh, o qual afirma que observadores acelerados no espaço-tempo tradicional de Minkowski observa um espectro térmico de partículas. A ideia básica deste efeito é que observadores com diferentes noções de modos de frequência positiva e negativa discordarão da contagem de partículas de um dado estado [18, 45, 46].

Historicamente este efeito surgiu como uma tentativa de compreender mais profundamente um outro efeito, o efeito Hawking, que trata da radiação térmica provinda do horizonte de eventos de um buraco negro. Veremos no próximo capítulo uma forma de relacioná-los, entretanto a semelhança matemática existente entre os procedimentos usados para a obtenção destes dois efeitos nos permitirá a supressão de algumas passagens matemáticas na análise do efeito Hawking.

Os traquejos matemáticos principais serão a escolha do sistema de coordenadas adequado e a quantização do campo escalar. Utilizaremos para tais, um campo escalar sem massa em um espaço-tempo 1+1-dimensional. Ressalvando que redução dimensional do espaço-tempo é feita apenas para a simplificação dos cálculos, todas as conclusões físicas são as mesmas para quatro dimensões.

### 5.1 SISTEMA DE COORDENADAS

O espaço-tempo plano é o espaço-tempo de Minkowski. Conforme citamos acima, trataremos do caso mais simples do efeito Unruh, que é o caso bidimensional. Desta forma, partiremos da métrica de Minkowski em duas dimensões, que expressas em coordenadas

internas pode ser escrita como [21, 24, 25]

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2. \quad (5.1)$$

Iremos quantizar, na próxima seção, um campo escalar sem massa  $\phi$  do ponto de vista do tempo próprio de um observador uniformemente acelerado. Por hora, consideraremos um observador movendo-se com uma aceleração uniforme  $\alpha$  na direção  $x$ .

Assumiremos que a trajetória resultante  $x^\mu(\tau)$  será dada por

$$t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \quad (5.2)$$

e

$$x(\tau) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau). \quad (5.3)$$

Isto corresponde a uma aceleração constante, visto que,

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \Rightarrow \begin{cases} a^t &= \alpha \sinh(\alpha\tau) \\ a^x &= \alpha \cosh(\alpha\tau) \end{cases} \quad (5.4)$$

e, conseqüentemente,

$$\sqrt{a_\mu a^\mu} = \sqrt{-\alpha^2 \sinh^2(\alpha\tau) + \alpha^2 \cosh^2(\alpha\tau)} = \alpha. \quad (5.5)$$

A trajetória do observador acelerado obedece à relação

$$x^2(\tau) = t^2(\tau) + \alpha^2, \quad (5.6)$$

e, então, descreve um hiperboloide assintótico para as trajetórias nulas  $x = -t$  no passado e  $x = t$  no futuro.

Podemos, agora, escolher novas coordenadas  $(\eta, \xi)$  no espaço-tempo bidimensional de Minkowski que são adaptadas para o movimento acelerado uniforme.

Escolheremos

$$\eta(\tau) = \frac{\alpha}{a} \tau \quad (5.7)$$

e

$$\xi(\tau) = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{a}{\alpha} \right). \quad (5.8)$$

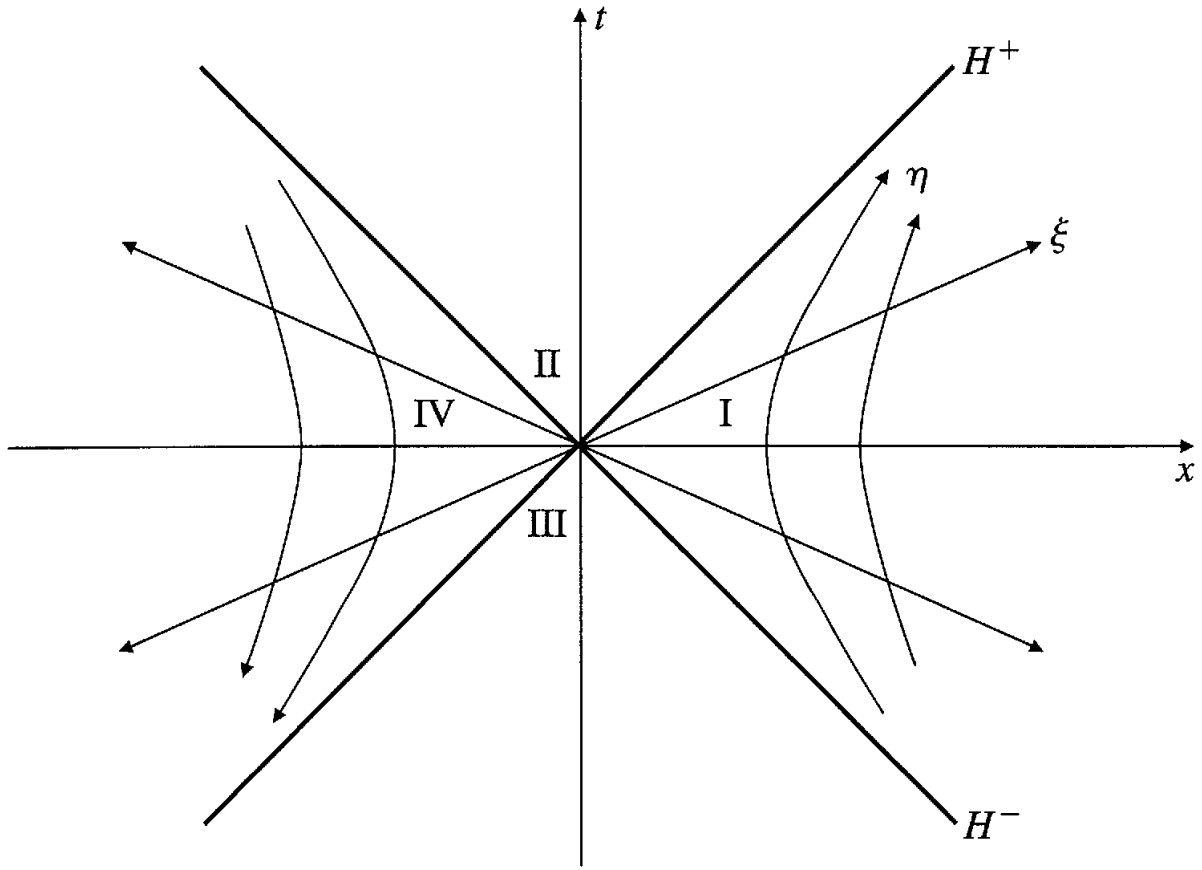


Figura 9: Espaço-tempo de Minkowski em coordenadas de Rindler. A região I é a região acessível por um observador com aceleração constante na direção  $x$  positivo. As coordenadas  $(\eta, \xi)$  podem ser usadas na região I, ou separadamente na região IV. Os pontos da região I são marcados no sentido oposto da região IV (ou vice-versa). O campo vetorial  $\partial_\eta$  correspondem aos geradores da simetria de calibre de Lorentz. O horizonte  $H^\pm$  são horizontes de *Killing* para este campo vetorial, e também, representam as fronteiras do passado e do futuro como visto por um observador de Rindler.

Com isso,

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \quad (5.9)$$

e

$$x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta), \quad (5.10)$$

para  $x > |t|$ .

As novas coordenadas  $\eta$  e  $\xi$  possuem os raios de ação que atingem as regiões

$$-\infty < \eta, \quad (5.11)$$

e

$$\xi > +\infty. \quad (5.12)$$

e cobrem a cunha  $x > |t|$ , rotulada como região I na figura 9.

Nestas coordenadas, a trajetória com aceleração constante (equações (5.2) e (5.2)) é dada por

$$\eta(\tau) = \frac{\alpha}{a}\tau, \quad (5.13)$$

e

$$\xi(\tau) = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{\alpha}{a} \right). \quad (5.14)$$

Dessa forma, percebemos que  $\eta$  é proporcional ao tempo próprio  $\tau$ , e  $\xi$  é um valor constante.

Em particular, um observador com  $\alpha = a$  move-se ao longo da curva

$$\eta = \tau, \quad (5.15)$$

e

$$\xi = 0. \quad (5.16)$$

A métrica nestas coordenadas toma a forma

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2). \quad (5.17)$$

Em resumo, na métrica acima (5.17), conforme citado anteriormente, o espaço-tempo de Rindler é representado pela parte coberta pela região I do diagrama (9), ou seja, o espaço-tempo de Rindler nada mais é que uma parte do espaço-tempo de Minkowski, e um observador de Rindler, na verdade, é um observador que move-se ao longo de uma curva com aceleração constante, tal como a descrita pela equação (5.8).

## 5.2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR

O princípio da mínima ação aplicado em um campo nos fornece as equações clássicas do movimento relativas a este campo. Por meio dele, também, podemos fazer o processo de transição entre a mecânica clássica e a mecânica quântica.

Destá forma, consideraremos em nossa discussão sobre teoria quântica de campos o tratamento formal de um campo escalar denominado de campo real de Klein-Gordon. Partiremos da ação definida para este campo e de sua quantização. Também levaremos em conta a definição do campo escalar em termos de operadores que obedecem as regras canônicas de comutação.

Desconsideraremos o termo de massa deste campo.

Sendo assim, para quantizar o campo escalar sem massa  $\phi(x, t)$  partiremos da definição de sua ação, que é da forma<sup>1</sup>

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \sqrt{-g}. \quad (5.18)$$

Esta ação é invariante sob transformações do tipo

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(t, x) g_{\mu\nu}, \quad (5.19)$$

de modo que são feitas as seguintes transformações na determinante da métrica  $\sqrt{-g}$  e na métrica contra-variante  $g^{\mu\nu}$  [47]:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &\rightarrow \Omega^2 \sqrt{-g}, \\ g^{\mu\nu} &\rightarrow \Omega^{-2} g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

É fácil perceber que  $\Omega^2$  se anula na ação. Por essa razão o acoplamento de um campo escalar sem massa no espaço-tempo de Minkowski em (1+1)-dimensões é um acoplamento conforme, e isto resulta em uma simplificação significativa na teoria [47].

Para o caso de Rindler, perceba que o fator  $\exp(2a\xi)$  é este fator  $\Omega^2$ .

Esta conformidade permite-nos escrever a ação (5.18) de forma equivalente tanto nas coordenadas  $(x, t)$  como nas coordenadas  $(\eta, \xi)$ :

$$S = \frac{1}{2} \int [(\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2] dt dx \quad (5.21)$$

e

$$S = \frac{1}{2} \int [(\partial_\eta \phi)^2 - (\partial_\xi \phi)^2] d\eta d\xi. \quad (5.22)$$

As equações clássicas de movimento do observador estático e do observador acelerado,

---

<sup>1</sup>Esta ação é válida para qualquer campo escalar sem massa.

respectivamente, são:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (5.23)$$

e

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0, \quad (5.24)$$

e possuem, respectivamente, soluções gerais do tipo [47]

$$\phi(t, x) = A(t - x) + B(t + x) \quad (5.25)$$

e

$$\phi(\eta, \xi) = P(\eta - \xi) + Q(\eta + \xi), \quad (5.26)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $P$  e  $Q$  são funções suaves arbitrárias.

As equações (5.23) e (5.24) são equações conhecidas como equações de Klein-Gordon para um campo sem massa.

Para simplificar as equações de movimento é conveniente usarmos a decomposição espacial de Fourier,

$$\phi(x, t) = \int \frac{d\kappa}{(2\pi)^{1/2}} e^{i\kappa \cdot x} \phi_\kappa(t), \quad (5.27)$$

o que nos permite escrever as equações de movimento como equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Para o observador estático, podemos reescrever a equação de movimento (5.23) como

$$\ddot{\phi}_\kappa + \kappa^2 \phi_\kappa = 0. \quad (5.28)$$

Em outras palavras, cada função complexa  $\phi_\kappa(t)$  satisfaz a equação de um oscilador harmônico com frequência

$$\omega_\kappa \equiv |\kappa|. \quad (5.29)$$

As funções  $\phi_\kappa(t)$  são chamadas de modos de Fourier do campo  $\phi$ . O mesmo ocorre para o observador acelerado.

O processo de quantização<sup>2</sup> deste campo é relativamente simples, e é o mesmo tanto

---

<sup>2</sup>Esse processo pode ser visto com relativa riqueza de detalhes em [48, 49, 50, 51, 52].

para  $(x, t)$  quanto para  $(\eta, \xi)$ . O primeiro passo é transformar o campo  $\phi(x, t)$  no operador  $\widehat{\phi}(x, t)$ . Automaticamente,  $\phi_k(t)$  também transforma-se no operador  $\widehat{\phi}_\kappa(t)$ .

Estes operadores devem obedecer às regras usuais de comutação [48, 49, 50, 51, 52, 53]:

$$\begin{aligned} [\widehat{\phi}(x), \widehat{\phi}(x')] &= 0, \\ [\widehat{\pi}(x), \widehat{\phi}(x')] &= 0, \\ [\widehat{\phi}(x), \widehat{\pi}(x')] &= i\delta(x - x'). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Uma forma geral para o operador  $\widehat{\phi}_\kappa(t)$  é escrevê-lo em termos dos operadores de criação  $\widehat{a}^\dagger$  e aniquilação  $\widehat{a}$  da forma

$$\phi_\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2|\kappa|}} \left[ \widehat{a}_\kappa \cdot e^{-i|\kappa|t} + \widehat{a}_\kappa^\dagger \cdot e^{i|\kappa|t} \right] \quad (5.31)$$

De modo que,

$$\widehat{\phi}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\kappa|}} \left[ e^{-i|\kappa|t+i|\kappa|x} \cdot \widehat{a}_\kappa + e^{i|\kappa|t-i|\kappa|x} \cdot \widehat{a}_\kappa^\dagger \right]. \quad (5.32)$$

Esta relação é chamada de modo de expansão de  $\widehat{\phi}$ .

Estes operadores  $\widehat{a}$  e  $\widehat{a}^\dagger$  também obedecem às regras usuais de comutação [48, 49, 50, 51, 52, 53]:

$$\begin{aligned} [\widehat{a}(x), \widehat{a}(x')] &= 0, \\ [\widehat{a}^\dagger(x), \widehat{a}^\dagger(x')] &= 0, \\ [\widehat{a}(x), \widehat{a}^\dagger(x')] &= \delta^{(n-1)}(x - x'). \end{aligned} \quad (5.33)$$

O estado de vácuo em  $(x, t)$ , o qual denotaremos por  $|0_M\rangle$ , é definido como

$$\widehat{a}_\kappa |0_M\rangle = 0 \quad \text{para todo } \kappa. \quad (5.34)$$

A expansão no sistema de coordenadas acelerado tem a mesma forma:

$$\widehat{\phi}(\eta, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\Omega|}} \left[ e^{-i|\Omega|\eta+i|\Omega|\xi} \cdot \widehat{b}_\Omega + e^{i|\Omega|\eta-i|\Omega|\xi} \cdot \widehat{b}_\Omega^\dagger \right]. \quad (5.35)$$

Isso nos fornece o operador  $\widehat{\phi}$  em termos de duas bases distintas de funções com operadores de criação e aniquilação diferentes.

O estado de vácuo no sistema de coordenadas acelerado  $|0_R\rangle$  (vácuo de Rindler) é



definido por

$$\widehat{b}_\kappa |0_R\rangle = 0 \quad \text{para todo } \kappa. \quad (5.36)$$

Podemos, agora, introduzir um novo conjunto de coordenadas conhecidas como coordenadas de cone de luz,

$$\bar{u} \equiv t - x, \quad (5.37)$$

$$\bar{v} \equiv t + x, \quad (5.38)$$

$$u \equiv \eta - \xi \quad (5.39)$$

e

$$v \equiv \eta + \xi. \quad (5.40)$$

Substituindo as equações (5.9) e (5.10) na equação (5.37) e também usando a equação (5.39), encontraremos

$$\bar{u} = -\frac{e^{-au}}{a}. \quad (5.41)$$

Agora substituindo as mesmas equações (5.9) e (5.10) na equação (5.38) e usando desta vez a equação (5.40), encontraremos

$$\bar{v} = \frac{e^{av}}{a}. \quad (5.42)$$

Que é a relação entre o sistema de coordenadas do observador estático e o sistema de coordenadas do observador acelerado.

Pelas equações (5.9) e (5.10), temos que

$$2\xi = v - u. \quad (5.43)$$

O que nos permite escrevermos a métrica (5.17) como

$$ds^2 = e^{a(v-u)}(-d\eta^2 + d\xi^2). \quad (5.44)$$

Desta maneira torna-se trivial perceber que esta métrica pode ser reescrita equivalente-

mente de duas formas, tanto em termos de  $v$  e  $u$  como em termos de  $\bar{v}$  e  $\bar{u}$ :

$$ds^2 = -e^{a(v-u)} du dv \quad (5.45)$$

ou

$$ds^2 = -d\bar{u}d\bar{v}. \quad (5.46)$$

Explicitando, assim, a conformidade da métrica.

De posse disto encontramos que as equações de campo para os dois observadores expressas neste sistema de coordenadas são

$$\frac{\partial^2}{\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{v}}}\hat{\phi}(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad (5.47)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial_u\partial_v}\hat{\phi}(u, v) = 0, \quad (5.48)$$

e suas respectivas soluções são

$$\hat{\phi}(\bar{u}, \bar{v}) = \hat{A}(\bar{u}) + \hat{B}(\bar{v}) \quad (5.49)$$

e

$$\hat{\phi}(u, v) = \hat{P}(u) + \hat{Q}(v). \quad (5.50)$$

Desta forma, as equações para o campo  $\hat{\phi}$  podem ser expressas por

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, x) = & \int_{-\infty}^0 \frac{d\kappa}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\kappa|}} [e^{-i\kappa t + i\kappa x} \cdot \hat{a}_\kappa + e^{i\kappa t - i\kappa x} \cdot \hat{a}_\kappa^\dagger] \\ & + \int_0^{+\infty} \frac{d\kappa}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\kappa|}} [e^{-i\kappa t + i\kappa x} \cdot \hat{a}_\kappa + e^{i\kappa t - i\kappa x} \cdot \hat{a}_\kappa^\dagger]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Agora introduziremos  $\omega = |\kappa|$  como uma variável de integração que cobre  $0 < \omega < +\infty$  para obtermos a expressão

$$\hat{\phi}(\bar{u}, \bar{v}) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [e^{-i\omega\bar{u}} \cdot \hat{a}_\omega + e^{i\omega\bar{u}} \cdot \hat{a}_\omega^\dagger + e^{-i\omega\bar{v}} \cdot \hat{a}_{-\omega} + e^{i\omega\bar{v}} \cdot \hat{a}_{-\omega}^\dagger]. \quad (5.52)$$

A expressão (5.52) acima, nos explicita o campo  $\hat{\phi}(\bar{u}, \bar{v})$  como uma soma de funções de  $\bar{u}$  e de funções de  $\bar{v}$ . Perceba que se compararmos a equação (5.52) com a equação (5.49), podemos notar, então, que  $\hat{A}(\bar{u})$  é uma combinação linear dos operadores  $\hat{a}_\omega$  e  $\hat{a}_\omega^\dagger$  com

momentos positivos  $\omega$  e  $\widehat{B}(\bar{v})$ , por sua vez, é uma combinação linear dos operadores  $\widehat{a}_{-\omega}$  e  $\widehat{a}_{-\omega}^\dagger$  com momentos negativos  $-\omega$  [47].

Sendo assim, podemos escrever explicitamente os valores de  $\widehat{A}(\bar{u})$  e  $\widehat{B}(\bar{v})$  como

$$\widehat{A}(\bar{u}) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [e^{-i\omega\bar{u}} \cdot \widehat{a}_\omega + e^{i\omega\bar{u}} \cdot \widehat{a}_\omega^\dagger] \quad (5.53)$$

e

$$\widehat{B}(\bar{v}) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\omega|}} [e^{-i\omega\bar{v}} \cdot \widehat{a}_{-\omega} + e^{i\omega\bar{v}} \cdot \widehat{a}_{-\omega}^\dagger]. \quad (5.54)$$

Fazendo o mesmo procedimento descrito acima para o campo  $\widehat{\phi}(\bar{u}, \bar{v})$  no sistema de coordenadas de Minkowski para o campo  $\widehat{\phi}(u, v)$  no sistema de coordenadas de Rindler encontramos  $\widehat{P}(u)$  e  $\widehat{Q}(v)$  da forma:

$$\widehat{P}(u) = \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} [e^{-i\Omega u} \cdot \widehat{a}_\Omega + e^{i\Omega u} \cdot \widehat{a}_\Omega^\dagger] \quad (5.55)$$

e

$$\widehat{Q}(v) = \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} [e^{-i\Omega v} \cdot \widehat{a}_{-\Omega} + e^{i\Omega v} \cdot \widehat{a}_{-\Omega}^\dagger]. \quad (5.56)$$

Introduzimos  $\Omega$  apenas para diferenciar o cenário de Rindler do de Minkowski.

As relações entre os operadores  $\widehat{a}$  e  $\widehat{a}^\dagger$  e  $\widehat{b}$  e  $\widehat{b}^\dagger$  são obtidas através das *transformações de Bogolyubov* [54]. Uma vez que as transformações de coordenadas (5.42) não misturam  $u$  e  $v$ , podemos escrever a identidade

$$\widehat{\phi}(u, v) = \widehat{A}(\bar{u}(u)) + \widehat{B}(\bar{v}(v)) = \widehat{P}(u) + \widehat{Q}(v). \quad (5.57)$$

Comparando os lados da igualdade de (5.57) percebemos claramente que

$$\widehat{A}(\bar{u}(u)) = \widehat{P}(u) \quad (5.58)$$

e

$$\widehat{B}(\bar{v}(v)) = \widehat{Q}(v). \quad (5.59)$$

Isso porque  $\widehat{A}$  só é função de  $\bar{u}$ , que por sua vez é função apenas de  $u$ . O mesmo ocorre para  $\widehat{P}$ , que é função de  $\bar{v}$  que unicamente depende de  $v$ .

Comparando as expressões (5.53) e (5.53) com as expressões (5.55) e (5.55), respectivamente, encontramos que os operadores  $\widehat{a}_\omega$  e  $\widehat{a}_\omega^\dagger$  com momento positivo  $\omega$  são expressos

pelos operadores  $\widehat{b}_\Omega$  e  $\widehat{b}_\Omega^\dagger$ , também, com momento positivo  $\Omega$ , e que, os operadores  $\widehat{a}_{-\omega}$  e  $\widehat{a}_{-\omega}^\dagger$  com momento negativo ( $-\omega$ ) são expressos pelos operadores  $\widehat{b}_{-\Omega}$  e  $\widehat{b}_{-\Omega}^\dagger$ , que possuem, também, momento negativo ( $-\Omega$ ), ou seja, operadores com momentos positivos e negativos não se misturam [47].

A relação  $\widehat{A}(\bar{u}) = \widehat{P}(u)$  é então reescrita como

$$\widehat{A}(\bar{u}) = \widehat{P}(u)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [e^{-i\omega\bar{u}} \cdot \widehat{a}_\omega + e^{i\omega\bar{u}} \cdot \widehat{a}_\omega^\dagger] = \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} [e^{-i\Omega u} \cdot \widehat{a}_\Omega + e^{i\Omega u} \cdot \widehat{a}_\Omega^\dagger]. \quad (5.60)$$

Donde, aplicando a transformada de Fourier obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(2\pi)^{1/2}} e^{i\Omega u} \cdot \widehat{P}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \begin{cases} \widehat{b}_\Omega & \Omega > 0, \\ \widehat{b}_\Omega^\dagger & \Omega < 0. \end{cases} \quad (5.61)$$

Que ainda pode ser compreendida como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(2\pi)^{1/2}} e^{i\Omega u} \cdot \widehat{A}(\bar{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(2\pi)^{1/2}} e^{i\Omega u} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [e^{-i\omega\bar{u}} \cdot \widehat{a}_\omega + e^{i\omega\bar{u}} \cdot \widehat{a}_\omega^\dagger] \quad (5.62)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\pi} [e^{i\Omega u - i\omega\bar{u}} \cdot \widehat{a}_\omega + e^{i\Omega u + i\omega\bar{u}} \cdot \widehat{a}_\omega^\dagger],$$

ou, introduzindo a função auxiliar  $f(\omega, \Omega)$ , como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(2\pi)^{1/2}} e^{i\Omega u} \cdot \widehat{A}(\bar{u}) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} [f(\omega, \Omega) \cdot \widehat{a}_\omega + f(-\omega, \Omega) \cdot \widehat{a}_\omega^\dagger], \quad (5.63)$$

onde

$$f(\omega, \Omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\pi} e^{i\Omega u - i\omega\bar{u}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\pi} e^{i\Omega u - i\frac{\omega}{a}e^{-au}}. \quad (5.64)$$

Comparando as equações (5.61) e (5.63) (restringindo  $\Omega$  aos positivos) obtemos as relações entre  $\widehat{a}_\omega^\dagger$ ,  $\widehat{a}_\omega$  e  $\widehat{b}_\Omega$  como sendo

$$\widehat{b}_\omega = \int_0^{+\infty} d\omega [\alpha_{\omega\Omega} \cdot \widehat{a}_\omega + \beta_{\omega\Omega} \cdot \widehat{a}_\omega^\dagger], \quad (5.65)$$

onde os coeficientes  $\alpha_{\omega\Omega}$  e  $\beta_{\omega\Omega}$  serão dados por

$$\alpha_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} f(\omega, \Omega) \quad (5.66)$$

e

$$\beta_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} f(-\omega, \Omega), \quad (5.67)$$

respectivamente. A relação entre  $\hat{a}_{-\omega}$ ,  $\hat{a}_{-\omega}^\dagger$ ,  $\hat{b}_{-\Omega}$  e  $\hat{b}_{-\Omega}^\dagger$  é obtida a partir da relação (5.59). Isto nos permite calcular a densidade de partículas medida por um observador de Rindler, definindo o operador número  $\hat{N}_\Omega \equiv \hat{b}_\Omega^\dagger \cdot \hat{b}_\Omega$  [48, 49, 50].

### 5.3 DENSIDADE DE PARTÍCULAS

Posto que o vácuo  $|0_M\rangle$  e  $|0_R\rangle$  correspondentes aos operadores  $\hat{a}_\omega$  e  $\hat{b}_\Omega$  são diferentes, o  $a$ -vácuo é um estado com  $a$ -partículas e vice-versa. Calculemos então a densidade de partículas no estado  $a$ -vácuo.

O operador número  $b$ -partícula é  $\hat{N}_\Omega \equiv \hat{b}_\Omega^\dagger \cdot \hat{b}_\Omega$ , assim, o número médio de partículas no  $a$ -vácuo  $|0_M\rangle$  é igual ao valor esperado de  $\hat{N}_\Omega$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle N_\Omega \rangle &= \langle 0_M | \hat{b}_\Omega^\dagger \cdot \hat{b}_\Omega | 0_M \rangle \\ &= \langle 0_M | \left( \int d\omega [\alpha_{\omega\Omega}^* \cdot \hat{a}_\omega^\dagger + \beta_{\omega\Omega} \cdot \hat{a}_\omega] \right) \left( \int d\omega' [\alpha_{\omega'\Omega} \cdot \hat{a}_{\omega'} + \beta_{\omega'\Omega} \cdot \hat{a}_{\omega'}^\dagger] \right) | 0_M \rangle \\ &= \int d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Este é o número de partículas medido pelo observador acelerado.

Ao notarmos que

$$f(\omega, \Omega) = f(-\omega, \Omega) \exp\left(\frac{\pi\Omega}{a}\right), \quad (5.69)$$

para  $\omega > 0$  e  $a > 0$ , e usarmos a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\alpha_{\omega\Omega} \cdot \alpha_{\omega\Omega'}^* - \beta_{\omega\Omega} \cdot \beta_{\omega\Omega'}^*) = \delta(\Omega - \Omega'), \quad (5.70)$$

podemos substituir a equação (5.64) em (5.60) e usarmos a equação (5.69) para obtermos

$$\begin{aligned} \delta(\Omega - \Omega') &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} [f(\omega, \Omega) f^*(\omega, \Omega') - f(-\omega, \Omega) f^*(\omega, \Omega')] \\ &= \left[ \exp\left(\frac{\pi\Omega + \pi\Omega'}{a}\right) - 1 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} f^*(-\omega, \Omega) f(-\omega, \Omega'). \end{aligned} \quad (5.71)$$

A integral do lado direito da última linha da equação acima pode ser solucionada

como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\sqrt{\Omega\Omega'}}{\omega} f^*(-\omega, \Omega) f(-\omega, \Omega') = \frac{\delta(\Omega - \Omega')}{\left[\exp\left(\frac{\pi\Omega + \pi\Omega'}{a}\right) - 1\right]}. \quad (5.72)$$

Agora fica fácil solucionar a equação (5.68). Perceba que

$$\begin{aligned} \langle N_\Omega \rangle &= \int d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2 \\ &= \int d\omega \frac{\Omega}{\omega} |f(-\omega, \Omega)|^2 \\ &= \left[ \exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1 \right]^{-1} \delta(0). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Como  $\langle N_\Omega \rangle$  mede o número total de partículas do espaço inteiro, obviamente, esperamos que ele seja divergente, entretanto, a densidade de  $b$ -partículas  $n_\Omega$  com momento  $\Omega$  é calculada como sendo

$$\langle N_\Omega \rangle = n_\Omega \delta(0), \quad (5.74)$$

desta forma, ao compararmos a equação (5.73) com a equação (5.74), percebemos que

$$n_\Omega = \frac{1}{\left[ \exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1 \right]}. \quad (5.75)$$

E esta é exatamente a fórmula da distribuição da radiação de corpo negro para a temperatura [43, 42]

$$T \equiv \frac{a}{2\pi}. \quad (5.76)$$

$T$  é conhecida como a **temperatura de Unruh**.

Sendo assim, encontramos que um observador acelerado detecta partículas quando o campo  $\hat{\phi}$  está no estado de vácuo de Minkowisk  $|0_M\rangle$ . Estas partículas observadas podem ter qualquer momento  $\Omega$ , no entanto, é pouco provável o registro de partículas com altas energias.

No próximo capítulo estudaremos que é possível a medição de radiação emanada de buracos negros. Veremos que existe a possibilidade de usarmos o efeito Unruh para a construção de um equipamento capaz de medir esta radiação.



## 6 *EFEITO HAWKING*

Reportamos no capítulo 4 que existe uma familiaridade entre as leis usuais da termodinâmica e as leis que descrevem a dinâmica dos buracos negros, entretanto, em um sistema termodinâmico quando um objeto possui temperatura finita ele emite radiação térmica e como consequência ele tem sua massa reduzida no decorrer do tempo, se contrapondo ao comportamento clássico dos buracos negros que afirma que a massa desses objetos é irreduzível, partindo da ideia clássica, imposta pela relatividade geral, que nenhum tipo de matéria pode escapar a partir de seu horizonte de eventos.

A partir deste conflito surgem os eminentes questionamentos: será que a tais objetos podemos realmente associar termos como temperatura e entropia como conjecturou Bekenstein? Ou essa semelhança trata-se apenas de uma coincidência matemática sem implicações físicas?

A resposta para estas perguntas veio após Hawking rever os estudos sobre a formação de buracos negros levando em conta os princípios da mecânica quântica. Ele chegou à conclusão que observadores estáticos distantes mediriam um fluxo de partículas elementares saindo do buraco negro. Para buracos negros estáticos esse fluxo de partículas possui uma temperatura bem definida. Esta temperatura é inversamente proporcional à massa dele, o que faz com que sua entropia seja de fato proporcional à sua área, conforme a conjectura de Bekenstein. A energia para o processo de irradiação seria fornecida pelo próprio buraco negro que, em consequência, “evaporaria”. Este fenômeno ficou conhecido como efeito de Hawking. [3, 6, 7, 8, 10, 18, 19, 20, 21, 24, 25].

Evidências teóricas suplementares foram fornecidas logo depois pelo canadense William Unruh, que ao revisar os estudos de Hawking acabou descobrindo um novo fenômeno que aborda que observadores uniformemente acelerados em espaços-tempo planos detectam no estado de vácuo de Minkowski um estado térmico misto (e não um estado puro, como era de se imaginar), ou seja, percebem radiação térmica [38, 45, 55], conforme foi exposto no capítulo 5.



Uma ressalva importante a respeito da diferença entre o efeito Hawking e o efeito Unruh é que eles correm em espaços-tempo distintos, ou seja, o Unruh é um fenômeno que ocorre no espaço-tempo plano, enquanto o Hawking ocorre no espaço-tempo curvo.

## 6.1 RADIAÇÃO DE HAWKING

Em teorias quânticas partículas são excitações de campos quânticos, de modo que, consideraremos um campo escalar  $\psi$  na presença de um buraco negro carregado de massa  $M$  e com carga  $Q$ . Vimos no capítulo 2 que estes buracos negros possuem um elemento de linha que pode ser escrito da forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + d\Omega^2. \quad (6.1)$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}\theta d\phi^2.$$

Para simplificar os cálculos, assumiremos que o campo  $\psi$  é independente das variáveis angulares  $\theta$  e  $\phi$ , desta maneira reteremos toda a atenção para uma seção de  $(1 + 1)$  dimensões do espaço tempo com coordenadas  $(t, r)$ .

O elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (6.2)$$

onde  $x^0 \equiv t$  e  $x^1 \equiv r$ , envolve a métrica reduzida

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} - \left[ 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right] & 0 \\ 0 & \left( \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \right) \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

A ação para um acoplamento mínimo de um campo escalar sem massa é [47]

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \sqrt{-g}. \quad (6.4)$$

Vimos no capítulo 5 que esta ação é invariante sob transformações do tipo

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(t, x) g_{\mu\nu}, \quad (6.5)$$

o que permite que as transformações na determinante da métrica  $\sqrt{-g}$  e na métrica contra-variante  $g^{\mu\nu}$  do tipo

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &\rightarrow \Omega^2 \sqrt{-g}, \\ g^{\mu\nu} &\rightarrow \Omega^{-2} g^{\mu\nu},\end{aligned}\tag{6.6}$$

não modifiquem a ação.

Na seção 5.1 encontramos um sistema de coordenadas adequado aquela situação, similarmente necessitamos de um sistema de coordenadas que se adeque as nossas necessidades. Por isso faremos algumas transformações de coordenadas a ponto de encontrarmos a métrica escrita de forma conforme, como no capítulo 5.

Na secção 3.1 vimos que a métrica de Reissner-Nordström pode ser escrita em coordenadas de tartaruga da forma:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}(-dt^2 + dr^{*2}),\tag{6.7}$$

caso desconsideremos as coordenadas angulares.

Agora definiremos as coordenadas  $u$  e  $v$  da forma

$$u \equiv t - r^*\tag{6.8}$$

e

$$v \equiv t + r^*,\tag{6.9}$$

de modo que a métrica (6.7) se tornará

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} du dv.\tag{6.10}$$

O sistema de coordenadas  $(t, r^*)$  possui relativa vantagem para a descrição de  $r^* \rightarrow \infty$ , ela é assintoticamente coincidente com o sistema de coordenadas de Minkovisk  $(t, r)$ , naturalmente definido para as regiões a partir do horizonte de eventos do buraco negro. Porém, as coordenadas  $(t, r^*)$  não cobrem o interior do buraco negro,  $r < r_+$ , de modo que devemos encontrar um sistema de coordenadas que funcione nessa região.

Uma forma adequada de descrever a região além do horizonte é considerando as transformações de Kruskal expressas nas coordenadas

$$\bar{u} = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u}\tag{6.11}$$

e

$$\bar{v} = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa v}, \quad (6.12)$$

de modo que

$$u = \frac{\ln(\kappa \bar{u})}{\kappa} \quad (6.13)$$

e

$$v = \frac{\ln(\bar{v})}{\kappa}. \quad (6.14)$$

Percebemos também que

$$du = e^{\kappa u} d\bar{u} \quad (6.15)$$

e

$$dv = e^{-\kappa v} d\bar{v}. \quad (6.16)$$

Das equações (6.15) e (6.16), imediatamente encontramos que o elemento de linha (6.10) pode ser reescrito como

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} e^{\kappa(u-v)} d\bar{u} d\bar{v}. \quad (6.17)$$

Agora inserindo o valor de  $u$  expresso pela equação (6.8) e o de  $v$  expresso pela equação (6.9), respectivamente, nas equações (6.11) e (6.12) reescrevemos a equação (6.17) acima como

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} e^{-2\kappa r^*} d\bar{u} d\bar{v}. \quad (6.18)$$

No entanto, a relação (3.6) estabelece que

$$r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-),$$

além disso, as equações (3.1)

$$\left( r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \right)$$

e (4.20)

$$\left( \kappa = (M^2 - Q^2)^{1/2} (M + \sqrt{M^2 - Q^2})^{-2} \right)$$

conjuntamente estabelecem que

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad (6.19)$$

o que permite nos simplificar o expoente  $-2\kappa r^*$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -2\kappa r^* &= -2\kappa r - 2 \frac{(r_+ - r_-)}{2r_+^2} \frac{r_+^2}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_+) \\ &\quad + 2 \frac{(r_+ - r_-)}{2r_+^2} \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_-) \\ &= -2\kappa r - \ln(r - r_+) + \frac{r_-^2}{r_+^2} \ln(r - r_-) \end{aligned} \quad (6.20)$$

ou

$$-2\kappa r^* = -2\kappa r + \ln \left[ \frac{(r - r_-)^{\frac{r_-^2}{r_+^2}}}{(r - r_+)} \right]. \quad (6.21)$$

Desta maneira,

$$e^{-2\kappa r^*} = \frac{(r - r_-)^{\frac{r_-^2}{r_+^2}}}{(r - r_+)} e^{-2\kappa r}. \quad (6.22)$$

Este traquejo permite-nos reescrever o elemento de linha (6.18) como

$$ds^2 = -\frac{\Delta (r - r_-)^{\frac{r_-^2}{r_+^2}}}{r^2 (r - r_+)} e^{-2\kappa r} d\bar{u}d\bar{v}. \quad (6.23)$$

Mas, relembando também que

$$\Delta = (r - r_+) (r - r_-)$$

(pela equação (2.67)) o elemento de linha (6.23) pode ser reescrito como

$$ds^2 = -\frac{(r - r_+) (r - r_-) (r - r_-)^{\frac{r_-^2}{r_+^2}}}{r^2 (r - r_+)} d\bar{u}d\bar{v}, \quad (6.24)$$

ou, mais simplificadamente, como

$$ds^2 = -\frac{1}{r^2} (r - r_-)^{1 + \frac{r_-^2}{r_+^2}} e^{-2\kappa r} d\bar{u}d\bar{v}. \quad (6.25)$$

Deste modo, percebemos que a métrica de Kruskal é conformemente plana. Isto implica que a ação e as equações clássicas de campo para um campo conformemente acoplado no sistema de coordenadas de Kruskal tem a mesma forma das equações obtidas pelo sistema de coordenadas de tartaruga. Sendo assim, a solução geral para o campo  $\psi$

é

$$\widehat{\psi}(\bar{u}, \bar{v}) = \widehat{A}(\bar{u}) + \widehat{B}(\bar{v}). \quad (6.26)$$

Notemos que as definições (6.11) e (6.12) são similares às definições (5.42) do sistema de coordenadas próprias do observador uniformemente acelerado. A analogia formal será a mesma se fizermos  $a \rightarrow \kappa$ . Um observador em queda livre tem aceleração própria nula, enquanto, um observador em uma posição espacial fixa relativa ao buraco negro deve observá-lo com uma aceleração própria constante diferente de zero.

Recapitulando: o sistema de coordenadas de Kruskal representa as coordenadas de um observador localmente inercial, enquanto o sistema de coordenadas de tartaruga representa o sistema de coordenadas do observador localmente acelerado.

Expostas as analogias entre a matemática relativas a estes dois efeitos não é difícil perceber que o resultado obtido para a temperatura do buraco negro será [56]

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (6.27)$$

$T_H$  é a chamada de **temperatura de Hawking**. A obtenção desta temperatura nos diz que um buraco negro emite radiação, também chamada de **radiação de Hawking**, que é proporcional a gravidade superficial  $\kappa$  [9, 10, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 34, 35, 46].

Note que para o caso do buraco negro de Reissner-Nordström extremo,  $M = |Q|$ , a gravidade superficial é zero, o que implica em, além de apresentar uma singularidade nua, conforme observamos no capítulo 4, apresenta também uma temperatura zero, expressamente proibida pela lei zero da termodinâmica. Estreitando ainda mais o elo entre estas teorias.

Por fim, perceba também que a quantidade  $\kappa$ , do mesmo modo que alcançada na secção 4.1 pode ser alcançada para os outros tipos de buracos negros. Ou seja, a fórmula encontrada para esse caso trata-se de uma fórmula generalizada para os demais casos. De modo que podemos também generalizar o resultado obtido acima para as demais formulações de buracos negros.

## 6.2 RELAÇÃO ALTERNATIVA ENTRE O EFEITO UNRUH E O EFEITO HAWKING

O efeito Unruh foi obtido na tentativa de um melhor entendimento do efeito Hawking, entretanto eles possuem naturezas diferentes. Como já ressaltamos em outras oportunidades, eles ocorrem em espaços-tempo distintos e descrevem fenômenos completamente distintos. Todavia, nesta seção tentaremos mostrar uma certa familiaridade, além da familiaridade matemática, entre estes dois efeitos.

Consideremos, então, um observador estático  $O_1$  em  $r_1 > r_+$ , fora do buraco negro de Reissner-Nordström. A aceleração desse observador será relativamente alta se compararmos dimensionalmente com o raio de Schwarzschild<sup>1</sup> (veja o capítulo 4, lá está mostrada a forma de medir essa aceleração) e por isso para ele esse raio será aproximadamente plano.

Iremos assumir, de forma crucial, que o estado quântico do campo escalar  $\psi$  é o mesmo, tanto no vácuo de Minkowski como visto pelos observadores em queda livre próximo ao buraco negro. Assumir isto é razoável, uma vez que o horizonte não é uma barreira local<sup>2</sup>.

Então um observador estático terá a mesma percepção que um observador com aceleração constante em um espaço-tempo plano, e, com isso, detectará uma radiação de Unruh com temperatura de [18]

$$T_1 = \frac{a_1}{2\pi} \quad (6.28)$$

Agora consideremos um observador estático no infinito, ou a uma distância  $r_2$  muito grande se comparada ao raio de Schwarzschild. Neste caso a curvatura do espaço-tempo não pode ser negligenciada, de modo que não há razão para esperar que ele perceba uma radiação com temperatura  $a_2/2\pi$ , onde  $a_2$  seria eventualmente a aceleração em  $r_2$  [18].

Entretanto, imagine que se o observador  $O_1$  mede a radiação próximo ao horizonte e envia a informação do valor medido para o observador em  $r_2$ , esta informação chegará a  $O_2$ , mas, com um determinado fator de desvio para o vermelho associado.

Este raciocínio é análogo ao discutido na seção 4.1 quando calculamos a gravidade superficial  $\kappa$ . Para termos uma melhor clareza disto, aproximemos o observador  $O_1$  do horizonte de eventos,  $r_1 \rightarrow r_+$ , e o observador  $O_2$  afastemos ao infinito,  $r_2 \rightarrow r(\infty)$ . Deste modo, por meio desta aproximação concluímos que a aceleração medida pelo observador

---

<sup>1</sup>O raio de Schwarzschild é um conjunto de raios de curvaturas próximas ao horizonte do buraco negro.

<sup>2</sup>Um observador em queda livre não percebe nada de especial ao cruzar o horizonte.

$O_2$  será exatamente a gravidade superficial  $\kappa$ , e assim, a temperatura medida por ele será justamente

$$T_2 = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (6.29)$$

Que é exatamente a temperatura de Hawking:

$$T_2 = T_H. \quad (6.30)$$

Com isso, chegamos à construção do “aparelho medidor” de radiação de Hawking por meio do efeito Unruh.

## 6.3 EUCLIDIANIZAÇÃO DA MÉTRICA E O CÁLCULO DA TEMPERATURA

A ideia de uma aproximação Euclidiana para a gravidade quântica foi proposta por Hawking e Gibbons em 1977 [46].

Por essa aproximação, dada uma métrica de um buraco negro estático, existe um método elementar de calcular sua temperatura. O ponto chave é lembrarmos que um sistema com temperatura

$$T = \beta^{-1} \quad (6.31)$$

é periódico no tempo Euclidianizado

$$\tau = it, \quad (6.32)$$

com período  $\beta$  [33].

Agora, lembremos que a função de partição da termodinâmica é dada por [59]

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}), \quad (6.33)$$

onde  $H$  é a hamiltoniana do sistema [33].

A evolução temporal de um sistema quântico é dada por  $e^{iHt}$  [53], e o traço corresponde a imposição de uma periodicidade  $\beta$  no tempo Euclidiano.

Uma maneira interessante de examinar as proximidades do horizonte de um buraco

negro é fazendo a substituição:

$$r = r_H(1 + \rho^2), \quad (6.34)$$

onde  $r_H$  é o raio do horizonte.

Para Reissner-Nordström,

$$r_H = r_+. \quad (6.35)$$

Em termos destas substituições (6.32), (6.34) e (6.35) a métrica de Reissner-Nordström fica:

$$ds^2 = \frac{\rho^2((1 + \rho^2) - r_-)}{r_+(1 + \rho^2)^2} d\tau^2 + \frac{4r_+^3(1 + \rho^2)}{(1 + \rho^2) - r_-} d\rho^2 + r_+^2(1 + \rho^2)^2 d\Omega^2. \quad (6.36)$$

Deste modo, para analisarmos a vizinhança do horizonte iremos expandir  $\rho$  em torno de zero. Isso nos fornecerá a métrica (6.36) da forma:

$$ds^2 \simeq \frac{r_+ - r_-}{r_+} \rho^2 d\tau^2 + \frac{4r_+^3}{(r_+ - r_-)^2} d\rho^2 + r_+^2 d\Omega^2, \quad (6.37)$$

ou

$$ds^2 \simeq \frac{4r_+^3}{r_+ - r_-} \left[ d\rho^2 + \rho^2 \left( \frac{(r_+ - r_-)d\tau}{2r_+^2} \right)^2 + \frac{r_+ - r_-}{4r_+} d\Omega^2 \right], \quad (6.38)$$

Veja que

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \left( \frac{(r_+ - r_-)d\tau}{2r_+^2} \right)^2, \quad (6.39)$$

é justamente a métrica euclidiana do espaço-tempo de Rindler e será um plano em coordenadas polares se tomarmos a identificação periódica

$$\tau \rightarrow \tau + \frac{2\pi}{\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}} \quad (6.40)$$

ou seja,

$$\beta = \frac{4\pi r_+^2}{r_+ - r_-}. \quad (6.41)$$



Desta forma,

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2} = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (6.42)$$

Este método é elementar para os demais buracos negros.

## 6.4 SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA GENERALIZADA

Retomando a discussão do capítulo 4, Bekenstein foi o primeiro a propor a correlação entre as leis da termodinâmica e a lei da mecânica dos buracos negros. A respeito da relação entre o teorema da área e a redução da entropia do universo, ele propôs uma generalização para segunda lei da termodinâmica.

A entropia generalizada  $S'$  foi definida por Bekenstein como sendo a soma da entropia ordinária,  $S$ , da matéria de fora do buraco negro com a entropia do buraco negro [46, 55].

$$S' \equiv S + S_B. \quad (6.43)$$

E a **segunda lei generalizada da termodinâmica** dizendo que a entropia total do Universo nunca decresce com o passar do tempo [46, 55].

$$\Delta S' \geq 0. \quad (6.44)$$

Essa segunda lei generalizada da termodinâmica, em outras palavras, afirma que em um sistema fechado, a entropia contida na matéria ordinária somada àquela na forma de buracos negros nunca decresceria.

Apesar de a segunda lei da termodinâmica já ter sido testada e confirmada exaustivamente, sua versão generalizada tem sido apenas confrontada com experimentos mentais; afinal, não temos nenhum buraco negro disponível para usarmos em experimentos diretos. No entanto, todos os indícios teóricos apontam para sua validade [6].

Para determinarmos a fórmula que representa a entropia  $S_B$  partiremos da semelhança, já enunciada no capítulo 4, entre as equações:

$$\frac{1}{8\pi} \Delta A = \Delta M - \Omega \Delta J \quad (6.45)$$

e

$$T\Delta S = \Delta E - P\Delta V, \quad (6.46)$$

onde a primeira representa a primeira lei da dinâmica dos buracos negros e a segunda a primeira lei da termodinâmica [57].

Agora é só interligar que

$$T_H \rightarrow \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (6.47)$$

para encontrarmos que

$$S_B = \frac{A}{4}, \quad (6.48)$$

considerando, também, que a massa  $M$  tem dimensão de energia  $E$ .

Para uma apresentação completa da fórmula da entropia recuperaremos as constantes, de modo que a equação (6.48) ficará ser reescrita como [46]:

$$S = \frac{kc^3}{4G\hbar}A, \quad (6.49)$$

onde  $k$  é constante de Boltzmann,  $c$  é velocidade de propagação da luz no vácuo,  $G$  é a constante gravitacional newtoniana, e  $\hbar$  é a constante de Planck  $h$  dividida por  $2\pi$ .

Para um buraco negro  $D$ -dimensional a entropia pode ser escrita formalmente como [9, 33, 37, 35, 46]

$$S = \frac{A}{4G_D}, \quad (6.50)$$

onde  $G_D$  é a constante de Newton  $D$ -dimensional.

Estes resultados implicam em indagações que ainda necessitam de respostas. Por exemplo, não conhecemos a natureza microscópica da entropia dos buracos negros, tampouco, o que poderia estar causando sua “desordem” [6].

Embora existam outras teorias que busquem solucionar essas questões, a teoria das cordas é uma forte candidata a respondê-las. Esta teoria é uma teoria de gravitação quântica e Maldacena utilizando-a propôs uma extensão dimensional dos buracos negros, resultando em soluções análogas às soluções encontradas para branas negras [9, 33, 37, 35].



## 7 *CONSIDERAÇÕES FINAIS*

Neste trabalho utilizamos alguns dos pilares da Física desenvolvidos no século XX como ferramenta. Especificamente, à relatividade geral e à mecânica quântica. Os estudos a respeito dos buracos negros clássicos possuem soluções diretas das equações de Einstein, e no caso de buracos negros com cargas elétricas, temos, também, a utilização das equações de Maxwell, que são equações relativísticas. Revisamos as leis clássicas que descrevem a dinâmica dos buracos negros e percebemos a semelhança entre elas e as leis usuais da termodinâmica. Quando tratamos da radiação de Hawking, que é um fenômeno quântico que descreve a emissão de partículas por buracos negros, utilizamos a teoria quântica de campos, ferramenta muito importante para diversas áreas da física.

Analisamos as soluções de Reissner-Nordström, e no presente trabalho explanamos a matemática envolvida de forma detalhada. Fizemos uma análise das condições onde a métrica diverge, os casos onde a massa do buraco negro difere do valor numérico da carga, e os casos onde estas grandezas possuem a mesma magnitude. Esses casos são conhecidos como não-extremos e extremos, respectivamente. Generalizamos, também, essas soluções para cinco dimensões. Concluímos que isto é relevante pelo fato de que uma das mais promissoras teorias que propõe a unificação da teoria da relatividade com a mecânica quântica, a teoria das cordas, tem ligação direta com as soluções estendidas para cinco dimensões, conforme observou o físico teórico argentino Juan Maldacena em sua tese de doutorado no ano de 1996.

Percebemos que as teorias que descrevem os buracos negros evoluíram. A esse respeito, retratamos alguns dos principais protagonistas que contribuíram para essa evolução, desde Schwarzschild, Penrose, entre outros, no entanto, enfatizamos os trabalhos de Reissner, Nordström e Hawking.

O evento mais notório que contribuiu para a evolução da forma como se “enxergava” os buracos negros foi a descoberta feita por Hawking de que eles irradiavam. Isto revolucionou a ideia clássica de que buracos negros eram “indestrutíveis”. Com essa nova

interpretação surge a ideia de que outras propriedades termodinâmicas também eram cabíveis aos buracos negros. Neste trabalho fizemos uma breve explanação sobre isto.

Desta forma, esta dissertação contribuiu significativamente para a minha formação profissional, possibilitando-me a capacidade de buscar ferramentas necessárias para que possa futuramente engajar em pesquisas eminentes e necessárias para as etapas de especialização subsequentes a esta, além de possibilitar-me uma melhor formação para atuar, também, como professor, minha formação original, em níveis mais avançados de formação. Em síntese, este estudo faz uma revisão bibliográfica que possibilita a capacitação para o manuseio de técnicas avançadas de matemática e um significativo aprofundamento em conceitos físicos que formam uma das bases de estudo da Física na atualidade.

# REFERÊNCIAS

- [1] GREENE, B. **O universo elegante: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva.** São Paulo: Companhia das Letras, 2001.
- [2] MILONE, A. C. et al. **Introdução à Astronomia e Astrofísica.** INPE-7177-PUD/38.
- [3] CASTIÑEIRAS, J., et al. **Buracos Negros.** Scientific American Brasil, São Paulo, Gênios da Ciência, Edição 11, p. 32-39, 01 de maio 2006.
- [4] REISSNER, H. **Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einstein'schen Theorie.** 1916.
- [5] NORDSTRÖM, G. **On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory.** 1918.
- [6] CASTIÑEIRAS, J., CRISPINO, L. C. B.; MATSAS G. E. A. **Horizonte de Eventos.** Scientific American Brasil, São Paulo, v. 29, p. 50-56, 01 de outubro 2004.
- [7] MATSAS, G. E. A.; VANZELLA, D. A. T. **Partículas elementares à luz dos Buracos Negros.** Ciência Hoje, vol. 31, n° 182, 2002.
- [8] TAYLOR, E. F.; WHEELER, J. A. **Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity.** United States of America: Addison Wesley Longman, 2000.
- [9] MALDACENA, J. M. **Black Holes in String Theory.** Tese de doutorado. Faculty of Princeton University, 1996. Formato PDF. Disponível em <<http://arxiv.org/pdf/hep-th/9607235v1.pdf>>. Acessado em março de 2012.
- [10] TOWNSEND, P. K. **Black holes: Lecture notes.** Disponível em <<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9707012v1.pdf>>. Acessado em 22 de março 2012.
- [11] BLAU, M. **Lecture Notes on General Relativity,** 1999. Formato PDF. Disponível em <<http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>>.
- [12] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. SAFKO, J. **Classical mechanics.** 3th ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.
- [13] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical Dynamics of Particle and Systems.** 5th ed. United States of America: Thomson, 2004.
- [14] LANDAU, L. D.; LIFCHITZ, E. M. **Mecânica.** Brasil: Hemus, 2004.
- [15] JOSÉ, J. V.; SALETAN, E. J. **Classical Dynamics: A contemporary approach.** United States of America: Cambridge University Press, 1998.

- [16] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.** New York: Wiley, 1972.
- [17] LESSEL, B. **Geometry of Higher Dimensional Black Holes.** October 2012. Formato pdf. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1210.6191>>.
- [18] CARROLL, S. **Spacetime And Geometry: An Introduction to General Relativity.** United States of America: Addison Wesley, 2004.
- [19] RYDER, L. **Introduction to General Relativity.** United States of America, New York: Cambridge University Press, 2009.
- [20] GRÖN, Ö.; HERVIK, S. **Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology.** Berlin, Hamburg: Springer, 2007.
- [21] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity.** Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [22] NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics.** England, Bristol: Adam Hilger, 1990.
- [23] SCHUTZ, B. F. (1985). **A first course in general relativity.** 2th ed. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [24] WALD, R. M. **General Relativity.** Chicago: University of Chicago Press, 1984.
- [25] DIRAC, P. A. M. (1975). **General theory of relativity.** Reprint edition. USA: Princeton University Press, 1996.
- [26] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics.** 3th ed. New Jersey, Upper Saddle River: Pearson, 1999.
- [27] JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics.** 3th ed. New York: Wiley, 1999.
- [28] MACHADO, K. D. **Teoria do eletromagnetismo.** Ponta Grossa, Paraná: Editora UEPG, 2000. v 1.
- [29] MOHAUPT, T. **Black Holes in Supergravity and String Theory.** English. Disponível em <<http://lanl.arxiv.org/abs/hep-th/0004098>>. Acessado em maio de 2012.
- [30] BLAU, M. **Supergravity Solitons.** Vertion June 11, 2002. Formato PS. Disponível em <<http://www.itcp.trieste.it/~mblau/>>. Acessado em janeiro de 2010.
- [31] S. W., HAWKING; F., SIMON. **Duality between Electric and Magnetic Black Holes.** Formato PDF. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9504019v2>>.
- [32] CARMELI, M. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory.** New York: John Wiley & Sons, 1982.
- [33] BECKER, K.; BECKER, M.; SCHWARZ, J. H. **String Theory and M-theory: A Modern Introduction.** New York: Cambridge University Press, 2006.

- [34] DAHIA, F. L. de M. **Notas de aula da disciplina Tópicos Especiais em Relatividade Geral**. Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Física, Programa de Pós-Graduação em Física. Campina Grande. 2012.
- [35] PEET, A. W. **TASI Lectures on Black Holes in Strings Theory**. Formato PDF. Disponível em <<http://arxiv:hep-th/0008241v2>>. Acessado em maio de 2011.
- [36] NEPOMUCENO, N. J. N. **Descrição Microscópica de Entropia de Espaços Tipo Kerr-de Sitter Tridimensionais**. 2012. Dissertação (Mestrado em Física) – Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Programa de Pós-Graduação em Física, Campina Grande. 2012.
- [37] POLCHINSKI, J. **String Theory**. New York: Cambridge University Press, 1998. v.1.
- [38] CASTIÑEIRAS, J. et al. **Singularidade e informação**. Scientific American Brasil, São Paulo, Gênios da Ciência, Edição 11, p. 70-75, 01 de maio 2006.
- [39] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**. 4. ed. revisada. São Paulo: Editora Blücher, 2002. v.2.
- [40] HUANG, K. **Statistical mechanics**. 2th ed. USA: John Wiley & Sons, 1963.
- [41] SALINAS, Silvio R. A. **Introdução à Física Estatística**. 2 ed. 1. reimpr. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.
- [42] REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. Singapore: McGraw-Hill International Editions, 1985.
- [43] PATHRIA, R. K. (1972). **Statistical Mechanics**. 2th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1996.
- [44] UNRUH, W.G.; SCHÜTZHOLD, R. **Quantum Analogues: From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology**. Berlin: Springer, 2007.
- [45] UNRUH, W. G. Phys. Rev. D14, 870. 1976.
- [46] WALD, R. M. **Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics**. Chicago: The University of Chicago Press, 1994.
- [47] MUKHANOV, V. F.; WINITZKI, S. **Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds**. Lecture notes-2004. Disponível em <<http://www.math.uwaterloo.ca/~akempf/text.pdf>>. Acessado em junho de 2012.
- [48] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory**. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
- [49] KAKU, M. **Quantum field theory: a modern introduction**. New York: Oxford University Press, 1993.
- [50] ITZYKSON, C.; ZUBER J. B. **Quantum Field Theory**. McGraw-Hill International Editions, 1980.



- [51] GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field Quantization**. Springer, 1996.
- [52] GREINER, W. **Quantum Chromodynamics**. Springer, 2004.
- [53] SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**: Revised Edition. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [54] Brito, Francisco de A. **Notas de Aula da disciplina Teoria Quântica de Campos**. Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Física, Programa de Pós-Graduação em Física. Campina Grande, 2012.
- [55] WALD, R. M. **The thermodynamics of black holes**. Living [gr-qc/9912119]. 2001.
- [56] HAWKING, S. **Particle creation by black holes**. Springer-Verlag, p. 199-220, 1975.
- [57] HARTLE, J. B. **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**. San Francisco, USA: Addison Wesley, 2003.
- [58] WEINBERG, S. **Cosmology**. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- [59] ZWIEBACH, B. **A First Course in String Theory**. Cambridge University Press. 2004.
- [60] BLAU, M. **Lecture Notes on General Relativity**. Disponível em <<http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>>. Formato PDF. Acessado em janeiro de 2010.

# *APÊNDICE A – FORMA COVARIANTE DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL NO ESPAÇO-TEMPO PLANO*

A princípio definiremos as densidades de carga e corrente, conforme é definido em [16]. Supondo que nosso sistema de partículas é dado pelas posições  $x_n(t)$  e carga  $e_n$ , definimos a densidade de carga e de corrente, respectivamente, como

$$J(x, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(x - x_n(t)) \frac{\partial x_n(t)}{\partial t}, \quad (\text{A.1})$$

e

$$\epsilon(x, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(x - x_n(t)). \quad (\text{A.2})$$

Onde  $\delta^3$  é a função Delta de Dirac em 3-dimensões, definida pela seguinte afirmação:

$$\int d^3x f(x) \delta^3(x - y) = f(y). \quad (\text{A.3})$$

Assim podemos escrever  $J$  e  $\epsilon$  em forma de um único quadrivetor  $J^\alpha$  fixando

$$J^0 = \epsilon, \quad (\text{A.4})$$

$$J^\alpha = \sum_n e_n \delta^3(x - x_n(t)) \frac{\partial x_n(t)}{\partial t}. \quad (\text{A.5})$$

Ressaltando que em nossa notação  $x_n^0(t) = t$ , podemos escrever (A.5) como

$$J^\alpha = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{\partial x_n^\alpha(t')}{\partial t'}. \quad (\text{A.6})$$

A diferencial  $dt'$  pode ser substituída pelo intervalo invariante  $d\tau$ , assim a equação (A.6) fica

$$J^\alpha = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{\partial x_n^\alpha(\tau)}{d\tau}. \quad (\text{A.7})$$

Essa é a corrente escrita como um quadrivetor. Note que a componente temporal representa a densidade de carga e a componente vetorial representa a densidade de corrente.

As correntes e cargas satisfazem uma equação de conservação conhecida como equação da continuidade<sup>1</sup>. Vamos ver como essa equação aparece no formalismo de quadrivetores. Considere

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J}(x, t) &= \left[ \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(x - x_n(t)) \right] \frac{dx'_n(t)}{dt} \\ &= \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \left[ \delta^3(x - x_n(t)) \frac{dx'_n(t)}{dt} \right] \\ &= \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \left[ \delta^3(x - x_n(t)) \frac{dx_n^i}{dt} \right] \\ &= - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} [\delta(x - x_n(t))]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Logo

$$\nabla \cdot \vec{J}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha = 0. \quad (\text{A.9})$$

Com isso podemos perceber que a equação de continuidade (conservação de corrente) pode ser escrita na notação de quadrivetores como um escalar de Lorentz e portanto é preservada sobre transformações de Lorentz.

As equações de Maxwell<sup>2</sup> para um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$  produzidos por uma densidade da carga  $\epsilon$  e uma densidade de corrente  $\vec{J}$  são

$$\nabla \cdot \vec{E} = \epsilon, \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.13})$$

<sup>1</sup>Vide [27].

<sup>2</sup>As equações de Maxwell estão escritas no Sistema de Unidades CGS.

Podemos definir o tensor  $F^{\alpha\beta}$  onde  $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$  (antissimétrico) como

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{10} & F^{20} & F^{30} \\ F^{01} & F^{11} & F^{21} & F^{31} \\ F^{02} & F^{12} & F^{22} & F^{32} \\ F^{03} & F^{13} & F^{23} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Considere a equação covariante

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta. \quad (\text{A.15})$$

Em termos dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{00} & F^{10} & F^{20} & F^{30} \\ F^{01} & F^{11} & F^{21} & F^{31} \\ F^{02} & F^{12} & F^{22} & F^{32} \\ F^{03} & F^{13} & F^{23} & F^{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\partial_1 E_1 - \partial_2 E_2 - \partial_3 E_3 \\ \partial_0 E_1 - \partial_2 B_3 + \partial_3 B_2 \\ \partial_0 E_2 - \partial_1 B_3 - \partial_3 B_1 \\ \partial_0 E_3 - \partial_1 B_2 + \partial_2 B_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

ou,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot \vec{E} \\ \partial_t E_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{B})_i \\ \partial_t E_2 + (\vec{\nabla} \times \vec{B})_j \\ \partial_t E_3 + (\vec{\nabla} \times \vec{B})_k \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Temos também que,

$$J^\beta = \begin{pmatrix} \epsilon \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \epsilon \quad (\text{A.19})$$

e

$$(\nabla \times \vec{B}) = \vec{J} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{A.20})$$

Com isso, reproduzimos as equações de Maxwell (A.10) e (A.11).

Agora mostraremos como escrever as equações (A.12) e (A.13) na notação covariante.

Primeiro definiremos os **símbolos de Levi-Civita**<sup>3</sup>  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  como

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{se } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ são permutações cíclicas de } 0, 1, 2, 3; \\ -1 & \text{se } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ são permutações não-cíclicas de } 0, 1, 2, 3; \\ 0 & \text{para quaisquer índices iguais,} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  variam entre 0, 1, 2 e 3.

Escrevemos agora o tensor  $F_{\gamma\delta}$  como:

$$F_{\gamma\delta} \equiv \eta_{\gamma\alpha}\eta_{\delta\beta}F^{\alpha\beta} \Rightarrow \begin{cases} F_{0i} = \eta_{00}\eta_{ii}F^{0i} = -F^{0i}, \\ F_{jk} = \eta_{jj}\eta_{kk}F^{jk} = F^{jk}. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Desta forma

$$F_{0i} = E_i \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk} = B_i, \quad (\text{A.24})$$

para os índices  $i, j, k$  variando entre 1, 2, 3.

Notemos agora que

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.25})$$

é a equação que descreve as equações (A.12) e (A.13).

Formalmente temos em (A.25) quatro equações. A primeira é

$$\begin{aligned} \epsilon^{0\beta\lambda\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0 & \implies \\ \epsilon^{0ijk} \frac{\partial}{\partial^i} F_{jk} = 0 & \implies \\ \frac{\partial}{\partial x^i} [\epsilon^{0ijk} F_{jk}] = 0 & . \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Mais precisamente

$$\frac{\partial}{\partial x^i} B_i = 0 \implies \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (\text{A.27})$$

---

<sup>3</sup>Estes símbolos estão definidos em [16, 27, 58].

As outras três equações são

$$\begin{aligned}
\epsilon^{m0jk} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{jk} + \epsilon^{mi0k} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{0k} + \epsilon^{mij0} \frac{\partial}{\partial x^j} F_{j0} + \epsilon^{mijk} \frac{\partial}{\partial x^k} F_{jk} &= 0 \\
-\epsilon^{0mjk} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{jk} - \epsilon^{0mik} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{0k} + \epsilon^{0mik} \frac{\partial}{\partial x^j} F_{k0} &= 0 \\
-\epsilon^{mjk} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{jk} - \epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{0k} - \epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^j} F_{k0} &= 0 \\
\epsilon^{mjk} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{jk} + 2\epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{0k} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x^0} (E^{mjk} F_{jk}) + 2\epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{0k} &= 0 \\
2\frac{\partial}{\partial x^0} B_m + 2\epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^i} E_k &= 0 \\
\frac{\partial B_m}{\partial t} + (\nabla \times \vec{E})_m &= 0 .
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Em notação vetorial podemos escrever

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0. \tag{A.29}$$

Mostramos assim como as equações de Maxwell podem ser escrita de forma covariante

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= -J^\alpha, \\
\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Assim o eletromagnetismo é uma teoria relativística sem nenhuma alteração adicional e o formalismo de quadri-vetores permite deixar esse fato explícito.



## *APÊNDICE B - CÁLCULOS EXPLANADOS DA AÇÃO DE EINSTEIN-MAXWELL*

O método do princípio de mínima ação é uma ferramenta extremamente importante na Física. Em nosso caso especial, iremos detalhar as contas contidas no Capítulo 2. O princípio de mínima ação aplicado na equação (2.1) nos fornece

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta \{ \sqrt{-g} [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \} \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \{ (\delta\sqrt{-g}) [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \sqrt{-g} [(\delta R) - (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})] \}\end{aligned}\tag{B.1}$$

. Conforme propusemos uma explicação detalhada do método utilizado, iremos desenvolver os deltas do integrando da equação. (B.1) separadamente. Primeiro iremos resolver o termo  $(\delta\sqrt{-g})$ . Para resolução de tal termos, requer-nos que lembremos previamente da propriedade matemática que diz que

$$\ln(\det A) = \text{Tr}(A),\tag{B.2}$$

sendo assim,

$$\begin{aligned}\delta[\ln g] &= \delta[\text{Tr}(\ln g_{\mu\nu})] \\ g^{-1}(\delta g) &= g^{\mu\nu}(\delta g_{\mu\nu}),\end{aligned}\tag{B.3}$$

logo,

$$(\delta g) = g [g^{\mu\nu}(\delta g_{\mu\nu})].\tag{B.4}$$

Também, é muito fácil perceber que

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}).\tag{B.5}$$



De posse destas informações podemos calcular nosso  $(\delta\sqrt{-g})$  da forma

$$\begin{aligned}(\delta\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (\delta\sqrt{-g}) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{B.6}$$

O delta que resolveremos agora é o  $(\delta R)$ , este, entretanto, é trivialmente resolvido, tendo em vista que

$$\begin{aligned}(\delta R) &= \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{B.7}$$

Agora resta-nos, apenas, a resolução do delta associado ao termo de Maxwell da ação. Note que

$$\begin{aligned}(\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu} g^{\mu\nu}) \\ &= F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} [(\delta g^{\mu\nu}) g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu})] \\ &= 2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) \\ &= 2 F_{\mu\nu} F_{\nu}^{\nu} (\delta g_{\mu\nu}) \\ &= 2 F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} (\delta g_{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{B.8}$$

Substituindo as equações (B.6), (B.7) e (B.8) na ação (B.1) teremos:

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{16\pi} \int d^n x \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) + \\ &\quad + \frac{1}{16\pi} \int d^n x \quad g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{B.9}$$

O termo  $(\delta R_{\mu\nu})$  é uma derivada total, logo não contribui para a ação. Com isso, a equação (B.9) pode ser re-escrita sem seu último termo, então as equações de movimento para a ação (B.1) são

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} - 2 F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} = 0.\tag{B.10}$$

Onde podemos identificar o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R,\tag{B.11}$$

e

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right),\tag{B.12}$$

como o tensor de Maxwell do eletromagnetismo.

Para encontrarmos as equações de movimento para o eletromagnetismo utilizando o mesmo método basta trocarmos o funcional (isto é um presuposto do princípio de Euler-Lagrange [12, 13]). Nesse caso, o funcional que utilizaremos na ação (B.1) será  $\delta = \delta/\delta(\partial A_\mu)$  e isso nos fornecesseá:

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta \{ \sqrt{-g} [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \} \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [ - (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) ]\end{aligned}\tag{B.13}$$

Teremos, então, provindo da equação (B.13) o único delta não-nulo dado no seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}(\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} &= (\delta \nabla_\nu A_\mu - \delta \nabla_\mu A_\nu) F^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\nu F^{\mu\nu} - \nabla_\nu F^{\nu\mu} \\ &= 2 \nabla_\nu F^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{B.14}$$

Desta forma, como

$$\delta S = 0,\tag{B.15}$$

as equações de movimento obtidas da equação (B.13) serão:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0.\tag{B.16}$$



## APÊNDICE C - CÁLCULO TENSORIAL

Como pode ser visto em [58, 60] a diferenciação de um campo escalar é um vetor, entretanto nem sempre a diferenciação de um campo vetorial ou um campo tensorial resulta em um tensor. Para verificar essa afirmação considere a transformação da derivada parcial de um vetor contravariante  $V^\mu$  dada por

$$\begin{aligned}\partial'_\nu V'^\mu &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} V^\rho \right) \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \partial_\sigma V^\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} V^\rho.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Veja que a aparição do último termo desta equação mostra claramente que a derivada parcial de um vetor contravariante não é um tensor.

Para calcularmos uma derivada precisamos subtrair vetores associados a pontos diferentes do espaço. Diferentemente do espaço plano, em um espaço curvo vetores em pontos diferentes não pertencem ao mesmo espaço vetorial e por isso não existe nenhuma noção natural de como subtraí-los. É necessária a inclusão de uma noção de transporte paralelo para que esses vetores sejam colocados no mesmo ponto, observe isso através da definição formal de derivada em um espaço Euclidiano de  $M$  componentes de um campo vetorial  $V = V^\mu e_\mu$  com respeito à  $x^\mu$ :

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - V^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}.\tag{C.2}$$

No numerador de (C.2) consta uma subtração e é exatamente essa subtração a responsável pelo termo extra na equação (C.1).

Para solucionar esse problema necessitamos introduzir um conceito de derivada para tensores. Introduzimos então o conceito abordado em [60] de **derivada covariante**  $\nabla_\nu V^\mu$  de um campo vetorial  $V^\mu$  definida por

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda.\tag{C.3}$$

Os símbolos  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  são o que chamamos de **conexão**. A conexão é o termo que carrega as informações do vetor durante o transporte paralelo.

Tendo definido a derivada covariante de um vetor contravariante, definiremos a derivada covariante de um vetor covariante como

$$\nabla_{\mu}U_{\nu} = \partial_{\nu}U_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}U_{\lambda}. \quad (\text{C.4})$$

Para um tensor misto  $T_{\mu}^{\nu}$  a derivada covariante é definida como

$$\nabla_{\mu}T_{\mu}^{\nu} = \partial_{\nu}T_{\mu}^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}T_{\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}T_{\rho}^{\nu}. \quad (\text{C.5})$$

É conveniente que definamos uma conexão compatível com a métrica sob a qual essa é constante. Ou seja,

$$\nabla_{\nu}g_{\nu\lambda} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Primeiro considere as equações

$$0 = \nabla_{\nu}g_{\rho\lambda} = \partial_{\nu}g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}g_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}g_{\rho\alpha}, \quad (\text{C.7})$$

$$0 = \nabla_{\rho}g_{\nu\lambda} = \partial_{\rho}g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}g_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\alpha}g_{\nu\alpha}, \quad (\text{C.8})$$

$$0 = \nabla_{\lambda}g_{\nu\rho} = \partial_{\lambda}g_{\nu\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}g_{\alpha\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha}g_{\nu\alpha}. \quad (\text{C.9})$$

Veja que se fizermos a soma de (C.8) e (C.9) e subtrairmos por (C.9) teremos

$$\begin{aligned} \partial_{\nu}g_{\rho\lambda} + \partial_{\rho}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\nu\rho} &= +\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}g_{\alpha\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}g_{\rho\alpha} \\ &\quad + \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}g_{\alpha\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\alpha}g_{\nu\alpha} \\ &\quad - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}g_{\alpha\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha}g_{\nu\alpha} \\ &= g_{\alpha\lambda}(\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} + \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}) + g_{\alpha\rho}(\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}) + g_{\alpha\nu}(\Gamma_{\rho\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha}) \\ &= 2g_{\mu\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Na penúltima linha impomos adicionalmente a simetria da conexão  $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \Gamma_{\rho\nu}^{\mu}$  com respeito aos dois índices inferiores. Os segundos e terceiros termos entre parênteses após a igualdade se anulam e temos finalmente:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_{\nu}g_{\rho\lambda} + \partial_{\rho}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\nu\rho}). \quad (\text{C.11})$$

A conexão não necessariamente deve ter essas características, entretanto essa imposição a caracteriza como os Símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$  e a chamamos de **conexão afim**.

Utilizando o fato de que a derivada covariante se transforma como um tensor podemos

obter a transformação da conexão, que evidentemente não pode se transformar como um tensor:

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma_{\lambda\beta}^{\kappa} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\rho}}. \quad (\text{C.12})$$

A atuação de  $\nabla_{\mu}$  em um produto direto de tensores é dada por

$$\nabla_{\mu}(A_{\nu}^{\mu} B_{\lambda}^{\rho}) = (\nabla_{\mu} A_{\nu}^{\mu}) B_{\lambda}^{\rho} + A_{\nu}^{\mu} (\nabla_{\mu} B_{\lambda}^{\rho}). \quad (\text{C.13})$$

Isto é uma generalização da fórmula de Leibniz.

Um fato importante de derivadas covariantes é que o delta de Kronecker é constante. Observe:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \delta_{\lambda}^{\nu} &= \partial_{\mu} \delta_{\lambda}^{\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} \delta_{\lambda}^{\rho} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta_{\rho}^{\nu} \\ &= \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Em decorrência disto, veja o que ocorre com a contração de índices. Primeiramente, considere um tensor misto  $A_{\rho}^{\nu}$ , a derivada covariante dele é

$$\nabla_{\mu} A_{\rho}^{\nu} = \partial_{\nu} A_{\rho}^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} A_{\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} A_{\lambda}^{\nu}, \quad (\text{C.15})$$

vemos que (C.15) é similar a (C.5), entretanto, se considerarmos a contração  $A_{\nu}^{\nu}$  teremos

$$\nabla_{\mu} A_{\nu}^{\nu} = \partial_{\nu} A_{\nu}^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} A_{\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda}^{\nu} = \partial_{\nu} A_{\nu}^{\nu}. \quad (\text{C.16})$$

A relação que este fato tem com (C.14) é que podemos provar isso usando o fato do delta de Kronecker ser constante, conforme podemos ver:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} A_{\nu}^{\nu} &= \nabla_{\mu} (A_{\rho}^{\nu} \delta_{\nu}^{\rho}) \\ &= (\nabla_{\mu} A_{\rho}^{\nu}) \delta_{\nu}^{\rho} + A_{\rho}^{\nu} (\nabla_{\mu} \delta_{\nu}^{\rho}) \\ &= \nabla_{\mu} (A_{\rho}^{\nu} \delta_{\nu}^{\rho}). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$



## APÊNDICE D - CURVATURA

Analisaremos neste apêndice o caráter geométrico envolvendo as derivadas covariantes. Primeiramente, vide [22], considere um paralelogramo infinitesimal  $pqr$  possuindo as coordenadas  $\{x^\mu\}$ ,  $\{x^\mu + \epsilon^\mu\}$ ,  $\{x^\mu + \epsilon^\mu + \delta^\mu\}$  e  $\{x^\mu + \delta^\mu\}$ , respectivamente, além disso,  $\epsilon^\mu$  e  $\delta^\mu$  são infinitesimais. Consideremos o deslocamento ao longo da curva  $C = pqr$  e da curva  $C' = psr$  (veja a figura 10). Podemos calcular a variação  $V_{C'}^\mu - V_C^\mu$ , para isso, primeiro veja que

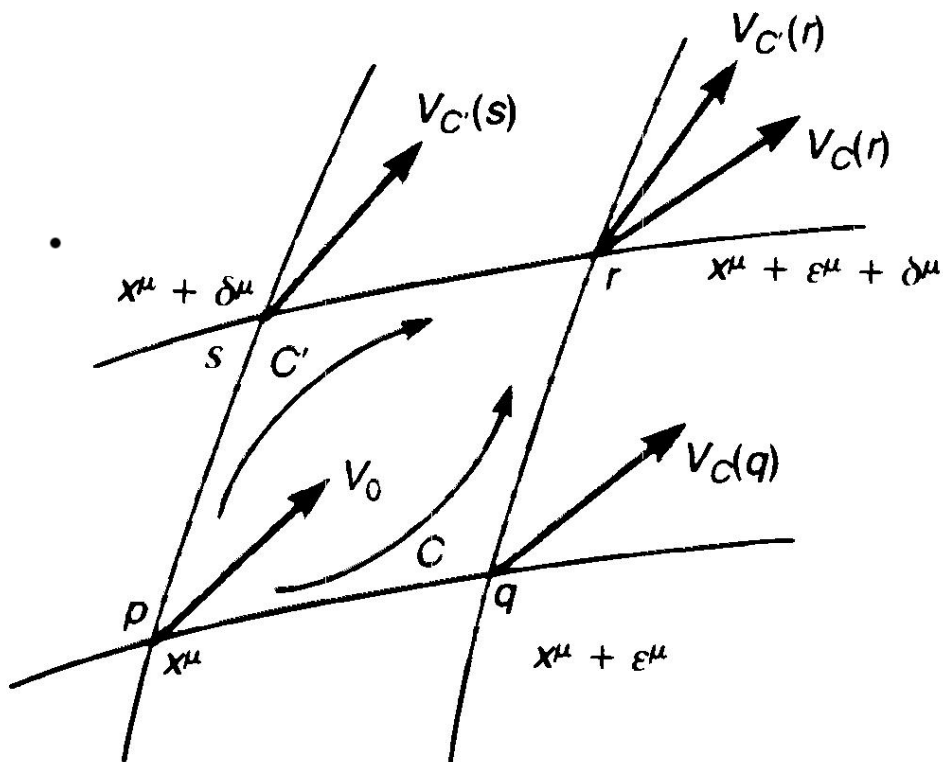


Figura 10: Um vetor  $V_0$  em um ponto  $p$  é transportado paralelamente ao longo das curvas  $C$  e  $C'$  até um ponto  $r$  resultando em um vetor  $V_C(r)$  e outro vetor  $V_{C'}(r)$ , respectivamente



$$V_C^\mu(q) = V^\mu(p) + \nabla_\mu V^\mu(p)\epsilon^\mu, \quad (\text{D.1})$$

$$V_C^\mu(q) = V^\mu(q) + \nabla_\mu V^\mu(q)\delta^\mu. \quad (\text{D.2})$$

Substituindo a equação (D.1) na equação (D.2) teremos,

$$V_C^\mu(q) = V^\mu(p) + \nabla_\nu V^\mu(p)\epsilon^\nu + \nabla_\nu V^\mu(p)\delta^\nu + \nabla_\nu \nabla_\rho V^\mu(p)\epsilon^\rho \delta^\nu. \quad (\text{D.3})$$

Analogamente

$$V_{C'}^\mu(r) = V^\mu(p) + \nabla_\nu V^\mu(p)\delta^\nu + \nabla_\nu V^\mu(p)\epsilon^\nu + \nabla_\nu \nabla_\rho V^\mu(p)\delta^\rho \epsilon^\nu. \quad (\text{D.4})$$

Logo

$$V_{C'}^\mu(r) - V_C^\mu(r) = (\nabla_\nu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu)\delta^\rho \epsilon^\nu. \quad (\text{D.5})$$

Veja que o termo entre parênteses da segunda parte de (D.5) é o comutador  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$  e isso nos instiga a definirmos curvatura em termo deste comutador, ou seja, a curvatura é uma medida da falha em vetores, transportados em um caminho fechado se voltarem paralelos a si mesmos.

Calculemos então

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho. \quad (\text{D.6})$$

Analisemos a equação (D.6) por partes: primeiro vejamos  $\nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\nabla_\nu V^\rho) &= \partial_\mu(\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda) \\ &\quad + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho(\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha V^\lambda) \\ &\quad - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha(\partial_\alpha V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Em seguida vejamos  $\nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\nu(\nabla_\mu V^\rho) &= \partial_\nu(\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda) \\ &\quad + \Gamma_{\nu\alpha}^\rho(\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha V^\lambda) \\ &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(\partial_\alpha V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Desta forma substituindo os valores de (D.7) e (D.8) na equação (D.6) encontraremos

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \partial_\mu(\Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda) - \partial_\nu(\Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda) \\
&\quad + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \partial_\nu V^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \partial_\mu V^\alpha \\
&\quad + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha V^\lambda + \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha V^\lambda \\
&= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha) V^\lambda.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

O lado direito da equação (D.8) é o que chamamos de **tensor de curvatura de Riemann-Christoffel**. Que pode ser reorganizado para

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho. \tag{D.10}$$

Podemos definir então

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = g_{\alpha\lambda} R_{\beta\lambda\delta}^\lambda. \tag{D.11}$$

As simetrias desse tensor são

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\lambda} \tag{D.12}$$

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = -R_{\beta\alpha\lambda\delta} \tag{D.13}$$

$$R_{\alpha[\beta\lambda\delta]} = 0 \iff R_{\alpha\beta\lambda\delta} + R_{\alpha\delta\beta\lambda} + R_{\alpha\lambda\delta\beta} = 0 \tag{D.14}$$

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = R_{\lambda\delta\alpha\beta} \tag{D.15}$$

Segundo [21] tensor de Riemann permite definir um tensor bastante importante em relatividade geral, estamos falando do tensor de Ricci. **O tensor de Ricci** é definido como a contração do tensor de Riemann com ele mesmo, observe:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda. \tag{D.16}$$

Onde tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  é simétrico, ou seja,

$$R_{\nu\mu} = R_{\mu\nu}. \tag{D.17}$$

Assim, para  $n = 4$  (ou seja, os índices variando entre 0, 1, 2, 3) teremos o tensor de Ricci com 10 componentes independentes. O tensor de Riemann-Christoffel por sua vez teria  $n^4 = 256$  componentes independentes mas as condições de simetria acima expostas vinculam esse tensor para ter apenas  $\frac{1}{n} n^2 (n^2 - 1) = 20$  componentes independentes.

A contração do tensor de Ricci com a métrica nos fornece o **escalar de Ricci** ou

escalar de curvatura. Observe:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{D.18})$$

## APÊNDICE E – ÁLGEBRA TENSORIAL

Tendo um campo vetorial  $V$  como sendo expresso em uma base genérica de vetores  $e_\mu$ , ou seja,

$$V = V^\mu e_\mu. \quad (\text{E.1})$$

Se considerarmos um vetor  $\dot{x}^\mu$  tangente a uma curva sob transformações de coordenadas temos

$$\dot{x}^\mu \rightarrow \dot{x}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu, \quad (\text{E.2})$$

que é uma família de **vetores contravariantes**. O termo contravariante significa que os índices estão posicionados na parte superior do termo que expressa o vetor.

Uma base natural para os vetores  $V$  é  $\partial/\partial x^\mu$ , que sempre geram vetores tangentes a curva. Agora podemos pensar em vetores como operadores diferenciais de primeira ordem, via correspondência

$$V^\mu \iff V \equiv V^\mu \partial_\mu. \quad (\text{E.3})$$

Objetos que se transformam como operador de derivação

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (\text{E.4})$$

são chamados de **vetores covariantes**.

Em posse destas informações mostraremos qual a forma da transformação de vetores utilizados pela geometria diferencial.

O primeiro exemplo é de como se transformam funções escalares. Considere a função  $f$  sob a transformação de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ :

$$f'(x') = f(x). \quad (\text{E.5})$$

Isto implica que funções são invariantes quanto às transformações de coordenadas e essa é a primeira face das transformações de coordenadas utilizadas na geometria diferencial que a partir de agora chamaremos apenas de **transformações**.

Definimos então objetos que transformam os **vetores contravariantes**  $V^\mu$ :

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (\text{E.6})$$

**Vetores covariantes** diferem simbolicamente dos vetores contravariantes pela posição do índice que é posto na parte inferior, e são objetos do tipo  $U_\mu$ , apresentando, também, uma transformação de coordenadas que é o inverso da transformação de um vetor contravariante, e é dada por

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu, \quad (\text{E.7})$$

(compare com a equação (E.5) e observe a posição dos índices). A derivada de uma função  $f$  dada por  $U_\mu = \partial_\mu f$  é um exemplo de um vetor covariante, cuja transformação é

$$\partial'_\mu f'(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu f(x). \quad (\text{E.8})$$

**Tensores** são objetos que se transformam como produtos de vetores contravariantes e vetores covariantes.

Podemos considerar o caso do tensor  $A_{\mu\nu}$  cuja lei de transformação é

$$A'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} A_{\sigma\rho}. \quad (\text{E.9})$$

Podemos perceber que esse objeto se transforma por meio do produto de dois vetores covariantes. Assim,  $A_{\mu\nu}$  é um *tensor covariante de posto 2*.

Os **tensores contravariantes** de posto 2 são definidos como os que se transformam como produto de dois vetores do mesmo gênero. Observe o exemplo do tensor  $B^{\mu\nu}$  que é descrito pela transformação

$$B'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} B^{\sigma\rho}. \quad (\text{E.10})$$

A métrica  $g_{\mu\nu}$  é um tensor covariante de posto 2 e se transforma de forma idêntica a (E.9) e sua inversa  $g^{\mu\nu}$  se transforma como (E.10).

Existem também tensores formados pelo o produto de vetores contravariantes e vetores covariantes, estes são chamados de **tensores mistos** e são representados por

$$T'_\nu{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} T^\sigma{}_\rho. \quad (\text{E.11})$$

Lembrando que em todos os casos nosso sistema pode ser formado por  $q$ -vetores contra-

variantes e  $p$ -covariantes e o cálculo é feito através da regra da cadeia da derivada. Note que se um tensor é nulo em um sistema de coordenadas ele se manterá nulo em quaisquer outros sistemas de coordenadas.

Um tensor misto de grande utilidade é o  $\delta$  de Kronecker:

$$\delta_{\nu}^{\mu} \equiv \begin{cases} 1 & \mu = \nu, \\ 0 & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

Observe que ele se transforma como um tensor:

$$\delta_{\nu}^{\mu} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} = \delta_{\sigma}^{\rho}. \quad (\text{E.13})$$

Podemos fazer as seguintes operações algébricas com tensores: podemos somá-los, multiplicá-los e contraí-los. A adição de tensores ocorre da seguinte maneira:

$$A_{\nu}^{\mu} + B_{\nu}^{\mu} = C_{\nu}^{\mu}. \quad (\text{E.14})$$

Note que os tensores devem ser de mesmo posto. Também podemos fazer o produto direto dos tensores  $A_{\nu}^{\mu} \cdot B_{\nu}^{\mu}$ . A contração de uma maneira geral é dada por

$$\begin{aligned} B'_{\nu} &= A'_{\nu\mu} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} A_{\rho\lambda}^{\sigma} \\ &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \delta_{\sigma}^{\lambda} A_{\rho\sigma}^{\sigma} \\ &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} B_{\rho}. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Um exemplo particular de uma contração é o produto escalar de um vetor contravariante e um vetor covariante que resulta em um escalar.