



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ESTADOS EXCITADOS EM REGRAS DE SOMA DA QCD**

**Mikael Souto Maior de Sousa**

CAMPINA GRANDE - PB

fevereiro - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ESTADOS EXCITADOS EM REGRAS DE SOMA DA QCD**

**Mikael Souto Maior de Sousa**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE - PB

Fevereiro - 2013

S725e      Sousa, Mikael Souto Maior de.  
Estados excitados em regras de soma da QCD / Mikael Souto Maior  
de Sousa. – Campina Grande, 2013.  
64 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina  
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientação: Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva".

Referências.

1. QCD. 2. Mesons Vetoriais. 3. Regras de Soma. 4. Variáveis  
Fisiológicas. 5. Quarks Leves e Pesados. I. Silva, Rômulo Rodrigues da.  
II. Título.

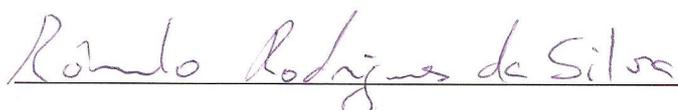
CDU 539.1(043)

**MIKAEL SOUTO MAIOR DE SOUSA**

**ESTADOS EXCITADOS EM REGRAS DE SOMA DA QCD**

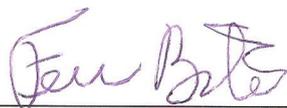
Dissertação aprovada em 18/02/2013

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG  
(Presidente)



---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG  
(Membro interno)



---

Prof. Dr. Luciano Melo Abreu  
Instituto de Física – UFBA  
(Membro externo)

*Dedico esse trabalho a minha família,  
assim como tudo em minha vida  
e a Cássia de Souza Simões.*

## AGRADECIMENTOS

Agradecimentos são sempre difíceis de fazer, a pessoa sempre tem o receio de esquecer alguém, seja um parente querido, um amigo ou um professor que tenha ajudado muito na minha formação acadêmica. Então, não começarei com agradecimentos e sim com um pedido de desculpas a todos aqueles que não tiverem sido citados, porém, tiveram grande significância não só na minha vida acadêmica como também na minha formação como pessoa.

Primeiramente quero agradecer a Deus pelo simples fato da minha existência, assim como todos os seres de sua grande criação. Pois muitas vezes pensei em desistir porém, minha orientação religiosa me fez acreditar e ter fé no que fui capaz de fazer até agora e no que serei capaz de conseguir ao longo do meu caminho. Quero agradecer aos meus pais ROBERTO JOSÉ MACHADO DE SOUSA e MAGNA LÚCIA SOUTO MAIOR DE SOUSA pois foram meus orientadores para vida e me tornaram a pessoa que sou hoje e por sempre me ajudarem e estarem presentes em todos os momentos da minha vida e pelo prazer de ter dois irmãos que amo tanto RAMON S. M. DE SOUSA e MARIA RITA (a pitoco). Queria deixar bem claro que a sequência de agradecimentos não diminui a contribuição de todos em minha vida. Meus agradecimentos também recaem sobre meu orientador Prof. Dr. RÔMULO RODRIGUES DA SILVA que sobre sua grande orientação conseguimos realizar este trabalho com êxito e que, graças a sua dedicação aprendi muitas coisas sobre essa grande área, que até o fim da minha vida continuará a me intrigar e me fascinar, que é a física, deixo exposta minha gratidão aos professores do departamento de física da UEPB Prof. Dr. Jean Spinelly, Prof. Dra. Morgana Lúgia e ao Prof. Dr. Alex da Silva, que durante minha graduação estiveram

dispostos a me orientar e me ensinar.

Sobre minha família não tenho muito o que dizer pois o nome que os precede, FAMÍLIA, já diz tudo. Em especial quero deixar meus agradecimentos as minhas tias MARIA DO SOCORRO FRANÇA SOUTO MAIOR e MAGNÓLIA MARIA FRANÇA SOUTO MAIOR, pois estas influenciaram muito minha vida e o carinho que tenho por elas é imensurável. Sobre minha namorada, CÁSSIA DE SOUZA SIMÕES, eu agradeço-a pela pessoa compreensível e amorosa que ela é e por sempre acreditar em mim, a ela eu deixo a célebre frase, que hoje, muitas das vezes é vulgarizada, porém eu ainda acredito nela “eu te amo”. Aos meus amigos HERY, IGOR ELOI (esse cara sou eu!) e BRUNO pelas longas conversas de bar que por incrível que pareçam foram produtivas, pelas noites de video game e pela mais nova modalidade de esporte o #DominóCabulosoDaMadruga, agradeço também aos meus amigos da sala 103 Guerra, Pablo S., Pablo F. e Júlio e a todos os colegas do departamento.

Quando falamos em UAF-UFCG, falamos em uma família, pois quando parti da graduação na UEPB para a pós graduação na UFCG não conheci apenas professores e alunos mas conheci também irmãos, pais, tios e primos por assim dizer. Pois na minha vida acadêmica nunca cresci tanto em matéria de conhecimento como cresci nesta unidade graças aos professores que a compõem juntamente com a coordenação da pós-graduação em física e todos os seus funcionários que estão sempre a disposição para ajudar no que for preciso. A banca examinadora, deixo meus sinceros agradecimentos por disponibilizar um tempo para analisar meu trabalho e ajudar no que for preciso para melhorá-lo. Agradeço também a CAPES pelo suporte financeiro. A TODOS que diretamente ou indiretamente influenciaram minha vida, como um todo, meu sincero OBRIGADO.

*Não cruze os braços diante de uma  
dificuldade, pois o maior homem do  
mundo morreu de braços abertos!*  
*(Bob Marley)*

## RESUMO

O método das Regras de Soma da QCD proposto por Shifman, Vainshtein e Zakharov (SVZ) em 1979 tem sido usado como um método bastante útil para extrair as propriedades dos hádrons que possuem a menor massa, chamado de estados fundamentais. Porém os resultados experimentais mais recentes deixam claro que o estudo dos estados excitados pode ajudar no esforço mundial que se destina a entender os novos mésons XYZ.

Neste trabalho propusemos um novo método para estudar o primeiro estado excitado dos hádrons, em especial focamos o nosso trabalho no estudo dos mésons vetoriais  $\rho$ ,  $J/\Psi$  e  $\Upsilon$  que já foram estudados anteriormente via método SVZ e que possuem dois importantes observáveis que são a massa e a sua constante de decaimento. Basicamente o nosso método consiste numa simples modificação na forma da densidade espectral do método SVZ que é escrita na forma “polo + contínuo” para um novo formato “polo + polo + contínuo”. Calculamos as massas dos mésons e suas constantes de decaimento, onde nossos valores teóricos estão bem próximos dos valores experimentais. Por outro lado, o estudo da constante de decaimento do méson  $\rho(2S)$  se mostrou bem interessante, pois como não há dados experimentais disponíveis até o momento, nosso cálculo teórico se apresenta como uma predição.

**Palavra-chave:** Regras de Soma da QCD, duplo polo, QCD, quarks leves, quarks pesados.

## ABSTRACT

The QCD Sum Rules approach was proposed by Shifman, Vaishtein and Zakharov (SVZ) in 1979 and has been used as a method for extracting useful properties of hadrons having the lowest mass, called as ground states. On the other hand, the most recent experimental results make it clear that the study of the excited states can help to solve many puzzles about the new XYZ mesons structure.

In this paper we propose a new method to study the first excited state of the hadrons, in particular we focus our attention on the study of vector mesons  $\rho$ ,  $J/\Psi$  and  $\Upsilon$  that have been studied previously by SVZ method and they have the tow important observables that are the mass and its decay constant. In principle, our method works as a simple modification to the shape of the spectral density of the SVZ method which is written as “pole + continuum” to a new functional form “pole + pole + continuum”. We also calculate the meson’s masses and their decay constants, where our theoretical values are very close to the experimental values. Moreover, the study of the meson decay constant  $\rho(2S)$  provide a very interesting result, because as there is no experimental data available, then our theoretical calculation presents as a prediction of our method.

**Keywords:** QCD Sum Rules, double pole, light quarks, heavy quarks.

# Conteúdo

|   |            |
|---|------------|
| <b>Lista de Figuras</b>   | <b>iii</b> |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>1</b>   |
| <b>2 Regras de Soma da QCD</b>                                  | <b>7</b>   |
| 2.1 A função de Correlação de 2-pontos . . . . .                | 8          |
| 2.2 Lado da QCD . . . . .                                       | 8          |
| 2.3 Lado fenomenológico . . . . .                               | 10         |
| 2.4 A transformada de Borel . . . . .                           | 13         |
| 2.4.1 Janela de Borel . . . . .                                 | 14         |
| <b>3 Regras de Soma com polo duplo</b>                          | <b>16</b>  |
| 3.1 A OPE . . . . .   | 17         |
| 3.2 A fenomenologia com dois polos . . . . .                    | 19         |
| 3.3 Método da função de correlação subtraída . . . . .          | 21         |
| 3.4 A transformada de Borel para estados excitados . . . . .    | 23         |
| 3.5 A Regra de Soma . . . . .                                   | 24         |
| <b>4 Resultados e Discussões</b>                                | <b>27</b>  |
| 4.1 Regra de Soma para o $\rho(2S)$ e $\rho$ . . . . .          | 28         |
| 4.2 Regra de Soma para o $J/\Psi$ e $\Psi(2S)$ . . . . .        | 31         |
| 4.3 Regra de Soma para o $\Upsilon$ e $\Upsilon(2S)$ . . . . .  | 34         |
| <b>5 Conclusões</b>   | <b>39</b>  |
| <b>A Cálculo dos diagramas para o méson <math>J/\Psi</math></b> | <b>41</b>  |
| A.1 Termo perturbativo . . . . .                                | 41         |
| A.2 Termo do condensado de quarks . . . . .                     | 46         |
| <b>B Cálculo dos diagramas para o méson <math>\rho</math></b>   | <b>48</b>  |
| B.1 Termo perturbativo . . . . .                                | 48         |
| B.2 Termo do condensado de quarks . . . . .                     | 50         |
| B.3 Termo do condensado de glúons . . . . .                     | 51         |
| <b>C Propagador de quarks leves no espaço das coordenadas</b>   | <b>53</b>  |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>D</b> | <b>Fórmulas úteis</b>                       | <b>55</b> |
| D.1      | Álgebra das matrizes de Gell-Mann . . . . . | 55        |
| D.2      | Álgebra das matrizes de Dirac . . . . .     | 55        |
| <b>E</b> | <b>Introdução ao Teorema de Wick</b>        | <b>57</b> |
| E.1      | Caso de 4 campos . . . . .                  | 57        |
| <b>F</b> | <b>Relação de dispersão</b>                 | <b>59</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                         | <b>61</b> |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Modelo de Gell-Mann para os bárions (no caso prótons e nêutrons) . . .  | 2  |
| 1.2 | Modelo de Gell-Mann para os mésons tipo $\bar{q}q$ (no caso $J/\Psi$ ) . . . . .  | 2  |
| 1.3 | Lado esquerdo: espectro experimental das excitações radiais do méson $\rho$ [7][8], com as devidas larguras de decaimento. Lado Direito: modelo proposto por Shifman, para as excitações radiais do méson $\rho$ . . . . .  | 4  |
| 2.1 | Espectro experimental para o méson $\rho$ no canal $e^+e^- \rightarrow V$ , onde $V$ representa o méson vetorial, obtido na década de 1970. . . . .   | 12 |
| 3.1 | Espectro experimental para o méson $\Upsilon$ no canal $e^+e^- \rightarrow V$ , onde $V$ representa o méson vetorial, obtido no LHCb em 2010, observamos uma formação de três polos respectivamente, da esquerda para a direita, para o estado fundamental, primeiro estado excitado e segundo estado excitado. . . . . | 17 |
| 3.2 | Diagrama de Feynman da OPE do meson $\rho$ , diagramas: perturbativo, correção radiativa [34], condensado de glúons e condensado de quarks . . . . .  | 18 |
| 3.3 | Diagrama de Feynman da OPE do meson $J/\Psi$ , diagramas: perturbativo, correção radiativa [34][39] e condensado de quarks . . . . .  | 18 |
| 3.4 | Espectros para massa e a largura de decaimento dos mesons $\rho$ e $J/\Psi$ . . . . .   | 20 |
| 3.5 | Densidade espectral segundo nosso Ansatz. . . . .   | 21 |
| 4.1 | Massa do $\rho$ como função da massa do $\rho(2S)$ . . . . .  | 29 |
| 4.2 | O comportamento das constantes de decaimento $f_\rho$ (linha sólida) e $f_{\rho(2S)}$ (linha tracejada) como função da Massa de Borel. . . . .  | 30 |
| 4.3 | Comparativo entre as contribuições do polo entre as regras de soma usual (linha sólida) e com dois polos (linha tracejada) para o $\rho$ . . . . .  | 30 |
| 4.4 | Contribuição relativa entre o $polo_\rho$ (linha tracejada) e o $polo_{\rho(2S)}$ (linha sólida) do Ansatz “polo + polo + contínuo”. . . . .  | 31 |
| 4.5 | Comparativo entre as contribuições do polo entre as regras de soma usual (linha sólida) e com dois polos (linha tracejada) para o $J/\Psi$ . . . . .  | 32 |
| 4.6 | Massa do $J/\Psi$ como função da massa do $\Psi(2S)$ . . . . .  | 32 |
| 4.7 | O comportamento das constantes de decaimento $f_{J/\Psi}$ (linha sólida) e $f_{\Psi(2S)}$ (linha tracejada) como função da Massa de Borel. . . . .  | 33 |
| 4.8 | Contribuição relativa entre o $polo_{J/\Psi}$ (linha tracejada) e o $polo_{\Psi(2S)}$ (linha sólida) do Ansatz “polo + polo + contínuo”. . . . .  | 34 |
| 4.9 | Comparativo entre as contribuições do polo entre as regras de soma usual (linha sólida) e com dois polos (linha tracejada) para o $\Upsilon$ . . . . .  | 35 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 4.10 | Comparativo entre as contribuições do polo entre as regras de soma usual (linha sólida) e com dois polos (linha tracejada) para o $\Upsilon$ na nova janela de Borel. . . . . | 36 |
| 4.11 | Massa do $\Upsilon$ como função da massa do $\Upsilon(2S)$ . . . . .  | 36 |
| 4.12 | O comportamento das constantes de decaimento $f_\Upsilon$ (linha sólida) e $f_{\Upsilon(2S)}$ (linha tracejada) como função da Massa de Borel. . . . .                        | 37 |
| 4.13 | Contribuição relativa entre o $polo_\Upsilon$ (linha tracejada) e o $polo_{\Upsilon(2S)}$ (linha sólida) do Ansatz “polo + polo + contínuo”. . . . .                          | 38 |
| A.1  | Definição dos limites de integração na região $g(\alpha) \geq 0$ . . . . .  | 44 |

# Capítulo 1

## Introdução

A formação dos hádrons se dá, através das interações fortes, a partir de estados ligados de quarks que são descritas por uma teoria não-abeliana chamada de Cromodinâmica Quântica ou simplesmente QCD. Na QCD, as únicas partículas a sentirem os efeitos da interação forte são aquelas que possuem a carga de cor e interagem via troca de glúons. Porém, o que torna a QCD uma teoria singular são três propriedades fundamentais desta teoria, que são o confinamento, a liberdade assintótica e como a carga de cor se agrupa nessa interação.

O confinamento nos garante que os quarks estejam sempre confinados dentro dos hádrons pois, mesmo em processos de altas energias, como por exemplo numa colisão entre o méson  $J/\Psi$  e um núcleo de ouro, os quarks envolvidos no processo tendem a se agrupar de modo a formar novos hádrons mantendo os quarks confinados.

A liberdade assintótica permite a QCD descrever fenômenos por meio de quarks e glúons considerando-os aproximadamente livres de modo a não violar o confinamento em processos de alto momento transferido, onde o acoplamento torna-se tão pequeno que possibilita aplicar técnicas de teoria de perturbação. Por outro lado, no regime de baixas energias, onde os hádrons são formados, a teoria de perturbação não se aplica mais, pois a constante de acoplamento da QCD assume altos valores. Neste regime de baixas energias o estado fundamental da QCD não é vazio mas sim, um condensado

de quarks, anti-quarks e glúons tornando mais difícil estudar a QCD neste regime.

Todo quark possui sua carga cor e, respectivamente, todo anti-quark possui sua carga anti-cor, tendo em vista que os hádrons são “brancos” por definição, ou seja, são estruturas encontradas em singletos de cor, portanto quarks e anti-quarks cujas cores e a anti-cores são diferentes tendem a se agrupar via troca de glúons para formar hádrons “brancos”. O modelo de quarks proposto por Gell-Mann [1], que mostra uma subdivisão entre hádrons: os bárions formados por três quarks (como por exemplo os prótons) ou três anti-quarks (como por exemplo os anti-prótons) e os mésons formados por pares de quark e anti-quark.

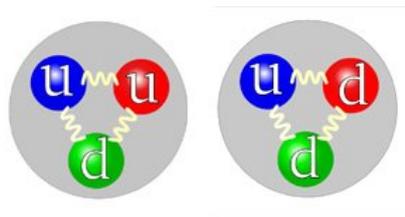


Figura 1.1: Modelo de Gell-Mann para os bárions (no caso prótons e nêutrons)

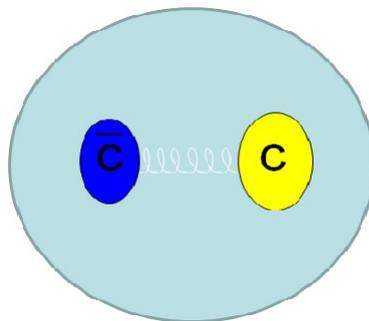


Figura 1.2: Modelo de Gell-Mann para os mésons tipo  $\bar{q}q$  (no caso  $J/\Psi$ )

Partindo disso, tem-se na literatura vários modelos propostos baseados na QCD a fim de tentar resolver o problema do espectro dos hádrons, que consiste em agrupar uma grande quantidade de hádrons observados em famílias com os mesmos números quânticos. A diferença entre os membros dessa família se deve apenas aos valores de massa distintas, onde a partícula com a menor massa é chamada de estado fundamental e as demais chamadas de estados excitados.

Atualmente, no âmbito da física de hádrons, a maioria dos hádrons são muito bem descritos pelo modelo de quarks de Gell-Mann, muito embora as descobertas dos novos mésons  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  deixam um pressuposto de que a teoria de Gell-Mann esteja incompleta e que mésons formados por quatro quarks seja uma realidade. Contudo, a obtenção de massa, fatores de forma, constantes de acoplamento e outras propriedades físicas dessas partículas são necessárias para entender e desvendar a estrutura interna dos hádrons.

Na tentativa de resolver esse problema em 1979 os físicos Shifman, Vainshtein e Zakharov propuseram um método conhecido como Regras de Soma da QCD, ou simplesmente QCDSR [2], que trata-se de um método não perturbativo e aproximado que permite a obtenção de quantidades físicas hadrônicas como massa, fator de forma, constantes de acoplamento e decaimento, etc.

A ideia básica da QCDSR parte da possibilidade de calcular a função de correlação de um hádron, que é análogo a uma função de Green, tal função trata-se de uma função cujo ordenamento temporal está relacionado com as correntes interpolantes do hádron, de duas maneiras distintas: uma levando em conta os graus de liberdade hadrônicos, o qual chamamos de lado fenomenológico, em que podemos representá-lo em forma de uma densidade espectral escrita em termos de um polo dominante e um contínuo de estados excitados e, o outro chamado de lado da QCD, ou lado da OPE (Expansão de Produto de Operadores, do inglês *Operator Product Expansion*), que leva em conta os graus de liberdade dos quarks e glúons constituintes, que pode ser escrito em termos de uma relação de dispersão que devido ao princípio da dualidade quark-hádron, podemos comparar estas duas vertentes da teoria eliminando a contribuição dos estados excitados e os termos de ordem mais altas do lado da OPE.

Hoje temos uma oportunidade ímpar de ter em operação, desde setembro de 2009, o maior acelerador de partículas já construído pelo homem. Um acelerador com capacidade de gerar uma energia colossal maior do que 7 TeV por feixe, o Grande Colisor de

Hádrons (do inglês *LHC - Large Hadron Collider*, em pleno funcionamento no Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN) localizado nas proximidades de Genebra na Suíça. Desde o seu funcionamento praticamente todo dia tem-se dados que apontam para a descoberta de novos hádrons, o que motiva bastante a comunidade da física hadrônica a buscar explicações sobre essas novas partículas que surgem, onde muitas dessas partículas descobertas podem ser interpretadas como excitações radiais [3].

Há muitas motivações para estudar os estados excitados em Regras de Soma da QCD, como por exemplo no espectro do charmônio, estados descobertos recentemente como o  $Y(4260)$  e o  $Y(4660)$  são um grande exemplo do por que desta motivação, portanto existem teorias que consideram o  $Y(4260)$  como um estado ligado da  $J/\Psi - f_0$  [4] e o  $Y(4660)$  tem sido interpretada como um estado ligado da  $\Psi(2S) - f_0$ , Refs. [5] e [6] mostram que o  $Y(4660)$  é um estado excitado do  $Y(4260)$ . Outras partículas também recém descobertas como o  $Z^+(4430)$  seria um estado excitado do  $X^+(3872)$  e o  $Z_b^+(10610)$  seria um estado excitado do  $X_b^+(10100)$  [3]. Como é usual em Regras de Soma da QCD, podemos relacionar o lado fenomenológico como uma representação de uma densidade espectral com um polo e um contínuo de estados excitados. Podemos tomar como ideia base a comparação entre este modelo proposto por Shifman com o espectro experimental [7][8] do méson  $\rho$  dado na fig.1.3.

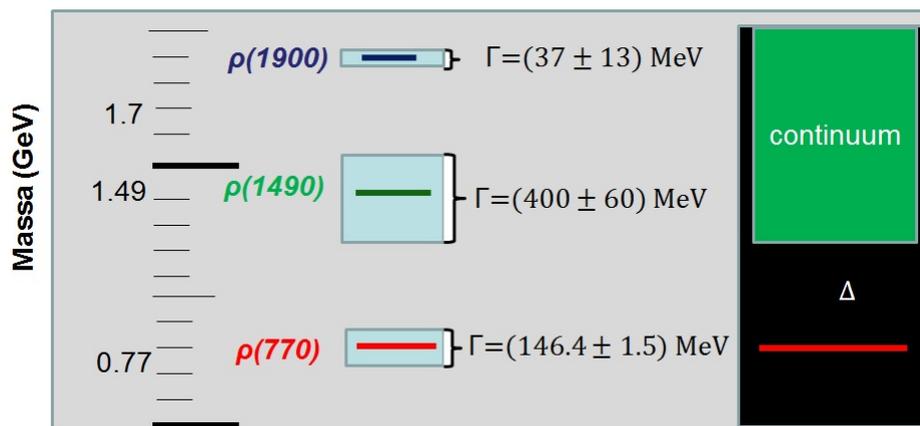


Figura 1.3: Lado esquerdo: espectro experimental das excitações radiais do méson  $\rho$  [7][8], com as devidas larguras de decaimento. Lado Direito: modelo proposto por Shifman, para as excitações radiais do méson  $\rho$ .

Segundo a referência [9], Os métodos descritos são muito pobres na determinação das excitações radiais. A transformada de Borel é planejada para garantir o domínio do estado fundamental. Para todos os quarks pesados, as ressonâncias mais altas são, conseqüentemente, empurradas para os primeiros momentos e a resolução é muito pobre. Por outro lado, atualmente existem dois métodos onde os estados excitados são considerados em regras de soma da QCD: o método de Máxima Entropia [10] e o Ansatz da Regra de Soma Gaussiana “polo + polo + contínuo” [11]. No método de Máxima Entropia há estudos para o méson  $\rho$  [10], nucleon [12],  $J/\Psi$  [13] e  $\Upsilon$  [14]. Na Regra de Soma Gaussiana há estudos para estados mistos de Glueballs e mésons escalares[11].

Na QCD na Rede, o estudo para estados excitados é uma área recente [15], onde há uma grande quantidade de estudos voltados para o méson  $\pi(2S)$  [16], estados excitados do méson  $\rho$  [15], charmônio [17][18][19], estados excitados do nucleon [20][21][22] e espectro de charmonios exóticos [23]. Em adição, os estados excitados tem sido estudados recentemente por inúmeras abordagens como: QCD’s Bethe-Salpeter Equation [24] para os mésons  $\pi(2S)$  e  $\rho(2S)$ , modelo frontal de quarks leves [25][26] para os mesons  $\rho(2S)$ ,  $\eta_c(2S)$  e  $\Psi(2S)$ . A  $\Psi(2S)$  tem sido estudado, em QCDSR, como um méson híbrido [29] usando o Ansatz “polo+contínuo”.

Neste trabalho sugerimos um novo método em regras de Soma da QCD para o estudo destes estados excitados, primeiramente nós propomos uma nova densidade espectral com dois polos para o méson em questão e, em nossa interpretação física redefinimos tais parâmetros comumente usados,  $s_0$  (início do contínuo) e  $\Delta$  (espaçamento entre o polo e o contínuo, comumente chamado de *Gap*), por fim nós aplicamos esse método para os estados excitados utilizando o Ansatz “polo + polo + contínuo” em Regras de Soma da QCD e aplicamos no caso de mésons vetoriais bem estabelecidos como o  $\rho(2S)$ ,  $\Psi(2S)$  e o  $\Upsilon(2S)$ , com o intuito de testar a eficácia desse novo método.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no cap.1 apresentamos o método

proposto por Shifman interpretado a função de correlação do lado da OPE (do inglês *Operator Product Expansion*) e do lado da fenomenologia, por fim introduzindo a transformada de Borel. No cap.3 mostramos o desenvolvimento do nosso método onde, montamos a série da OPE para quarks leves e para quarks pesados do lado da QCD, aplicamos o nosso Ansatz “polo + polo + contínuo” do lado da fenomenologia, mostrando o método da subtração da função de correlação e por fim efetuamos a Regra de Soma com polo duplo. No cap.4 após o desenvolvimento do nosso método apresentamos os nossos resultados justificando a escolha da nossa janela de Borel bem como para os dados obtidos para as observáveis hadrônicas massa e constante de decaimento. No cap.5 finalizando este trabalho nós apresentamos as nossas conclusões.

## Capítulo 2

# Regras de Soma da QCD

As Regras de Soma da QCD consistem numa técnica onde são tratadas os aspectos não perturbativos da QCD desenvolvida pelos físicos Shifman, Vainshtein e Zakharov, hoje conhecido também como método SVZ. Este método tem a vantagem de ser um procedimento analítico possibilitando assim, o cálculo de algumas propriedades dos hádrons, como no caso deste trabalho, a massa e constantes de decaimento dos hádrons. O método consiste na comparação de duas interpretações distintas da função de correlação: O lado fenomenológico que exprime as propriedades dos hádrons e o lado da QCD que leva em consideração os graus de liberdade dos quarks e glúons. Esta comparação é possível devido a dualidade quark-hádron, de contrapartida o método das regras de soma é limitado pelo truncamento da expansão de operadores oriundas do lado da QCD e pela dominância do polo do lado fenomenológico. Assim, temos que estudar caso a caso para determinar seus limites de validade.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 2.1 apresentamos e definimos a função de correlação de 2-pontos mostrando também a importância nas Regras de Soma. Na seção 2.2 descrevemos o lado da QCD. Na seção 2.3 descrevemos o lado fenomenológico, e por fim na seção 2.4 definimos a transformada de Borel.

## 2.1 A função de Correlação de 2-pontos

A função de correlação desempenha um papel fundamental no âmbito das Regras de Soma da QCD. Se desejamos calcular a massa e a constante de decaimento do hádron deveremos usar uma função de correlação de 2-pontos. Se estivermos interessados em calcular constantes de acoplamento associada a um vértice deveremos usar uma função de correlação de mais de 3-pontos e assim por diante.

A função de correlação de 2-pontos para o cálculo da massa e constantes de decaimento para os mésons vetoriais é definida como

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle \quad (2.1.1)$$

onde  $J_\mu(x)$  é a corrente escrita em termos dos campos de quarks que possui as informações sobre os números quânticos do méson vetorial.

## 2.2 Lado da QCD

Do ponto de vista da QCD podemos descrever os hádrons em função das suas correntes interpolantes de quarks. Estas por sua vez podem ser escritas para os seguintes casos: para o méson  $\rho^+$ ,  $J_\mu(x) = \delta_{ab} \bar{d}_a(x) \gamma_\mu u_b(x)$ , para o méson  $J/\Psi$ ,  $J_\mu(x) = \delta_{ab} \bar{c}_a(x) \gamma_\mu c_b(x)$  e para o méson  $\Upsilon$ ,  $J_\mu(x) = \delta_{ab} \bar{b}_a(x) \gamma_\mu b_b(x)$ . Dada a função de correlação no espaço das coordenadas

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \langle 0 | T \{ J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle. \quad (2.2.2)$$

Onde os índices presentes  $a$  e  $b$  indicam as cores e as matrizes  $\gamma_\mu$  são as matrizes de Dirac.

Considerando inicialmente o estudo do  $J/\Psi$ , inserindo essa corrente na eq.(2.2.2), temos para o  $J/\Psi$

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \delta_{ab} \delta_{ef} \langle 0 | T \{ \bar{c}_a(x) \gamma_\mu c_b(x) \bar{c}_f(0) \gamma_\nu c_e(0) \} | 0 \rangle \quad (2.2.3)$$

ou reescrevendo a função de correlação em termos dos espinores, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(x) = & \delta_{ab}\delta_{cd} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{i'=1}^4 \sum_{j'=1}^4 [\gamma_\mu]_{ij} [\gamma_\nu]_{i'j'} \\ & \langle 0|T \{[\bar{c}_a(x)]_i [c_b(x)]_j [\bar{c}_f(0)]_{i'} [c_e(0)]_{j'}\} |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Deste modo a eq.(2.2.4) depende de uma função de Green de 4 campos, dada por

$$G(x) = \langle 0|T \{[\bar{c}_a(x)]_i [c_b(x)]_j [\bar{c}_f(0)]_{i'} [c_e(0)]_{j'}\} |0\rangle. \quad (2.2.5)$$

Aplicando o teorema de Wick, segundo o apêndice E, podemos contrair os campos de quarks dois a dois de modo a representá-los em termos dos propagadores de Feynman, como os campos de quarks são fermiônicos, temos que a contração na eq.(2.2.5) é da forma

$$G(x) = \langle 0|T \{[c_b(x)]_j [\bar{c}_f(0)]_{i'}\} |0\rangle \langle 0|T \{[\bar{c}_a(x)]_i [c_e(0)]_{j'}\} |0\rangle. \quad (2.2.6)$$

Onde definimos o propagador de Feynman da seguinte forma

$$S^{ab}(x, m_c)_{kl} = \langle 0|T \{[c_a(x)]_k [\bar{c}_b(0)]_l\} |0\rangle, \quad (2.2.7)$$

sendo os índices  $k, l$  índices matriciais e  $m_c$  a massa do quark  $c$ . Logo usando a relação dada pela eq.(2.2.7) na eq.(2.2.6) obtemos o seguinte resultado

$$G(x) = S^{db}(x, m_c)_{j'i'} S^{ae}(-x, m_c)_{j'i}. \quad (2.2.8)$$

Agora, usando a relação dada pela eq.(2.2.8) na eq.(2.2.4), obtemos a seguinte equação

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \delta_{ab}\delta_{ef} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{i'=1}^4 \sum_{j'=1}^4 [\gamma_\mu]_{ij} [\gamma_\nu]_{i'j'} S^{fb}(x, m_c)_{j'i'} S^{ae}(-x, m_c)_{j'i}. \quad (2.2.9)$$

No produto matricial encontrado na eq.(2.2.9) podemos contrair os índices matriciais, formando novos produtos, de tal forma que o resultado final dessas contrações é da forma

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \delta_{ab}\delta_{ef} \sum_{i=1}^4 [\gamma_\mu S^{fb}(x, m_c) \gamma_\nu S^{ae}(-x, m_c)]_{ii} \quad (2.2.10)$$

cujo somatório presente na equação acima é a definição do traço de uma matriz, dessa forma a função de correlação, na interpretação da OPE, possui a seguinte forma

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \delta_{ab}\delta_{ef}Tr [\gamma_\mu S^{fb}(x, m_c)\gamma_\nu S^{ae}(-x, m_c)]. \quad (2.2.11)$$

Esta equação por sua vez é válida para todos os mésons vetoriais formados por um par quark e anti-quark.

## 2.3 Lado fenomenológico

No lado fenomenológico podemos levar em consideração apenas os graus de liberdade hadrônicos que, onde podemos reescrever as correntes como um produto temporalmente ordenado tal que

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \{ \langle 0 | J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(x_0) + \langle 0 | J_\nu^\dagger(0) J_\mu(x) | 0 \rangle \theta(-x_0) \}, \quad (2.3.12)$$

onde temos

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \langle 0 | J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(x_0) + \langle 0 | J_\nu^\dagger(0) J_\mu(x) | 0 \rangle \theta(-x_0). \quad (2.3.13)$$

Levando em consideração os mésons que se acoplam com a corrente  $J_\mu$ , podemos escrever o operador identidade através da seguinte relação

$$\hat{1} = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2q_0} |V_\lambda(q)\rangle \langle V_\lambda(q)|, \quad (2.3.14)$$

e que o operador de corrente hadrônica obedece a equação de evolução temporal [34]

$$J_\mu(x) = e^{iPx} J_\mu(0) e^{-iPx}, \quad (2.3.15)$$

Onde o estado  $|V_\lambda(q)\rangle$  representa o méson vetorial, o índice  $\lambda$  representa a polarização e  $P$  é o quadrivetor  $P^\mu = (E, \vec{p})$  operador momento. Substituindo eq.(2.3.14) e eq.(2.3.15) na eq.(2.3.13), levando em consideração a álgebra do operador evolução temporal e do operador de corrente que são dadas por

$$e^{\pm iPx} |V_\lambda(q)\rangle = e^{\pm iqx} |V_\lambda(q)\rangle \quad (2.3.16)$$

$$e^{\pm iPx} |0\rangle = |0\rangle \quad (2.3.17)$$

$$\langle 0 | J_\mu(0) | V_\lambda(q) \rangle = f_V m_V \epsilon_\mu^\lambda(q). \quad (2.3.18)$$

onde  $\epsilon_\mu^\lambda(q)$  é o versor de polarização,  $m_V$  é a massa do hádron e  $f_V$  é a constante de decaimento que pode ser extraída experimentalmente através do processo de mésons vetoriais em um par elétron-pósitron.

Temos então a seguinte equação para o lado fenomenológico

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(x) = & \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2q_0} \{ e^{-iqx} \langle 0 | J_\mu(0) | V_\lambda(q) \rangle \langle V_\lambda(q) | J_\nu^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(x_0) \\ & + e^{iqx} \langle 0 | J_\nu^\dagger(0) | V_\lambda(q) \rangle \langle V_\lambda(q) | J_\mu(0) | 0 \rangle \theta(-x_0) \}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Agora na eq.(2.3.19), calculando os elementos de matrizes utilizando eq.(2.3.18) temos finalmente

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2q_0} \{ e^{-iqx} \theta(x_0) + e^{iqx} \theta(-x_0) \} f_V^2 m^2 \epsilon_\mu^\lambda(q) \epsilon_\nu^\lambda(q). \quad (2.3.20)$$

Sabendo que o versor de polarização obedece a seguinte relação

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu^\lambda(q) \epsilon_\nu^\lambda(q) = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2} \right). \quad (2.3.21)$$

Usando a seguinte identidade [33]

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2q_0} \{ e^{-iqx} \theta(x_0) + e^{iqx} \theta(-x_0) \} F(q) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} F(p), \quad (2.3.22)$$

a partir de eq.(2.3.21), definimos  $F(p) = -f_V^2 m^2 (g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / m^2)$ , logo a identidade em eq.(2.3.22) diz que

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} f_V^2 m^2 \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right). \quad (2.3.23)$$

Aplicando a transformada de Fourier quadridimensional, no espaço das configurações, temos que

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f_V^2 m^2 \frac{\left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{i(q-p)x}, \quad (2.3.24)$$

onde a integral em  $d^4x$  é a definição da delta de Dirac,  $\delta^4(q - p)$ .

Deste modo temos a função de correlação fenomenológica para o estado fundamental, no espaço dos momentos, definida como

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{f_V^2 m^2}{q^2 - m^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2} \right). \quad (2.3.25)$$

Até este ponto, para não carregar notação, omitimos a contribuição das ressonâncias, que neste caso pode ser representada como uma soma de contribuição dos estados excitados, todavia, com a inclusão destes a função de correlação do lado fenomenológico completa possui a seguinte forma

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{f_1^2 m_1^2}{q^2 - m_1^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_1^2} \right) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_i^2 m_i^2}{q^2 - m_i^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_i^2} \right). \quad (2.3.26)$$

De modo geral podemos escrever o correlator do lado fenomenológico da seguinte forma

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi(q^2)g_{\mu\nu} - \Pi'(q^2)q_\mu q_\nu. \quad (2.3.27)$$

O correlator do lado fenomenológico pode ser representado por uma densidade espectral, podemos analisar essa aproximação observando a fig.2.1 abaixo.

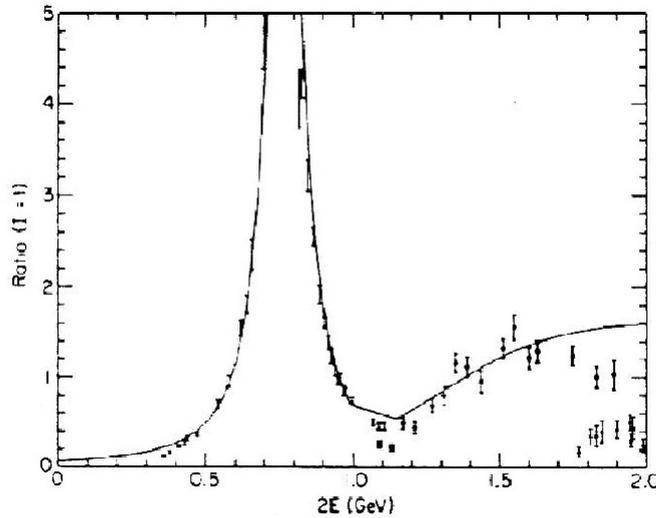


Figura 2.1: Espectro experimental para o méson  $\rho$  no canal  $e^+e^- \rightarrow V$ , onde  $V$  representa o méson vetorial, obtido na década de 1970.

Este método possui a vantagem de podermos usar a dualidade quark-hádron. Assim

se considerarmos a estrutura invariante  $\Pi(q^2)$  em  $g_{\mu\nu}$ , temos

$$\Pi^{fen}(q^2) = \int_0^\infty ds \frac{\rho^{fen}(s)}{s - q^2} + \dots, \quad (2.3.28)$$

onde  $\rho^{fen}(s)$  é a densidade espectral fenomenológica. Considerando os estados excitados como um contínuo, temos

$$\rho^{fen}(s) = f_1^2 m_1^2 \delta(s - m_1^2) + \rho^{cont}(s), \quad (2.3.29)$$

onde  $\rho^{cont}(s) = \theta(s - s_0) \rho^{pert}(s)$  consiste no princípio da dualidade quark-hádron e  $s_0$  marca o início dos estados excitados. Podemos substituir eq.(2.3.29) em eq.(2.3.28) e obter a seguinte equação

$$\Pi^{fen}(q^2) = \frac{f_1^2 m_1^2}{q^2 - m_1^2} + \int_{s_0}^\infty ds \frac{\rho^{pert}(s)}{s - q^2}. \quad (2.3.30)$$

## 2.4 A transformada de Borel

Após encontrarmos os correlatores pela interpretação da QCD (no caso usamos a corrente da  $J/\Psi$ ) e da fenomenológica, para mésons vetoriais, via regra de soma devemos impor a igualdade entre essas duas interpretações, que já é garantida devido a dualidade quark-hádron, ou seja, o hádron pode ser entendido com uma única partícula observada em termos de seus graus de liberdade e ao mesmo tempo pode ser representada em termos de uma composição de quarks, porém as aproximações adotadas nos dois lados trazem complicações. O lado da OPE carrega a impossibilidade do cálculo de toda série de modo que temos truncar a série em algum ponto, justificada pela liberdade assintótica.

No lado fenomenológico tomamos a aproximação para a densidade espectral que assume as ressonâncias como um contínuo de estados excitados e um único polo fundamental. Para contornar estes problemas das duas interpretações devemos suprimir as contribuições de ordens mais altas da OPE e o papel dos estados excitados no lado fenomenológico. Fazemos isso introduzindo a transformada de Borel [30] que atua nos

momentos das partículas, que é definida como

$$B [f(Q^2)] = \lim_{\substack{Q^2, n \rightarrow \infty \\ \frac{Q^2}{n} \rightarrow M^2}} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial Q^2} \right)^n f(Q^2) \quad (2.4.31)$$

onde  $Q^2 = -q^2$  é o momento no espaço euclidiano e  $M^2$  é uma variável, que surge devido a aplicação da transformada, chamada de *Massa de Borel*. Abaixo temos alguns exemplos de transformadas de Borel

$$B [(Q^2)^k] = 0, \forall k > 0 \quad (2.4.32)$$

$$B [(Q^2)^{-k}] = \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{1}{M^2} \right)^{k-1}, \forall k > 0 \quad (2.4.33)$$

$$B [(s + Q^2)^{-1}] = e^{-\frac{s}{M^2}}, \forall k > 0. \quad (2.4.34)$$

No lado da QCD, a transformada de Borel ajuda na convergência da OPE, suprimindo a contribuição dos operadores de dimensão mais alta, para altos valores na massa de Borel. Para o lado fenomenológico ao aplicarmos a transformada de Borel temos

$$B [\Pi^{fen.}(Q^2)] = f_1^2 m_1^2 e^{-\frac{m_1^2}{M^2}} + \int_{s_0}^{\infty} ds \rho^{OPE}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}. \quad (2.4.35)$$

Observando eq.(2.4.35) notamos que a contribuição dos estados excitados diminui, para baixos valores na massa de Borel. Como consequência disso, podemos determinar uma região de  $M^2$  em que as contribuições de ordem mais alta da OPE e dos estados excitados são suprimidos, onde os parâmetros fenomenológicos associados ao estado fundamental do hádron possam ser determinados. Assim, devemos determinar um intervalo em  $M^2$  onde essa comparação seja adequada e nos mostre resultados confiáveis. Esse intervalo a determinar damos o nome de janela de Borel.

### 2.4.1 Janela de Borel

Para determinarmos o máximo e o mínimo da janela de Borel primeiramente devemos satisfazer a seguinte relação  $M_{max} > M_{min}$  onde o intervalo da massa de Borel deve estar entre  $M_{min} \leq M \leq M_{max}$ .

Analisando eq.(2.4.35) onde o primeiro termo da soma é o polo e o segundo termo o contínuo, a medida que a massa de Borel aumenta a contribuição do polo diminui e a contribuição dos contínuo aumenta, portanto deve haver um valor máximo para a massa de Borel na qual as duas contribuições se igualem, a este valor damos o ponto máximo da Massa de Borel.

## Capítulo 3

# Regras de Soma com polo duplo

Sabemos que o método SVZ proposto, consiste em tomar a densidade espectral do lado da fenomenologia e representá-la em termos de um polo dominante e um contínuo de estados excitados, de acordo como podemos analisar observando a fig.1.3 e a fig.2.1. Por outro lado segundo a referência [9] sabemos também que este método não é ideal para tratar no que se diz respeito ao estudo de excitações radiais, devido aos problemas com a divergência da série (OPE) onde a transformada de Borel entra de forma a garantir o domínio do estado fundamental (domínio do polo sobre o contínuo do lado da fenomenologia) e suprimir os termos de ordem do lado da OPE. Contudo ao observamos a fig.3.1, notamos que há uma certa discretariedade quanto aos polos do estado fundamental, primeiro estado excitado e segundo estado excitado para o espectro experimental obtido do méson  $\Upsilon$ , e que nada impede que possamos fazer regras de soma com três polos, assim esperamos que o método do duplo polo seja uma boa aproximação para densidade espectral.

Este capítulo está dividido da seguinte forma. Na sec.3.1 mostramos a OPE dos três casos que nós estudamos, na sec.3.2 desenvolvemos e aplicamos o nosso método “polo + polo + contínuo”, na sec.3.3 aplicamos o método da subtração da função de correlação, na sec.3.4 desenvolvemos a transformada de Borel para no caso com o duplo polo e na sec.3.5 igualamos os lados da OPE e da fenomenologia pela dualidade quark-hádron.

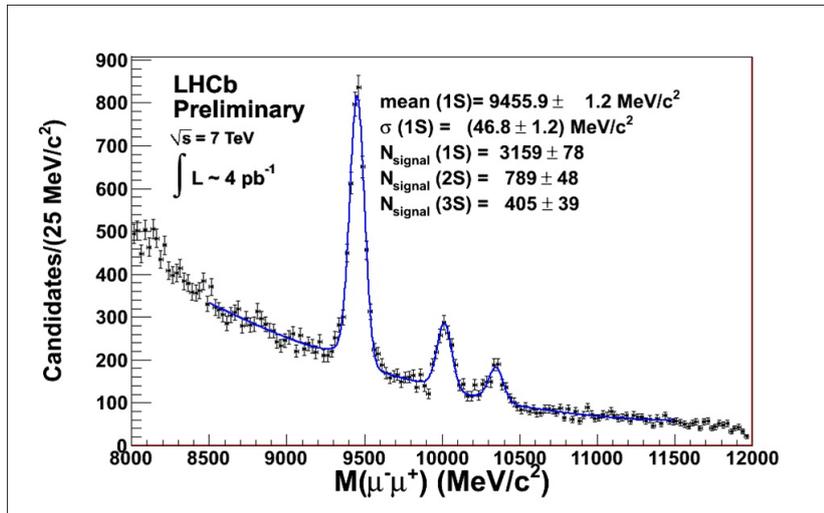


Figura 3.1: Espectro experimental para o méson  $\Upsilon$  no canal  $e^+e^- \rightarrow V$ , onde  $V$  representa o méson vetorial, obtido no LHCb em 2010, observamos uma formação de três polos respectivamente, da esquerda para a direita, para o estado fundamental, primeiro estado excitado e segundo estado excitado.

### 3.1 A OPE

Basicamente a OPE para as QCDSR com o Ansatz do polo duplo no lado fenomenológico continuam as mesmas pelo fato de que, na interpretação da OPE, as correntes dos hádrons podem ser representadas em termos dos campos de quarks que, nas excitações radiais (excitações cujos números quânticos e conteúdo de quarks continuam o mesmos diferindo-se apenas pela massa), permanecem com os mesmos graus de liberdade de modo que essa expansão não se altere. Ou seja, ao estudarmos, por exemplo as excitações radiais dos mésons  $\rho$  e  $J/\Psi$ , que são uns dos nossos objetos de estudo, temos que todo o espectro hadrônico de suas excitações radiais possuem os mesmos números quânticos  $I(J^{PC}) = 1(1^{--})$  e as correntes sejam: para o excitações do méson  $\rho^+$ ,  $J_\mu(x) = \delta^{ab}\bar{u}^a(x)\gamma_\mu d^b(x)$  e do méson  $J/\Psi$ ,  $J_\mu(x) = \delta^{ab}\bar{c}^a(x)\gamma_\mu c^b(x)$ . Onde  $I(J^{PC})$  são respectivamente os números quânticos o Isospin, o Spin, a Paridade e a Conjugação de Carga que definem um méson vetorial.

Logo temos que as expansões em termos da OPE, respectivamente para os mésons  $\rho(2S)$  e  $\Psi(2S)$  são da seguinte forma



Figura 3.2: Diagrama de Feynman da OPE do meson  $\rho$ , diagramas: perturbativo, correção radiativa [34], condensado de glúons e condensado de quarks

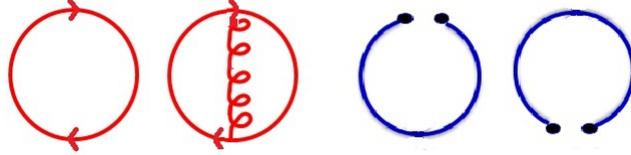


Figura 3.3: Diagrama de Feynman da OPE do meson  $J/\Psi$ , diagramas: perturbativo, correção radiativa [34][39] e condensado de quarks

As correções radiativas neste trabalho não foram calculadas, apenas computadas e podem ser vistas nas referências [34][39]. Onde os diagramas da sequência vermelho a azul são: o diagrama perturbativo, do condensado de glúons e do condensado de quarks. Consideramos a dispersão definida por

$$\rho^{OPE}(s) = \frac{Im[\Pi^{OPE}(s)]}{\pi}, \quad (3.1.1)$$

segundo o apêndice F

Logo na estrutura invariante  $\Pi(q^2)$  em  $g_{\mu\nu}$  temos para o méson  $\Psi(2S)$  a seguinte expansão pelo apêndice A

$$\rho^{OPE}(s) = -\frac{s}{4\pi^2} \sqrt{1 - 4\frac{m_c^2}{s}} \left(1 + 2\frac{m_c^2}{s}\right), \quad (3.1.2)$$

$$\Pi^{(\bar{c}c)}(q^2) = 4 \langle \bar{c}c \rangle \frac{m_c}{q^2 - m_c^2}. \quad (3.1.3)$$

Para o méson  $\rho(2S)$ , temos pelo apêndice B

$$\rho^{OPE}(s) = \frac{s}{4\pi^2}, \quad (3.1.4)$$

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{12q^2} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2(0) \right\rangle + 2 \langle \bar{q}q \rangle \frac{m_q}{q^2}. \quad (3.1.5)$$

No caso do méson  $\Upsilon$  temos a mesma OPE do méson  $J/\Psi$  uma vez que temos uma simetria nas correntes interpolantes tomando  $J_\mu = \delta_{ab}\bar{c}_a\gamma_\mu c_b \rightarrow J_\mu = \delta_{ab}\bar{b}_a\gamma_\mu b_b$ . Deste modo temos

$$\rho^{OPE}(s) = -\frac{s}{4\pi^2}\sqrt{1-4\frac{m^2}{s}}\left(1+2\frac{m^2}{s}\right) \quad (3.1.6)$$

$$\Pi^{\langle\bar{b}b\rangle}(q^2) = 4\langle\bar{b}b\rangle\frac{m_b}{q^2-m_b^2}. \quad (3.1.7)$$

Onde escrevemos a série truncada da OPE em sua estrutura invariante, para quarks leves, da seguinte forma:

$$\Pi^{OPE}(q^2) = \Pi^{pert}(q^2) + \Pi^{\langle\bar{q}q\rangle}(q^2) + \Pi^{\langle G^2(0)\rangle}(q^2), \quad (3.1.8)$$

e para quarks pesados temos:

$$\Pi^{OPE}(q^2) = \Pi^{pert}(q^2) + \Pi^{\langle\bar{q}q\rangle}(q^2). \quad (3.1.9)$$

Onde podemos escrever o lado da QCD em termos da seguinte equação

$$\Pi^{pert}(q^2) = \int_0^\infty ds \frac{\rho^{OPE}(s)}{s-q^2} \quad (3.1.10)$$

com  $\rho^{OPE}(s)$  definido segundo a eq.(3.1.1).

## 3.2 A fenomenologia com dois polos

Para mésons vetoriais tipo  $\bar{q}q$  sabemos que a função de correlação é do tipo

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0|T J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0)|0\rangle. \quad (3.2.11)$$

Onde o decaimento de um méson vetorial qualquer  $V_\lambda(q)$  num par  $e^+e^-$  é descrito pelo elemento de matriz  $\langle 0|J_\mu(0)|V_\lambda(q)\rangle$  que conecta tal méson com o vácuo da QCD da forma que

$$\langle 0|J_\mu(0)|V_\lambda(q)\rangle = f_V m \epsilon_\mu^\lambda(q). \quad (3.2.12)$$

Seguindo os procedimentos da seção 2.3, onde descrevemos o lado fenomenológico como é usualmente feito, vemos que o correlator é dado em termos de uma densidade espectral como mostra a eq.(2.3.28) e o Ansatz para essa densidade espectral, no método SVZ, é definido pela eq.(2.3.29), como mostra a fig.1.3.

Nosso método para observações de estados excitados em QCDSR consiste basicamente na ideia de que a densidade espectral passaria a ser representada pelo Ansatz “polo + polo + contínuo”. Na observação do espectro do méson  $\rho$ , por exemplo, o proposto pelo método SVZ é uma boa aproximação, visto que existe uma grande largura de decaimento do méson  $\rho(1450)$  e a possibilidade da existência de uma ressonância  $\rho(1570)$  com a largura de decaimento por volta de 144 MeV. De contrapartida o espectro do méson  $J/\Psi$ , como podemos ver na fig.3.4, é muito diferente e uma proposta para densidade espectral do tipo “polo + polo + contínuo” pode se aproximar mais.

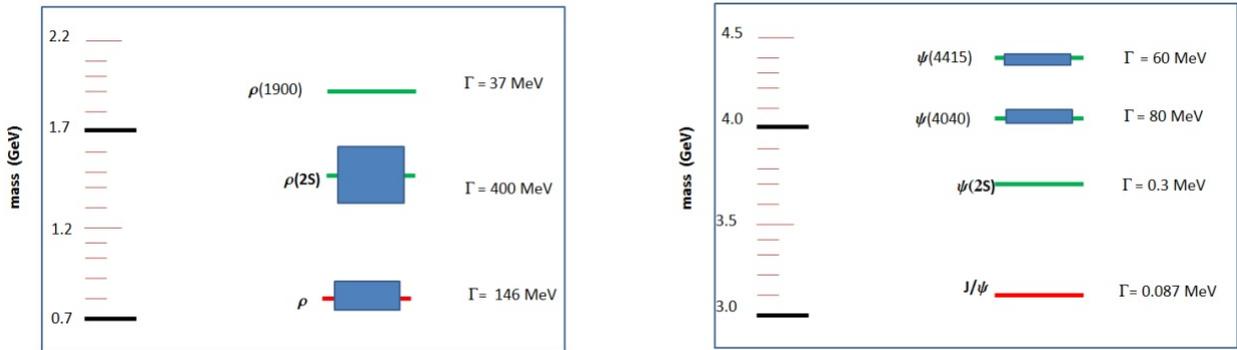


Figura 3.4: Espectros para massa e a largura de decaimento dos mesons  $\rho$  e  $J/\Psi$ .

Segundo nosso Ansatz, na representação “polo + polo + contínuo”, redefinimos nossos parâmetros, agora o parâmetro livre passa a ser o  $\Delta'$  que consiste no *Gap* entre o primeiro estado excitado e o contínuo, o início do contínuo é definido pelo parâmetro  $s'_0$  que está ligado com a massa do primeiro estado excitado pela seguinte equação

$$s'_0 = (m_2 + \Delta')^2 \quad (3.2.13)$$

como podemos ver segundo a fig.3.5.

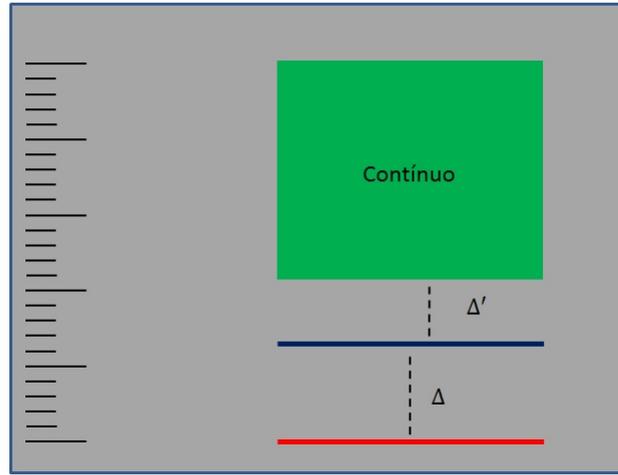


Figura 3.5: Densidade espectral segundo nosso Ansatz.

Deste modo nossa densidade espectral é definida segundo a equação

$$\rho(s) = f_1^2 m_1^2 \delta(s - m_1^2) + f_2^2 m_2^2 \delta(s - m_2^2) + \rho^{cont}(s) \theta(s - s'_0). \quad (3.2.14)$$

Substituindo eq.(3.2.14) em eq.(2.3.28) temos

$$\Pi(q^2) = \frac{f_1^2 m_1^2}{m_1^2 - q^2} + \frac{f_2^2 m_2^2}{m_2^2 - q^2} + \int_{s'_0}^{\infty} ds \frac{\rho^{cont}(s)}{s - q^2}. \quad (3.2.15)$$

### 3.3 Método da função de correlação subtraída

O uso deste método é necessário para correções na massa dos mésons formados por quarks leves no lado da OPE, devido a certas instabilidades presents, quando efetuamos a transformada de Borel, já para mésons formados por quarks pesados temos uma certa invariância na massa dos mésons ao trabalharmos com a função de correlação subtraída ou não, porém nos dois casos percebe-se que ela melhora a regra de soma. O método da subtração da função de correlação [30] consiste, basicamente, tomar a diferença entre as funções de correlação em um dado  $q^2$  a menos de  $q^2 = 0$  como mostra a equação abaixo

$$\bar{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0). \quad (3.3.16)$$

Sabemos que a função de correlação na estrutura invariante, de modo geral, é da

forma

$$\Pi(q^2) = \int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{s - q^2} \quad (3.3.17)$$

que, ao tomarmos a diferença dada pela eq.(3.3.16), usando a eq.(3.3.17) temos que

$$\bar{\Pi}(q^2) = q^2 \int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{s(s - q^2)}, \quad (3.3.18)$$

onde definindo o novo correlator como

$$\tilde{\Pi}(q^2) = \frac{\bar{\Pi}(q^2)}{q^2} \quad (3.3.19)$$

e temos a seguinte relação

$$\bar{\rho}(s) = \frac{\rho(s)}{s}. \quad (3.3.20)$$

Por outro lado, sabemos que o lado da OPE, podemos representar o termos perturbativo através de uma relação de dispersão, logo como o nosso problema de estados excitados trata também com mésons formados por quarks leves, temos que pelo método de subtração a função de correlação do termo perturbativo toma a seguinte forma

$$\tilde{\Pi}^{pert}(q^2) = \int_0^\infty ds \frac{\bar{\rho}^{OPE}(s)}{s - q^2}, \quad (3.3.21)$$

onde a dispersão  $\bar{\rho}^{OPE}(s) = \frac{\rho^{OPE}(s)}{s}$  é dada pela eq.(3.3.20), e os termo de condensados de ordem maior tomam a seguinte forma

$$\tilde{\Pi}^{COM}(q^2) = \frac{\Pi^{COM}(q^2)}{q^2} \quad (3.3.22)$$

Pelo lado fenomenológico a função de correlação pode ser entendida como uma densidade espectral como mostra eq.(3.2.15), utilizando novamente a eq.(3.3.16) onde a função de correlação é dada por eq.(3.2.15) temos que

$$\bar{\Pi}^{fen}(q^2) = \frac{q^2 f_1^2 m_1^2}{m_1^2(m_1^2 - q^2)} + \frac{q^2 f_2^2 m_2^2}{m_2^2(m_2^2 - q^2)} + q^2 \int_{s'_0}^\infty ds \frac{\rho^{fen}(s)}{s(s - q^2)} \quad (3.3.23)$$

onde, pela eq.(3.3.19), temos

$$\tilde{\Pi}^{fen}(q^2) = \frac{f_1^2}{m_1^2 - q^2} + \frac{f_2^2}{m_2^2 - q^2} + \int_{s'_0}^\infty ds \frac{\bar{\rho}^{fen}(s)}{s - q^2} \quad (3.3.24)$$

com  $\bar{\rho}^{fen}(s) = \frac{\rho^{fen}(s)}{s}$ .

### 3.4 A transformada de Borel para estados excitados

Nesta seção vamos aplicar a transformada de Borel nos correlatores definidos, na seção anterior, pelas eq.(3.3.21) e eq.(3.3.24), onde vamos efetuar as Regras de Soma da QCD. Primeiramente, devemos lembrar que a igualdade entre os lados da OPE e da fenomenologia são assegurados pela dualidade quark-hádron, por outro lado, devido a divergências tanto do lado da OPE quanto da fenomenologia, nós aplicamos a transformada de Borel para eliminá-las, logo temos

$$B[\tilde{\Pi}^{OPE}(q^2)] = B[\tilde{\Pi}^{fen}(q^2)]. \quad (3.4.25)$$

Pela eq.(2.4.31), sendo o correlator do lado fenomenológico definido pela eq.(3.3.24) e sabendo que a soma da transformada de Borel é igual a transformada de Borel da soma temos

$$\begin{aligned} B[\tilde{\Pi}^{fen}(q^2)] &= f_1^2 B \left[ \frac{1}{m_1^2 - q^2} \right] + f_2^2 B \left[ \frac{1}{m_2^2 - q^2} \right] \\ &+ \int_{s'_0}^{\infty} ds \bar{\rho}^{fen}(s) B \left[ \frac{1}{s - q^2} \right] \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

que, pela eq.(2.4.34) temos para o lado fenomenológico

$$B[\tilde{\Pi}^{fen}(q^2)] = f_1^2 e^{-\frac{m_1^2}{M^2}} + f_2^2 e^{-\frac{m_2^2}{M^2}} + \int_{s'_0}^{\infty} ds \bar{\rho}^{fen}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}. \quad (3.4.27)$$

Considerando o correlator subtraído do lado da OPE dado pela eq.(3.3.21), aplicando a transformada de Borel temos

$$B[\tilde{\Pi}^{OPE}(q^2)] = \int_0^{\infty} ds \bar{\rho}^{OPE}(s) B \left[ \frac{1}{s - q^2} \right] + B[\tilde{\Pi}^{COM}(q^2)] \quad (3.4.28)$$

assim novamente temos, utilizando a relação dada pela eq.(2.4.34)

$$B[\tilde{\Pi}^{OPE}(q^2)] = \int_0^{\infty} ds \bar{\rho}^{OPE}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} + \Pi^{COM}(M^2). \quad (3.4.29)$$

Onde o termo  $B[\tilde{\Pi}^{COM}(q^2)] = \Pi^{COM}(M^2)$  refere-se a transformada de Borel dos termos de condensados de ordem maior, ou seja, dos condensados de quarks e de

glúons. Notamos também que, podemos partir a integral em duas partes, uma vez que ela é contínua em todos os pontos, de tal forma que

$$B[\tilde{\Pi}^{pert}(q^2)] = \int_0^{s'_0} ds \bar{\rho}^{OPE}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} + \int_{s'_0}^{\infty} ds \bar{\rho}^{OPE}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}. \quad (3.4.30)$$

De posse desses resultados, utilizando a eq.(3.4.25), temos a seguinte Regra de Soma

$$f_1^2 e^{-\frac{m_1^2}{M^2}} + f_1^2 e^{-\frac{m_2^2}{M^2}} + \int_{s'_0}^{\infty} ds \bar{\rho}^{fen}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} = \int_0^{s'_0} ds \bar{\rho}^{OPE}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} + \int_{s'_0}^{\infty} ds \bar{\rho}^{OPE}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} + \Pi^{COM}(M^2), \quad (3.4.31)$$

onde no intervalo  $[s'_0, \infty]$  podemos considerar que  $\bar{\rho}^{fen}(s) = \bar{\rho}^{OPE}(s)$  assim a eq.(3.4.31) fica da seguinte forma

$$f_1^2 e^{-\frac{m_1^2}{M^2}} + f_1^2 e^{-\frac{m_2^2}{M^2}} = \int_0^{s'_0} ds \bar{\rho}^{OPE}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} + \Pi^{COM}(M^2). \quad (3.4.32)$$

### 3.5 A Regra de Soma

De acordo com a eq.(3.4.32), que mostra a igualdade entre os lados da OPE e da fenomenologia, por meio da transformada de Borel, que contorna a divergência do lado da OPE e suprime a contribuição do contínuo pelo lado da fenomenologia, podemos medir, agora, as observáveis hadrônicas como massa e constante de decaimento dentro das Regras de Soma da QCD. Fica implícito neste ponto que, os termos de condensado de ordem maior são dados pela transformada de Borel da eq.(3.1.5) para quarks leves (méson  $\rho^+$ ) e das eq.(3.1.3) e eq.(3.1.7) para quarks pesados (mésons  $J/\Psi$  e  $\Upsilon$ )

Na eq.(3.4.32) definimos um parâmetro  $\tau = \frac{1}{M^2}$  tal que esta se torna

$$f_1^2 e^{-m_1^2 \tau} + f_2^2 e^{-m_2^2 \tau} = \int_0^{s'_0} ds \bar{\rho}^{pert}(s) e^{-s\tau} + \Pi^{COM}(\tau). \quad (3.5.33)$$

Definindo as seguintes igualdades:

$$f_1^2 e^{-m_1^2 \tau} = A(\tau) \quad (3.5.34)$$

$$f_2^2 e^{-m_2^2 \tau} = B(\tau) \quad (3.5.35)$$

$$\int_0^{s'_0} ds \bar{\rho}^{OPE}(s) e^{-s\tau} + \Pi^{COM}(\tau) = \Pi(\tau). \quad (3.5.36)$$

Temos que a eq.(3.5.33) se torna

$$A(\tau) + B(\tau) = \Pi(\tau), \quad (3.5.37)$$

tomando a derivada com respeito ao parâmetro  $\tau$  temos

$$-m_1^2 A(\tau) - m_2^2 B(\tau) = D_\tau \Pi(\tau) \quad (3.5.38)$$

onde  $D_\tau \Pi(\tau) = \frac{d}{d\tau} \Pi(\tau)$ .

Note que as eq.(3.5.37) e eq.(3.5.38) formam um sistema de equações cujas soluções, são a base para a Regra de Soma da QCD com polo duplo e são dadas pelas seguintes equações

$$A(\tau) = \frac{D_\tau \Pi(\tau) + m_2^2 \Pi(\tau)}{m_2^2 - m_1^2} \quad (3.5.39)$$

$$B(\tau) = \frac{D_\tau \Pi(\tau) + m_1^2 \Pi(\tau)}{m_1^2 - m_2^2}. \quad (3.5.40)$$

Está implícito nas eq.(3.5.39) e eq.(3.5.40) uma dependência com as constantes de decaimento, para eliminar esta dependência vamos tomar novamente a derivada com respeito a  $\tau$ , mas desta vez derivando as soluções dadas pelas eq.(3.5.39) e eq.(3.5.40) logo temos

$$-m_1^2 A(\tau) = \frac{D_\tau D_\tau \Pi(\tau) + m_2^2 D_\tau \Pi(\tau)}{m_2^2 - m_1^2} \quad (3.5.41)$$

$$-m_2^2 B(\tau) = \frac{D_\tau D_\tau \Pi(\tau) + m_1^2 D_\tau \Pi(\tau)}{m_1^2 - m_2^2}, \quad (3.5.42)$$

dividindo a eq.(3.5.39) pela eq.(3.5.41) temos

$$m_1 = \sqrt{-\frac{D_\tau D_\tau \Pi(\tau) + m_2^2 D_\tau \Pi(\tau)}{D_\tau \Pi(\tau) + m_2^2 \Pi(\tau)}} \quad (3.5.43)$$

e dividindo a eq.(3.5.42) pela eq.(3.5.40) temos

$$m_2 = \sqrt{-\frac{D_\tau D_\tau \Pi(\tau) + m_1^2 D_\tau \Pi(\tau)}{D_\tau \Pi(\tau) + m_1^2 \Pi(\tau)}}. \quad (3.5.44)$$

A eq.(3.5.43) e a eq.(3.5.44) estam desacopladas das constantes de decaimento, por outro lado, observando essas duas equações, as massas  $m_1$  e  $m_2$  são interdependentes [35]. Deste fato, podemos observar que a massa  $m_1$  é apresentada como uma função da massa  $m_2$ , como mostra a eq.(3.5.43), e implicitamente da massa de Borel. Já para a eq.(3.5.44) a massa  $m_2$  é apresentada como uma função da massa  $m_1$  e implicitamente da massa de Borel.

Já para as constantes de decaimento temos:

$$f_1 = e^{\frac{m_1^2 \tau}{2}} \sqrt{\frac{D_\tau \Pi(\tau) + m_2^2 \Pi(\tau)}{m_2^2 - m_1^2}} \quad (3.5.45)$$

$$f_2 = e^{\frac{m_2^2 \tau}{2}} \sqrt{\frac{D_\tau \Pi(\tau) + m_1^2 \Pi(\tau)}{m_1^2 - m_2^2}}. \quad (3.5.46)$$

Onde vemos que a constante de decaimento do estado fundamental e do primeiro estado excitado dependem das massas  $m_1$  e  $m_2$  como também da massa de Borel.

# Capítulo 4

## Resultados e Discussões

Neste capítulo iremos mostrar e discutir os nossos resultados obtidos para o caso dos mésons vetoriais  $\rho$ ,  $J/\Psi$  e  $\Upsilon$  partindo dos seguintes parâmetros experimentais adotados:  $\alpha_s = 0.3$ ,  $m_q = 4$  MeV,  $m_c = 1.3$  GeV,  $m_b = 4.5$  GeV  $\langle \bar{q}q \rangle = -(0.23)^3$   $GeV^3$ ,  $\langle \bar{c}c \rangle = -(0.0.9126)^3$   $GeV^3$ ,  $\langle \bar{b}b \rangle = -(0.0604)^3$   $GeV^3$  e  $\langle g_s^2 G^2(0) \rangle = 0.88$   $GeV^4$  [8].

Para o estudo dos mésons nós usamos um curva em duas dimensões, onde a convergência da massa de Borel é estudada para a curva de três níveis:  $M_1$  (linha pontilhada) que fornece a contribuição do polo duplo com 90%,  $M_2$  (linha sólida) que mostra a contribuição do polo com 60% e por fim,  $M_3$  (linha tracejada) que nos dá contribuição do polo com 40%, como veremos nas seções subsequentes.

A expressão matemática que mostra a contribuição relativa entre os polos pode ser obtida tomando a razão entre um dos polos e a contribuição total definida segundo a equações abaixo

$$R_{A(\tau)} = \frac{A(\tau)}{\Pi(\tau)} \quad (4.0.1)$$

$$R_{B(\tau)} = \frac{B(\tau)}{\Pi(\tau)}. \quad (4.0.2)$$

Onde  $A(\tau)$  e  $B(\tau)$  são dados respectivamente pelas eq.(3.5.39) e eq.(3.5.40), sendo  $\Pi(\tau) = \int_0^{s_0} ds \bar{\rho}^{OPE}(s)e^{-s\tau} + \Pi^{COM}(\tau)$ .

Essa imposição que a contribuição do polo definiu a janela de Borel é um progresso recente nas Regras de Soma da QCD. O uso deste critério para pentaquarks como  $\Theta^+(1540)$  e  $\Xi^{--}(1863)$  mostram que as Regras de Soma da QCD não suportam um estado de penta quarks [31]. Recentemente, este mesmo critério foi usado na Ref.[6] e eles mostram que é impossível interpretar o  $Y(4260)$  como um estado molecular  $J/\Psi - f_0$ .

Nossos resultados a seguir mostram o comportamento dos mésons vetoriais  $\rho$ ,  $J/\Psi$  e  $\Upsilon$  no Ansatz “polo + polo + contínuo” utilizado para estudar o caso de suas excitações radiais.

## 4.1 Regra de Soma para o $\rho(2S)$ e $\rho$

Baseado na distribuição espectral do méson  $\rho$  mostrado na fig.3.4 temos que, os dados experimentais sugerem o parâmetro livre seja  $\Delta' = 0.4$  GeV, porém este valor gera instabilidade nos valores para a constante de decaimento. Utilizando o valor do *Gap*  $\Delta' = 0.1$  GeV. Na fig.4.1 nós mostramos as curvas de nível para a massa utilizando a eq.(3.5.43), onde temos a massa do estado fundamental  $m_1$  como função da massa do primeiro estado excitado  $m_2$ . Nós notamos que com o aumento da massa de Borel as curvas de nível da massa convergem para a massa de Borel máxima  $M_3$ , linha tracejada, como é esperado em QCDSR.

Aparentemente, nenhum ponto parece ser privilegiado, mas a diferença entre as massas  $m_2$  e  $m_1$ , só é possível para o valor experimental  $\Delta = 0.69$  GeV com a massa  $m_2 = 1,46$  GeV. Neste caso, temos  $m_1(m_2) = 0,77$  GeV que é justamente o valor experimental para a massa do méson  $\rho$ . Assim, para esta Regra da Soma é necessário fazer alguma estimativa para a separação dos estados  $1S$  e  $2S$ , onde temos um *Gap* de acordo com os dados experimentais, para fazer a previsão da massa.

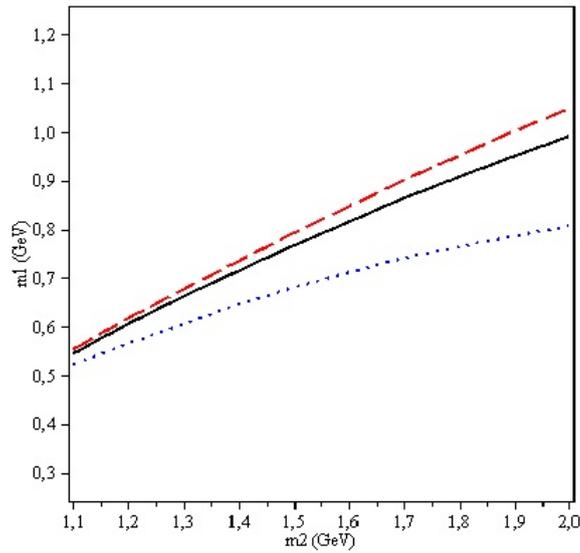


Figura 4.1: Massa do  $\rho$  como função da massa do  $\rho(2S)$ .

Para o cálculo da constante de decaimento, nós usamos os valores experimentais  $m_1 = 0.77$  GeV,  $m_2 = 1.46$  GeV e  $\Delta' = 0.1$  GeV. Na fig.4.2, nós mostramos a constante de decaimento para o méson  $\rho$  (linha sólida) e a constante de decaimento para o méson  $\rho(2S)$  (linha tracejada) como função da massa de Borel  $M$ . Nós vemos que o valor para a constante de decaimento do méson  $\rho$  atinge um platô em 200 MeV. Tal valor está em concordância com os valores experimentais que é por volta de 216 MeV [8]. Para a constante de decaimento do méson  $\rho(2S)$  vemos uma estabilidade atingida em 165 MeV.

Por outro lado, temos que considerar certas incertezas existentes no parâmetro  $\Delta'$ , a grande largura de decaimento do méson  $\rho(2S)$  e incertezas na massa do méson  $\rho(3S)$ . Por isso variamos o parâmetro livre num intervalo entre  $\Delta' = (0.15 \pm 0.05)$  GeV, deste modo temos uma predição para a constante de decaimento do méson  $\rho(2S)$  por volta de  $f_{\rho(2S)} = (177 \pm 13)$  MeV. E para a constante de decaimento do méson  $\rho$  temos  $f_{\rho} = (200 \pm 2)$  MeV.

Na fig.4.3 nós mostramos a contribuição do polo como uma função da massa de Borel, comparando as Regras de Soma com dois polos para  $s'_0 = (1.46 + 0.1)^2$  GeV<sup>2</sup> (linha tracejada) e com um único polo para  $s'_0 = (0.77 + 0.7)^2$  GeV<sup>2</sup> (linha sólida),

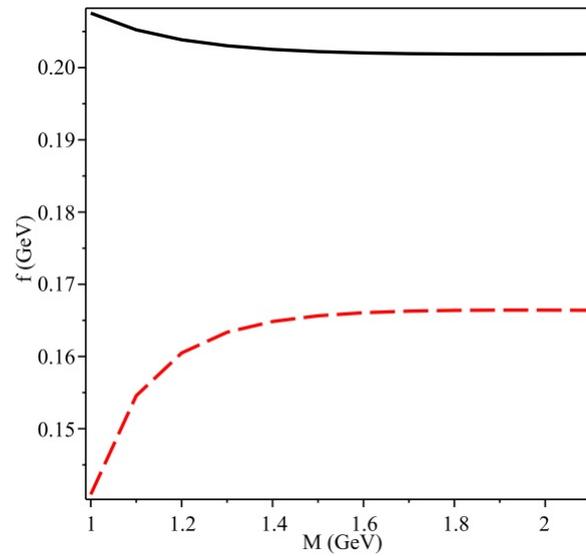


Figura 4.2: O comportamento das constantes de decaimento  $f_\rho$  (linha sólida) e  $f_{\rho(2S)}$  (linha tracejada) como função da Massa de Borel.

nós vemos que a Regra de Soma com dois polos possui uma janela de Borel mais larga que a do caso usual.

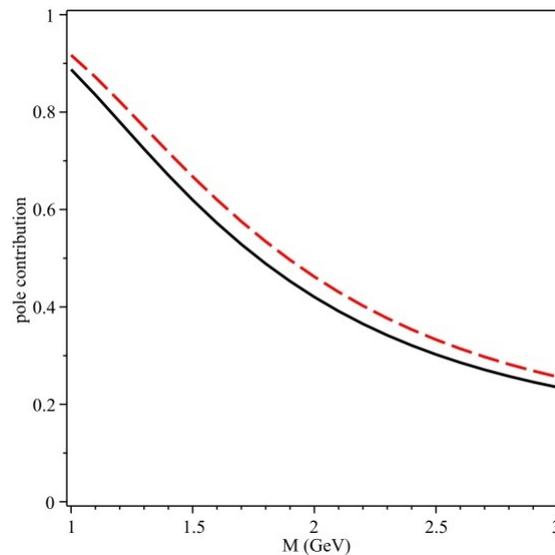


Figura 4.3: Comparativo entre as contribuições do polo entre as regras de soma usual (linha sólida) e com dois polos (linha tracejada) para o  $\rho$ .

Na fig.4.4 nós mostramos o a contribuição relativa do méson  $\rho$  (linha tracejada), definido pela eq.(4.0.1), e do méson  $\rho(2S)$  (linha sólida), definido pela eq.(4.0.1), que compõe o duplo polo. Nós vemos que para pequenos valores da massa de Borel a

contribuição do méson  $\rho$  contribui com 90%, porém com o aumento da massa de Borel até  $M_3$  a sua contribuição atinge uma estabilidade de 67%.

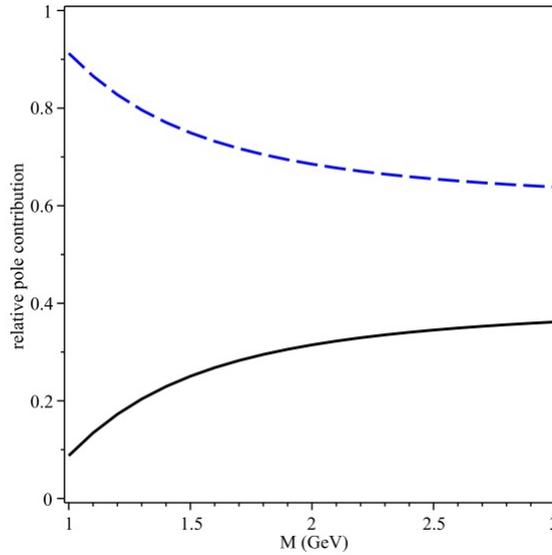


Figura 4.4: Contribuição relativa entre o  $polo_\rho$  (linha tracejada) e o  $polo_{\rho(2S)}$  (linha sólida) do Ansatz “polo + polo + contínuo”.

## 4.2 Regra de Soma para o $J/\Psi$ e $\Psi(2S)$

No estudo do méson  $J/\Psi$ , nós usamos o parâmetro livre  $\Delta' = (0.27 \pm 0.05)$  GeV, onde a incerteza nesse parâmetro está associada ao fato da ressonância  $\Psi(3S)$  possuir uma grande largura de decaimento como vemos na fig.3.4. Como foi dito anteriormente é necessário determinar a janela de Borel cujos valores máximo e mínimo que são  $M_1$  e  $M_3$ , que são obtido através da análise da contribuição do duplo polo em função da massa de Borel, dada pela eq.(3.4.27). Na fig.4.5, considerando a linha tracejada para  $s'_0 = (3.7 + 0.27)^2$ , podemos ver os valores para a massa de Borel que se encontram no intervalo de 90% à 40% que são  $M_1 = 2$  GeV (90%),  $M_2 = 3.15$  GeV (60%) e  $M_3 = 4.3$  GeV (40%). Também analisando esta figura vemos que a contribuição da regra de soma usual (com um polo), dado pela linha sólida, possui uma contribuição menor nesse mesmo intervalo da janela de Borel em relação a nossa teoria com duplo polo, como é esperado.

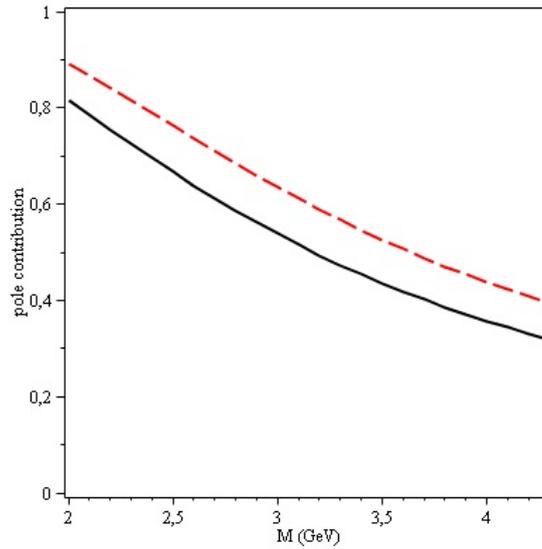


Figura 4.5: Comparativo entre as contribuições do polo entre as regras de soma usual (linha sólida) e com dois polos (linha tracejada) para o  $J/\Psi$ .

Usando estes valores para a massa de Borel e o valor  $s'_0$  temos na fig.4.6 o comportamento da massa do estado fundamental em função da massa do primeiro estado excitado para os três valores da massa de Borel citados anteriormente. Neste caso nós conseguimos a massa  $m_1(3.7) = 3.0$  GeV para o méson  $J/\Psi$ , para a massa de Borel  $M_3$  (linha tracejada), onde este valor é 100 MeV abaixo do valor experimental.

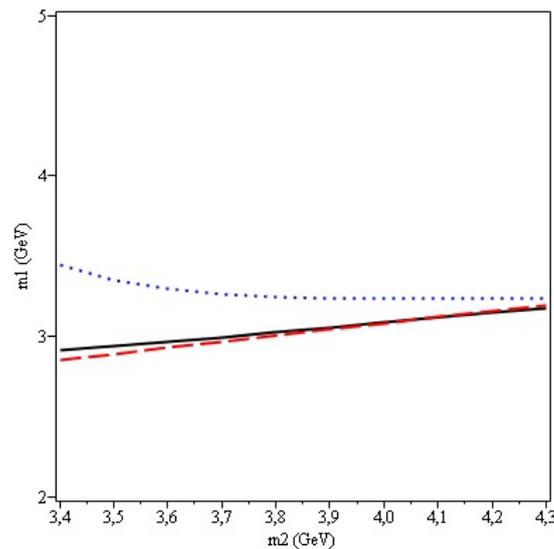


Figura 4.6: Massa do  $J/\Psi$  como função da massa do  $\Psi(2S)$ .

De contrapartida, para o cálculo da constante de decaimento, usando os valores experimentais  $m_1 = 3.1$  GeV,  $m_2 = 3.7$  GeV e  $\Delta' = 0.27$  GeV, nas eq.(3.5.39) e eq.(3.5.40), vemos que o valor para a constante de decaimento do méson  $J/\Psi$  (linha sólida), possui uma boa estabilidade para valores de massa de Borel acima de 3.15 GeV e que o nosso valor teórico está muito próximo do valor experimental, que é de  $(416 \pm 5)$  MeV [8]. E para a constante de decaimento do  $\Psi(2S)$  (linha tracejada) temos uma boa estabilidade para a mesma janela de Borel cujo valor teórico se aproxima do valor experimental que é  $(295 \pm 3)$  MeV [8], como mostra a fig.4.7.

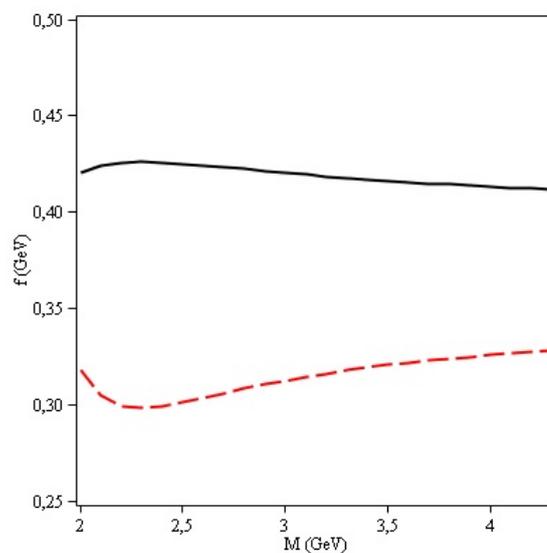


Figura 4.7: O comportamento das constantes de decaimento  $f_{J/\Psi}$  (linha sólida) e  $f_{\Psi(2S)}$  (linha tracejada) como função da Massa de Borel.

Na fig.4.8 nós mostramos a contribuição relativa entre os polos  $J/\Psi$  (linha tracejada) e  $\Psi(2S)$  (linha sólida), que compõem o duplo polo, onde essa informação pode ser obtida a partir da eq.(4.0.1), que representa a contribuição do  $J/\Psi$ , e da eq.(4.0.2), que representa a contribuição do  $\Psi(2S)$ . Podemos ver que para baixos valores da massa de Borel a contribuição do méson  $J/\Psi$  é por volta de 82% para a massa de Borel  $M_1 = 2$  GeV, ou seja, para pequenos valores da massa de Borel existe um acoplamento maior do polo do estado fundamental a teoria em relação ao estado excitado.

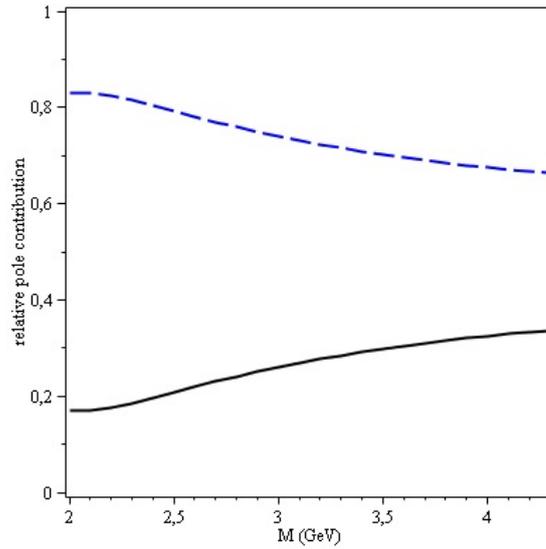


Figura 4.8: Contribuição relativa entre o  $polo_{J/\Psi}$  (linha tracejada) e o  $polo_{\Psi(2S)}$  (linha sólida) do Ansatz “polo + polo + contínuo”.

### 4.3 Regra de Soma para o $\Upsilon$ e $\Upsilon(2S)$

No estudo do méson  $\Upsilon$ , utilizando o valor do  $Gap$   $\Delta' = 0.33$  GeV, neste caso não consideramos incertezas quanto ao parâmetro livre  $\Delta'$  devido a largura de decaimento do segundo estado excitado  $\Upsilon(3S)$  ser muito pequena (por volta de 20 KeV), o que não gera nenhuma instabilidade quanto a variância nos resultados obtidos. Como já sabemos, é necessário determinar a janela de Borel no intervalo  $M_1$  à  $M_3$  que é obtida através da análise da contribuição do polo (linha tracejada) como função da massa de Borel para  $s'_0 = (10.02 + 0.33)^2$ , utilizando novamente a eq.(3.4.27), como mostra a fig.4.9.

Contudo ao analisarmos essa figura percebemos que ocorre uma descontinuidade, tanto para a regra de soma com duplo polo como para a regra de soma usual (linha sólida), quando temos valores para a massa de Borel  $M_1$  abaixo de 3.6 GeV, ou seja, na nossa janela de Borel (90% à 40%) a contribuição do polo para mésons formados por quarks muito pesados nesta teoria, não conseguem chegar a 90% e além disso não é possível ter uma estabilidade nos resultados obtidos, deste modo se faz necessário encontrar um valor mínimo  $M'_1$  tal que evitemos essa descontinuidade. Para isso

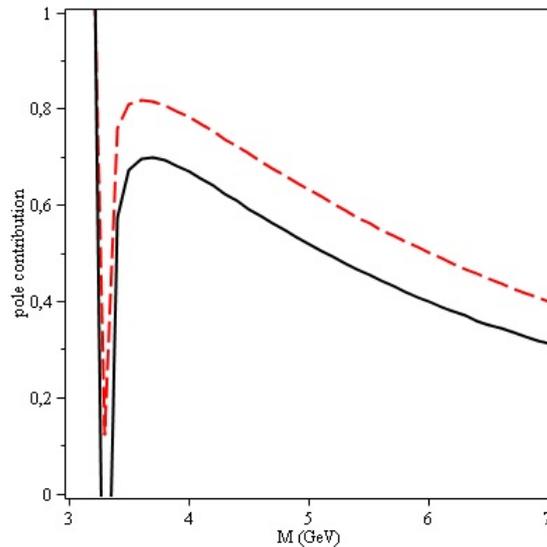


Figura 4.9: Comparativo entre as contribuições do polo entre as regras de soma usual (linha sólida) e com dois polos (linha tracejada) para o  $\Upsilon$ .

tomamos agora uma nova janela de Borel que vai de  $M'_1 = 4$  GeV onde a contribuição do polo alcança um valor máximo de 80%, passando por  $M_2 = 5.2$  GeV em 60% até chegar no valor máximo para a massa de Borel que é  $M_3 = 7$  GeV para  $s'_0 = (10.02 + 0.33)^2$  (linha tracejada), onde a contribuição do polo chega a 40%. Deste modo a contribuição do polo escolhido para o valor mínimo  $M'_1 = 4$  GeV é mostrada na fig.4.10.

Usando estes valores para a massa de Borel ( $M'_1$  à  $M_3$ ) e o valor  $s'_0$  temos na fig.4.11 o comportamento da massa do estado fundamental em função da massa do primeiro estado excitado para os três valores da massa de Borel citados anteriormente. Neste caso nós conseguimos a massa  $m_1(10.02) = 9.32$  GeV para o méson  $\Upsilon$ , para a massa de Borel  $M_3$  (linha tracejada), onde este valor é 340 MeV abaixo do valor experimental [8]. Ainda analisando esta figura percebemos que a medida que a massa de Borel aumenta as curvas de nível para massa convergem para valor obtido com a maior Massa de Borel,  $M_3 = 7$  GeV.

De contrapartida, para o cálculo da constante de decaimento, usando os valores experimentais  $m_1 = 9.46$  GeV,  $m_2 = 10.02$  GeV e  $\Delta' = 0.33$  GeV, também nas

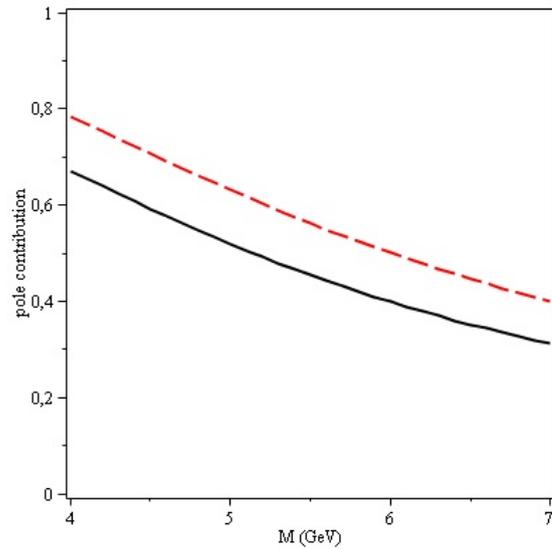


Figura 4.10: Comparativo entre as contribuições do polo entre as regras de soma usual (linha sólida) e com dois polos (linha tracejada) para o  $\Upsilon$  na nova janela de Borel.

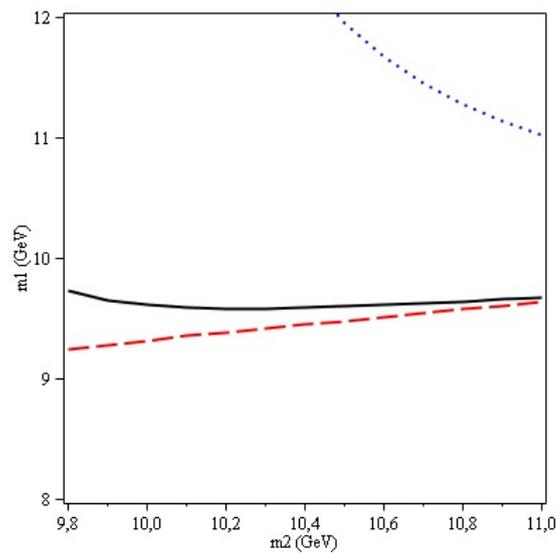


Figura 4.11: Massa do  $\Upsilon$  como função da massa do  $\Upsilon(2S)$ .

eq.(3.5.39) e eq.(3.5.40), vemos que o valor para a constante de decaimento do méson  $\Upsilon$  (linha sólida), possui uma boa estabilidade para uma massa de Borel acima de 5.3 GeV e que o nosso valor teórico obtido está muito próximo do valor experimental, que é de 714 MeV[8]. Para a constante de decaimento do méson  $\Upsilon(2S)$  (linha tracejada) temos a mesma estabilidade para a mesma janela de Borel cujo valor teórico se aproxima do

valor experimental que é de  $(497 \pm 3)$  [8], como mostra a fig.4.12.

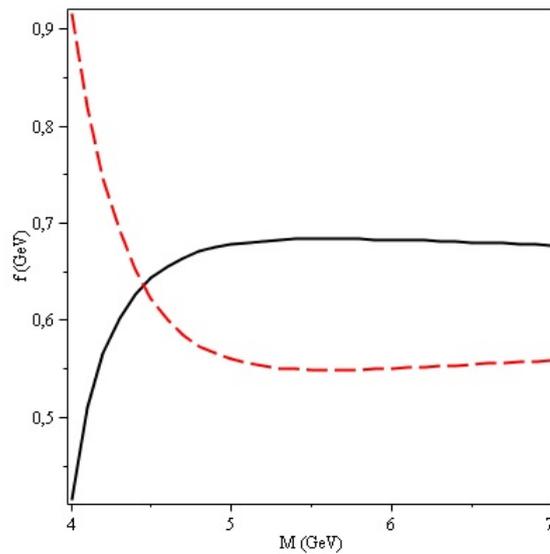


Figura 4.12: O comportamento das constantes de decaimento  $f_\Upsilon$  (linha sólida) e  $f_{\Upsilon(2S)}$  (linha tracejada) como função da Massa de Borel.

Na fig.4.13 nós mostramos a contribuição relativa entre os polos  $\Upsilon$  (linha tracejada) e  $\Upsilon(2S)$  (linha sólida), que compõem o duplo polo, onde essa informação pode ser obtida utilizando as mesmas equações citadas na obtenção dos resultados anteriores dos mésons  $\rho$  e  $J/\Psi$ . Podemos ver que para baixos valores da massa de Borel a contribuição do méson  $\Upsilon(2S)$  é por volta de 60% para a massa de Borel  $M_1 = 4$  GeV, o que nos mostra um comportamento diferente em relação aos outros dois casos onde o acoplamento maior na contribuição do polo era sempre dado pelo estado fundamental para baixos valores da massa de Borel.

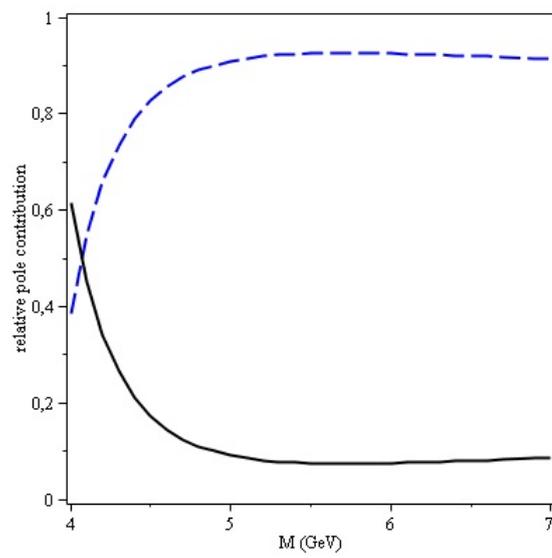


Figura 4.13: Contribuição relativa entre o  $polo_{\Gamma}$  (linha tracejada) e o  $polo_{\Gamma(2S)}$  (linha sólida) do Ansatz “polo + polo + contínuo”.

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesse trabalho desenvolvemos um novo método para atacar problemas envolvendo estados excitados em Regras de Soma da QCD, basicamente estendemos a representação espectral usual desenvolvida por Shifman, tipo “polo + contínuo”, para um novo Ansatz, onde dizemos que a densidade espectral do lado fenomenológico pode ser representada da forma “polo + polo + contínuo” e como teste de eficácia deste método aplicamos este Ansatz nas Regras de Soma da QCD para três casos bem estabelecidos, que são os casos do méson  $\rho$ ,  $J/\Psi$  e  $\Upsilon$  onde estudamos o caso de excitações radiais.

Nós mostramos que a obtenção teórica da massa e da constante de decaimento, segundo nosso método “polo + polo + contínuo”, mostra uma boa concordância com os dados experimentais, com uma boa estabilidade em todos os resultados obtidos para as janelas de Borel definidas para os três mésons vetoriais estudados  $\rho$ ,  $J/\Psi$  e  $\Upsilon$ . Junto a aplicação deste método, levando em consideração que não há dados experimentais em relação a constante de decaimento do méson  $\rho(2S)$ , conseguimos executar uma predição teórica para a sua constante de decaimento, segundo nossa predição levando em consideração todas as incertezas associadas ao parâmetro  $\Delta'$  e a uma possível ressonância  $\rho(3S)$ , estimamos um valor para a constante de decaimento do méson  $\rho(2S)$  por volta de  $(177 \pm 13)$  GeV.

Observamos também que usualmente, em Regras de Soma com quarks pesados, o

termo do condensado de quarks sempre vai a zero, contudo nesta nova teoria proposta observamos a importância da inclusão deste termo para a convergência dos resultados como também para a determinação da janela de Borel. Mostramos também que com a inclusão deste termo, ao trabalharmos com quarks muito pesados, ocorre uma certa instabilidade para valores na massa de Borel muito baixos o que mostra uma relação direta entre a convergência do polo e a inclusão deste termo. Esperamos confirmar mais ainda estas observações em trabalho futuros.

Tendo em vista a descoberta dos mésons exóticos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e que vários trabalhos, na literatura atual, mostram que alguns de seus canais de decaimento, estas partículas exóticas decaem em estados excitados de outras partículas, temos como uma de nossas motivações futuras aplicar este trabalho neste tipo de situação e poder estudar tais produtos destes decaimentos exóticos.

Neste trabalho vale lembrar que, aplicamos este novo método para estudar excitações radiais apenas para casos em que tratamos de mésons vetoriais, contudo esperamos aplicar este método também para os casos em que tratamos com mésons escalares e axiais-vetoriais. O que nos remete a uma nova partícula que foi descoberta chamada de  $\eta_b(2S)$  [32] que trata-se de um méson escalar com massa de  $(9974.6 \pm 3.1)$  MeV e números quânticos  $J^{PC} = 0^{-+}$ , que nada mais é do que uma excitação radial da  $\eta_b(1S)$ . Portanto tal partícula sendo um méson escalar seria uma boa candidata para a aplicação deste método, tendo em vista que, na literatura atual, não se tem nenhum dado sobre essa nova partícula utilizando Regras de Soma da QCD.

# Apêndice A

## Cálculo dos diagramas para o méson $J/\Psi$

### A.1 Termo perturbativo

Dada a função de correlação definida no espaço das coordenadas na seção 2.2 pela eq.(2.2.11), onde o propagador perturbativo para quarks pesados [33] é dado por

$$S^{ab}(\pm x, m_c) = i\delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{\pm i p x} \frac{\not{p} + m_c}{p^2 - m_c^2 + i\epsilon}. \quad (\text{A.1})$$

Para não carregarmos notação, aqui, omitimos o índice  $c$  que indica que a massa é do quark *charm*. Substituindo a eq.(A.1) na eq.(2.2.2) temos após calcular o traço

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = f_{cor} [\Pi_{\mu\nu}^1(x) + \Pi_{\mu\nu}^2(x) + \Pi_{\mu\nu}^3(x) + \Pi_{\mu\nu}^4(x)], \quad (\text{A.2})$$

onde  $f_{cor} = \delta^{ab}\delta^{ef}\delta^{fb}\delta^{ae} = 3$ . Tomando as seguintes definições

$$\Pi_{\mu\nu}^1(x) = 4m^2 g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (\text{A.3})$$

$$\Pi_{\mu\nu}^2(x) = -4g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} p_\sigma}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx} k^\sigma}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (\text{A.4})$$

$$\Pi_{\mu\nu}^3(x) = 4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} p_\mu}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx} k_\nu}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (\text{A.5})$$

$$\Pi_{\mu\nu}^4(x) = 4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} p_\nu}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx} k_\mu}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{A.6})$$

Nosso trabalho agora resume-se a resolver as integrais contidas em eq.(A.3), eq.(A.4), eq.(A.5) e eq.(A.6). Tomando a seguinte substituição

$$\Pi_{\mu\nu}^1(x) = 4m^2 g_{\mu\nu} I \quad (\text{A.7})$$

onde temos

$$I = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{A.8})$$

Utilizando a relação abaixo, provado na referência [36]

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{\pm ipx}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^n} = -\frac{\pi^2}{(2\pi^4)(i)^{n-1}(n-1)!} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-3} e^{-i\alpha m^2} e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}} \quad (\text{A.9})$$

temos as seguintes integrais

$$I = -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\alpha_1 \alpha_1^{-2} e^{-i\alpha_1 m^2} e^{-\frac{x^2}{4\alpha_1}} \left[ -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\alpha_2 \alpha_2^{-2} e^{-i\alpha_2 m^2} e^{-\frac{x^2}{4\alpha_2}} \right] \quad (\text{A.10})$$

que nos remete a seguinte equação

$$I = \frac{1}{256\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2)^{-2} e^{-im^2(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad (\text{A.11})$$

onde temos que  $\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ .

Aplicando a transformada de Fourier para os espaço dos momentos temos, onde definimos  $\bar{I} = \int d^4 x e^{iqx} I$  com  $I \equiv I(x)$  e  $\bar{I} \equiv \bar{I}(q)$

$$\bar{I} = \frac{i}{256\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2)^{-2} e^{-im^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \int d^4 x e^{iqx} e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}}. \quad (\text{A.12})$$

Usando a seguinte relação [36]

$$\int d^4 x e^{iqx} e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}} = 16i\pi^2 \alpha^2 e^{iq^2 \alpha} \quad (\text{A.13})$$

temos

$$\bar{I} = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{e^{ig(\alpha)}}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}, \quad (\text{A.14})$$

onde definimos  $g(\alpha) = q^2 \alpha - m^2(\alpha_1 + \alpha_2)$ . Usando a relação de completeza dada por

$$1 = \int_0^\infty d\rho \delta[\rho - (\alpha_1 + \alpha_2)] \quad (\text{A.15})$$

e tomando a expansão  $\alpha \rightarrow \rho\alpha$ , para isso impomos a condição de que essas integrais sejam invariantes por essa expansão, usando o seguinte formulário [36][37]

$$\delta[\rho - (\alpha_1 + \alpha_2)] = \frac{1}{\rho} \delta[1 - (\alpha_1 + \alpha_2)], \quad (\text{A.16})$$

$$\int_0^\infty d\rho \frac{e^{i\rho g(\alpha)}}{\rho^{n-1}} = -\frac{[g(\alpha)]^{n-2}}{(-i)^{n-2}(n-2)!} \ln[-g(\alpha)], \quad (\text{A.17})$$

temos então que

$$\bar{I} = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{\delta[1 - (\alpha_1 + \alpha_2)]}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} [-\ln(-g(\alpha))]. \quad (\text{A.18})$$

Por outro lado, em QCDSR, é importante encontrarmos a parte imaginária em eq.(A.18), isso é possível na região em que  $q^2 > 0$ , o que contrário ao que é usualmente visto em QCD perturbativa onde o regime proposto é em  $q^2 < 0$ . Sabemos que  $\ln[-g(\alpha)] = \ln(-1) + \ln[g(\alpha)]$  logo, tomar a parte imaginária de  $\bar{I}$  equivale a tomar o imaginário de  $\ln[-g(\alpha)]$  no qual seu valor é  $-i\pi$  [38], sendo assim temos apenas que resolver a integral na eq.(A.18) com uma função delta de Dirac dentro dela, temos então

$$Im[\bar{I}] = -\frac{1}{16\pi} \int_{\alpha_1^i}^{\alpha_1^i} d\alpha_1 = -\frac{1}{16\pi} [\alpha_1]_{\alpha_1^i}^{\alpha_1^i}. \quad (\text{A.19})$$

O sentido físico carregado na definição do  $g(\alpha)$  é encontrado ao restringirmos ele em  $g(\alpha) \geq 0$ . Note que ao escolhermos o ponto  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$  na função delta em eq.(A.19) naturalmente tomamos  $g(\alpha) \rightarrow g(\alpha_1) \geq 0$  assim temos

$$g(\alpha_1) = -q^2\alpha_1^2 + q^2\alpha_1 - m^2 = 0. \quad (\text{A.20})$$

Cujos zeros da função estão dentro do intervalo  $g(\alpha_1) \geq 0$  como mostra a fig.A.1 a baixo, onde consideramos  $m_c = 1.3 \text{ GeV}$  e  $q^2 = 8 \text{ GeV}^2$ .

Analiticamente temos  $\alpha_1 = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}}$ , onde fica claro que  $q^2 > 4m^2$ , e finalmente temos na componente  $g_{\mu\nu}$  a parte imaginária do correlator invariante  $\Pi_1(q^2)$  definido como

$$Im[\Pi_1(q^2)] = -\frac{m^2}{4\pi} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}}. \quad (\text{A.21})$$

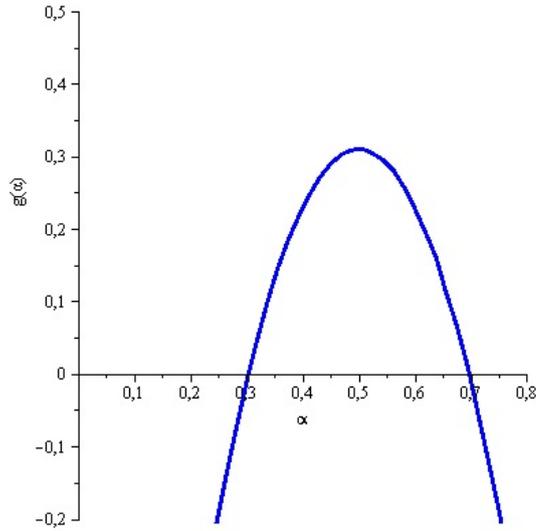


Figura A.1: Definição dos limites de integração na região  $g(\alpha) \geq 0$ .

Chamando  $\Pi_{\mu\nu}^2(x) = -4g_{\mu\nu}I_2$  onde

$$I_2 = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} p_\sigma}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx} k^\sigma}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{A.22})$$

usando a seguinte relação [36]

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{\pm ipx} p_\mu}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^n} = \pm x_\mu \frac{\pi^2}{(2\pi^4) 2(i)^{n-1} (n-1)!} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-4} e^{-i\alpha m^2} e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad (\text{A.23})$$

temos

$$I_2 = -\frac{x^2}{1024\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2)^{-3} e^{im^2(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad (\text{A.24})$$

aplicando a transformada de Fourier e usando a solução abaixo [36]

$$\int d^4x e^{iqx} x^2 e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}} = (4 + 2iq^2\alpha) 2^5 \pi^2 \alpha^3 e^{iq^2\alpha}, \quad (\text{A.25})$$

temos que

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{e^{ig(\alpha)}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^3} \\ &\quad + \frac{q^2}{16\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 e^{ig(\alpha)} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^4}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Escrevendo a eq.(A.26) em termos da relação de completeza, dada pela eq.(A.15), tomando novamente a invariância por dilatação, usando as seguintes identidades matemáticas eq.(A.16), em seguida eq.(A.17), tomando o ponto em que  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$  e

levando em conta que  $\Pi_2(q^2) = -4\bar{I}_2$  na estrutura  $g_{\mu\nu}$  temos. Sabendo que, em QCDSR faz uso do cálculo da parte imaginária do correlator, da qual citamos anteriormente sua função, daí temos que

$$Im[\Pi_2(q^2)] = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{6}q^2\alpha_1^3 - \frac{1}{4}q^2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}m^2\alpha_1 \right)_{\alpha_1}^{\alpha_1'} + \left( -\frac{1}{8}q^2\alpha_1^3 + \frac{1}{12}q^2\alpha_1^2 \right)_{\alpha_1}^{\alpha_1'} \right]. \quad (\text{A.27})$$

Para o cálculo dos correlatores  $\Pi_{\mu\nu}^3(x)$  e  $\Pi_{\mu\nu}^4(x)$ , vale lembrar que estes são simétricos por troca de índices  $\mu \rightarrow \nu$  e  $\nu \rightarrow \mu$ , logo podemos expressar a soma  $\Pi_3(q^2) + \Pi_4(q^2)$  da seguinte forma

$$\Pi_3(q^2) + \Pi_4(q^2) = \Pi_{34}(q^2) = 2\Pi_3(q^2), \quad (\text{A.28})$$

deste modo, considerando  $\Pi_{\mu\nu}^3 = 12I_3$ , onde

$$I_3 = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} p_\mu}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx} k_\nu}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{A.29})$$

Usando a eq.(A.23) obtemos

$$I_3 = -\frac{x_\mu x_\nu}{1024\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2)^{-3} e^{-im^2(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad (\text{A.30})$$

aplicando a transformada de Fourier e utilizando a relação

$$\int d^4x e^{iqx} x_\mu x_\nu e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}} = (g_{\mu\nu} + 2iq_\mu q_\nu \alpha) 2^5 \pi^2 \alpha^3 e^{iq^2 \alpha}, \quad (\text{A.31})$$

temos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 &= -\frac{ig_{\mu\nu}}{32\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{e^{ig(\alpha)}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^3} \\ &\quad + \frac{q_\mu q_\nu}{16\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 e^{ig(\alpha)} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^4}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Agora, como já sabemos que as Regras de Soma da QCD são efetuadas nas estruturas invariantes, na eq.(A.32) tomando a estrutura invariante no termo  $g_{\mu\nu}$  e se compararmos a integral que aparece na eq.(A.32) na estrutura  $g_{\mu\nu}$  com a integral que aparece na eq.(A.26) vemos que os integrandos são os mesmos assim seguindo os mesmos passos feitos na resolução da eq.(A.26) temos que a estrutura invariante é dada

por

$$Im[\Pi_3(q^2)] = -\frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{3}q^2\alpha_1^3 - \frac{1}{2}q^2\alpha_1^2 + m^2\alpha_1 \right]_{\alpha_1}^{\alpha_1'} \quad (\text{A.33})$$

e a soma invariante que definimos pela eq.(A.28) é da seguinte forma

$$Im[\Pi_{34}(q^2)] = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{12}q^2\alpha_1^3 + \frac{1}{8}q^2\alpha_1^2 - \frac{1}{4}m^2\alpha_1 \right)_{\alpha_1}^{\alpha_1'}. \quad (\text{A.34})$$

Assim na estrutura invariante, no espaço dos momentos, substituindo as raízes  $\alpha_1'$  e  $\alpha_1$  e desenvolvendo os polinômios temos

$$Im[\Pi(q^2)] = -\frac{q^2}{4\pi} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}} \left( 1 + 2\frac{m^2}{q^2} \right). \quad (\text{A.35})$$

Como o correlator do lado da OPE pode ser escrito em termos de uma relação de dispersão, podemos calculá-lo a partir da seguinte equação

$$\rho^{OPE}(s) = \frac{Im}{\pi} [\Pi(q^2)]_{q^2=s}. \quad (\text{A.36})$$

Sabemos que  $Im[\Pi(q^2)] = Im[\Pi_1(q^2)] + Im[\Pi_2(q^2)] + Im[\Pi_{34}(q^2)]$ , por eq.(A.21), eq.(A.27) e eq.(A.34) temos finalmente que

$$\rho^{OPE}(s) = -\frac{1}{4\pi^2} \sqrt{1 - 4\frac{m_c^2}{s}} (s + 2m_c^2) \quad (\text{A.37})$$

## A.2 Termo do condensado de quarks

Segundo eq.(2.2.11), sendo o propagador do condensado de quarks da seguinte forma

$$S^{ab}(-x, m_c) = -\delta^{ab} \frac{\langle \bar{c}c \rangle}{12}. \quad (\text{A.38})$$

Temos que o correlator no espaço das posições é da seguinte forma

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = -2im_c \langle \bar{c}c \rangle g_{\mu\nu} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m_c}{p^2 - m_c^2 + i\epsilon}, \quad (\text{A.39})$$

usando a eq.(A.9) temos

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{8\pi^2} im_c \langle \bar{c}c \rangle g_{\mu\nu} \int d\alpha \alpha^{-2} e^{-im_c^2\alpha} e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}} \quad (\text{A.40})$$

e aplicando a transformada de Fourier para o espaço dos momentos temos

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{8\pi^2} im_c \langle \bar{c}c \rangle g_{\mu\nu} i \int d\alpha \alpha^{-2} e^{-im^2\alpha} \int d^4x e^{iqx} e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}}. \quad (\text{A.41})$$

Usando eq.(A.13) e tomando  $q^2 \rightarrow q^2 + i\epsilon$  na eq.(A.41), temos o correlator do condensado de quarks da seguinte forma

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{4m_c \langle \bar{c}c \rangle g_{\mu\nu}}{q^2 - m_c^2}. \quad (\text{A.42})$$

# Apêndice B

## Cálculo dos diagramas para o méson $\rho$

### B.1 Termo perturbativo

Dada a função de correlação no espaço das posições como mostrado na eq.(2.2.11), sabendo que o propagador de Feynman [39, 36] para parte perturbativa é dada por

$$S^{ab}(x) = \delta^{ab} \frac{i\not{x}}{2\pi^2 x^4} \quad (\text{B.1})$$

substituindo eq.(B.1) na eq.(2.2.11) temos então que o correlator no espaço das coordenadas é da forma

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = -\delta^{ab}\delta^{cd}\delta^{db}\delta^{ac} \frac{1}{4\pi^4 x^8} (8x_\mu x_\nu - 4x^2 g_{\mu\nu}) \quad (\text{B.2})$$

onde  $\delta^{ab}\delta^{cd}\delta^{db}\delta^{ac}$  são os índices de cor que no caso temos  $\delta^{ab}\delta^{cd}\delta^{db}\delta^{ac} = 3$  finalmente o correlator no espaço das coordenadas é da forma

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = -\frac{6x_\mu x_\nu}{\pi^4 x^8} + \frac{3g_{\mu\nu}}{\pi^4 x^6} \quad (\text{B.3})$$

Sabendo que em QCDSR é usualmente efetuada no espaço dos momentos temos então, pela transformada de Fourier, a função de correlação no espaço dos momentos definido da seguinte forma

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{i6}{\pi^4} \int d^4x \frac{x_\mu x_\nu}{x^8} e^{iqx} + \frac{3g_{\mu\nu}i}{\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^6} \quad (\text{B.4})$$

Para encontrar a função de correlação no espaço dos momentos precisamos resolver as integrais que aparecem na eq.(B.4). A segunda integral em eq.(B.4) é resolvida usando a seguinte relação [36]

$$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2)^n} = \frac{i\pi^2(-1)^n 2^{4-2n}}{(n-1)!(n-2)!} (q^2)^{n-2} \ln\left(-\frac{q^2}{\lambda}\right) \quad (\text{B.5})$$

Cujo resultado para a segunda integral em eq.(B.4) é

$$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^6} = -\frac{i\pi^2 q^2}{8} \ln\left(-\frac{q^2}{\lambda}\right) \quad (\text{B.6})$$

Em seguida, tomando eq.(B.5) em  $n = 4$  temos

$$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^8} = \frac{i\pi^2 q^4}{192} \ln\left(-\frac{q^2}{\lambda}\right) = J \quad (\text{B.7})$$

considere que

$$\frac{\partial^2 J}{\partial q^\nu \partial q^\mu} = 2 \frac{\partial J}{\partial (q^2)} g_{\mu\nu} + 4q_\mu q_\nu \frac{\partial^2 J}{\partial (q^2)^2} \quad (\text{B.8})$$

onde

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial q^\nu \partial q^\mu} = \int d^4x e^{iqx} \frac{x_\mu x_\nu}{x^8} \quad (\text{B.9})$$

logo, substituindo a eq.(B.7) na eq.(B.8), por eq.(B.9), vemos que

$$\int d^4x \frac{x_\mu x_\nu}{x^8} e^{iqx} = \frac{i\pi^2}{24} \ln\left(-\frac{q^2}{\lambda}\right) \left(g_{\mu\nu} \frac{q^2}{2} + q_\mu q_\nu\right) \quad (\text{B.10})$$

Finalmente substituindo eq.(B.10) e eq.(B.6) em eq.(B.4), desconsiderando os termos polinomiais, temos o correlator do diagrama perturbativo para o méson  $\rho$  no espaço dos momentos

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{4\pi^2} \ln\left(-\frac{q^2}{\lambda}\right) (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu), \quad (\text{B.11})$$

cuja estrutura conserva a corrente.

## B.2 Termo do condensado de quarks

Sejam os propagadores da correção de massa do propagador perturbativo e do condensado de quarks [39] definidos por

$$S^{ab}(\pm x, m_q) = -\delta^{ab} \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \quad (\text{B.12})$$

$$S^{ef}(\pm x, m_q) = -\delta^{ef} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12}. \quad (\text{B.13})$$

Inserindo esses propagadores na eq.(2.2.11) temos, no espaço das coordenadas

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \delta^{ab} \delta^{ef} \delta^{fb} \delta^{ae} \frac{m_q \langle \bar{q}q \rangle}{48\pi^2 x^2} \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] \quad (\text{B.14})$$

onde  $\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu}$  e como já vimos anteriormente  $\delta^{ab} \delta^{ef} \delta^{fb} \delta^{ae} = 3$  temos

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4} \frac{m_q \langle \bar{q}q \rangle}{\pi^2 x^2} g_{\mu\nu} \quad (\text{B.15})$$

Como é usual em Regras de Soma da QCD, em eq.(B.15), aplicamos a transformada de Fourier para o espaço dos momentos logo

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \frac{1}{4} \frac{m_q \langle \bar{q}q \rangle}{\pi^2} g_{\mu\nu} \int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^2} \quad (\text{B.16})$$

utilizando a relação matemática [36]

$$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^2} = -i \frac{4\pi^2}{q^2} \quad (\text{B.17})$$

temos

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{m_q \langle \bar{q}q \rangle}{q^2} g_{\mu\nu} \quad (\text{B.18})$$

Note que, pela fig.3.2, vemos que o condensado de quarks contribui simetricamente com dois termos na expansão assim a contribuição total da linha do condensado de quarks nada mais é do que duas vezes a eq.(B.18) logo

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = 2 \frac{m_q \langle \bar{q}q \rangle}{q^2} g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.19})$$

onde vemos que o termo dado pela eq.(B.19) quebra a conservação de corrente.

### B.3 Termo do condensado de glúons

Pela função de correlação dada pela eq.(2.2.11), sendo a linha do condensado de glúons definida pelo seguinte propagador [39]

$$S^{ab}(x, m_q) = \tau_{ab}^A \frac{i}{2^5 \pi^2 x^2} g_s G_{\alpha\beta}^A(0) (\not{x} \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \not{x}) \quad (\text{B.20})$$

onde  $\tau_{ab}^A$  é a matriz de Gell-Man,  $g_s$  é a constante de acoplamento forte e  $G_{\alpha\beta}^A(0)$  é o tensor de glúons, logo substituindo a eq.(B.20) na eq.(2.2.11) temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(x) &= \delta^{ab} \delta^{ef} \tau_{fb}^A \tau_{ae}^b \frac{g_s^2 G_{\alpha\beta}^A(0) G_{\alpha'\beta'}^B(0)}{2^{10} \pi^4 x^4} \\ &\quad Tr[\gamma_\mu (\not{x} \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \not{x}) \gamma_\nu (\not{x} \sigma^{\alpha'\beta'} + \sigma^{\alpha'\beta'} \not{x})] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Sendo o tensor dos glúons antissimétrico temos que

$$G_{\alpha\beta}^A(0) G_{\alpha'\beta'}^B(0) = \lambda \delta^{AB} (g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} - g_{\alpha\beta'} g_{\alpha'\beta}) \quad (\text{B.22})$$

na métrica tomando  $\alpha \rightarrow \beta$  e  $\beta \rightarrow \alpha$  temos, segundo a eq.(B.22)

$$G_{\alpha\beta}^A(0) G_{\alpha'\beta'}^B(0) = -G_{\beta\alpha}^A(0) G_{\alpha'\beta'}^B(0) \quad (\text{B.23})$$

de modo análogo na métrica tomando  $\alpha' \rightarrow \beta'$  e  $\beta' \rightarrow \alpha'$  temos, segundo a eq.(B.22)

$$G_{\alpha\beta}^A(0) G_{\alpha'\beta'}^B(0) = -G_{\alpha\beta}^A(0) G_{\beta'\alpha'}^B(0) \quad (\text{B.24})$$

logo, multiplicando a eq.(B.22) por  $g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'}$  e tomando  $A = B$  temos

$$G_{\alpha\beta}^A(0) G^{A\alpha\beta}(0) = \lambda \delta^{AA} (g_\alpha^\alpha g_\beta^\beta - g_\alpha^\beta g_\beta^\alpha) \quad (\text{B.25})$$

onde  $\delta^{AA} = 8$ , temos

$$\lambda = \frac{G_{\alpha\beta}^A(0) G^{A\alpha\beta}(0)}{96} \quad (\text{B.26})$$

onde definimos o termo de condensado de glúons da seguinte forma

$$G_{\alpha\beta}^A(0) G^{A\alpha\beta}(0) = \langle G^2(0) \rangle \quad (\text{B.27})$$

daí temos que a seguinte relação

$$G_{\alpha\beta}^A(0)G_{\alpha'\beta'}^B(0) = \frac{\langle G^2(0) \rangle}{96} \delta^{AB} (g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} - g_{\alpha\beta'} g_{\alpha'\beta}) \quad (\text{B.28})$$

Por outro lado, definindo um tensor antissimétrico dado por

$$T^{\alpha\beta} = \not{x}\sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta}\not{x} \quad (\text{B.29})$$

de tal forma que  $T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha}$ , recorre que

$$(g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} - g_{\alpha\beta'} g_{\alpha'\beta}) T^{\alpha'\beta'} = 2T_{\alpha\beta} \quad (\text{B.30})$$

Assim, substituindo a eq.(B.28) na eq.(B.21) e utilizando as relações dadas pelas eq.(B.29) e eq.(B.30) obtemos a seguinte equação

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = 4 \frac{\langle g_s^2 G^2(0) \rangle}{3 \cdot 2^{14} \pi^4 x^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{x}\sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta}\not{x}) \gamma_\nu (\not{x}\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}\not{x})] \quad (\text{B.31})$$

onde temos que  $\delta^{ab}\delta^{ef}\tau_{fb}^A\tau_{ae}^B\delta^{AB} = \tau_{ea}^A\tau_{ae}^A = \frac{1}{2}\delta^{AA}=4$ , vide apêndice D. Calculando o traço na equação acima temos que a função de correlação no espaço das coordenadas tem a seguinte forma

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \frac{\langle g_s^2 G^2(0) \rangle}{3 \cdot 2^7 \pi^4} \left( \frac{2x_\mu x_\nu}{x^4} + \frac{g_{\mu\nu}}{x^2} \right) \quad (\text{B.32})$$

Aplicando a transformada de Fourier para o espaço dos momentos temos

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{\langle g_s^2 G^2(0) \rangle}{3 \cdot 2^7 \pi^4} i \left( 2 \int d^4x e^{iqx} \frac{x_\mu x_\nu}{x^4} + g_{\mu\nu} \int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^2} \right) \quad (\text{B.33})$$

na eq.(B.33) utilizando as eq.(B.5), eq.(B.8), eq.(B.9) e eq.(B.17) onde temos a seguinte igualdade

$$J = \int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^4} \quad (\text{B.34})$$

temos o correlator do condensado da forma

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2(0) \rangle}{12} \left( \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right) \quad (\text{B.35})$$

onde temos que  $g_s = \frac{\alpha_s}{4\pi}$ . Note que a equação acima, eq.(B.35), também conserva corrente.

# Apêndice C

## Propagador de quarks leves no espaço das coordenadas

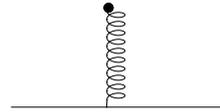
$$\delta_{ab} \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x}$$



$$-\delta_{ab} \frac{m_q}{4\pi^2 x^2}$$



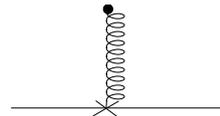
$$-\tau_{ab}^A \frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x})$$



$$-\delta_{ab} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12}$$



$$-\tau_{ab}^A \frac{m_q}{32\pi^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2)$$



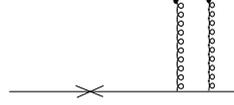
$$\delta_{ab} \frac{im_q \langle \bar{q}q \rangle}{48} \not{x}$$



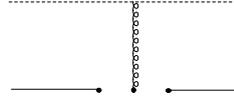
$$-\delta_{ab} \frac{x^2}{2^6 3} \langle \bar{q}g_s \sigma \cdot \mathbf{G}q \rangle$$



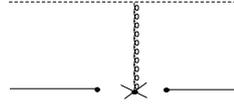
$$-\delta_{ab} \frac{m_q \langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^9 3 \pi^2} x^2 \ln(-x^2)$$



$$-\tau_{ab}^A \frac{1}{2^6 3} \langle \bar{q}g_s \sigma \cdot \mathbf{G}q \rangle \sigma_{\mu\nu}$$



$$-\tau_{ab}^A \frac{i}{2^8 3} m_q \langle \bar{q}g_s \sigma \cdot \mathbf{G}q \rangle (\not{x} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x})$$



$$\delta_{ab} \frac{ix^2 m_q}{2^7 3^2} \langle \bar{q}g_s \sigma \cdot \mathbf{G}q \rangle \not{x}$$



# Apêndice D

## Fórmulas úteis

### D.1 Álgebra das matrizes de Gell-Mann

Destacamos as seguintes propriedades para as matrizes de Gell-Mann,

$$\tau_{aa}^A = 0, \quad (\text{D.1})$$

$$\tau_{ab}^A \tau_{ba}^B = \frac{1}{2} \delta_{AB}, \quad (\text{D.2})$$

$$\tau_{ab}^A \tau_{cd}^A = \frac{1}{2} \left[ \delta_{ad} \delta_{bc} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} \right]. \quad (\text{D.3})$$

### D.2 Álgebra das matrizes de Dirac

Temos as seguintes definições:

$$T^{\mu\nu}(x) = \not{x} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x}, \quad (\text{D.4})$$

obtemos

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4, \quad (\text{D.5})$$

$$\sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 12, \quad (\text{D.6})$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0^T = \gamma_0, \quad (\text{D.7})$$

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma_\alpha \sigma^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{D.8})$$

$$\gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\mu = 0, \quad (\text{D.9})$$

$$\not{x}\not{y} = -\not{y}\not{x} + 2xy, \quad (\text{D.10})$$

$$\not{x}T^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x)\not{x}, \quad (\text{D.11})$$

$$\gamma^\alpha \not{x}\sigma^{\mu\nu}\not{x}\gamma_\alpha\sigma_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{D.12})$$

$$\gamma^\alpha\sigma^{\mu\nu}\not{x}\gamma_\alpha\sigma_{\mu\nu} = 24\not{x}, \quad (\text{D.13})$$

$$\gamma^\alpha \not{x}\sigma^{\mu\nu}\not{x}\gamma_\alpha\not{x}\sigma_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{D.14})$$

$$\gamma^\alpha \not{x}\sigma^{\mu\nu}\not{x}\gamma_\alpha\not{x}\sigma_{\mu\nu}\not{y} = 0, \quad (\text{D.15})$$

$$T^{\mu\nu}(x)\not{y}\sigma_{\mu\nu} = -4\not{x}\not{y} + 16xy, \quad (\text{D.16})$$

$$T^{\mu\nu}(x)\sigma_{\mu\nu}\not{y} = 12\not{x}\not{y}. \quad (\text{D.17})$$

# Apêndice E

## Introdução ao Teorema de Wick

De maneira geral, o teorema de Wick permite transformar qualquer expressão do tipo

$$\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\dots\Phi(x_n)|0\rangle \quad (\text{E.1})$$

em uma soma de propagadores de Feynman, onde seus propagadores são definidos da seguinte forma

$$\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle = S_F(x_1 - x_2) \quad (\text{E.2})$$

### E.1 Caso de 4 campos

No caso de 4 campos, no setor bosônico, temos

$$\begin{aligned} \langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)|0\rangle &= \langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle \langle 0|T\Phi(x_3)\Phi(x_4)|0\rangle \\ &+ \langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_3)|0\rangle \langle 0|T\Phi(x_2)\Phi(x_4)|0\rangle \\ &+ \langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_4)|0\rangle \langle 0|T\Phi(x_2)\Phi(x_3)|0\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

logo temos

$$\begin{aligned} \langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)|0\rangle &= D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Neste ponto fica claro que, para este setor (bosônico), as contrações entre dois campos  $\Phi$  reais é permitido, e dois campos  $\Phi^*$  complexos também é permitido.

Por outro lado, sabemos que os quarks são férmions, logo obedecem a estatística de Fermi-Dirac, que por sua vez garante que contrações no produto de Wick do tipo  $T\Phi(x_1)\Phi(x_2)$  ou  $T\bar{\Phi}(x_1)\bar{\Phi}(x_2)$  sejam iguais a ZERO. Deste modo, produtos de Wick diferentes de ZERO são aqueles quais as contrações sejam do tipo  $T\bar{\Phi}(x_1)\Phi(x_2)$ , buscando a eq.(2.2.5) temos que

$$\langle 0|T\{\bar{c}_a(x)c_b(x)\bar{c}_f(0)c_e(0)\}|0\rangle = \langle 0|T\{c_b(x)\bar{c}_f(0)\}|0\rangle \langle 0|T\{[\bar{c}_a(x)c_e(0)]\}|0\rangle, \quad (\text{E.5})$$

que pela definição dada pela eq.(E.2) temos

$$\langle 0|T\{\bar{c}_a(x)c_b(x)\bar{c}_f(0)c_e(0)\}|0\rangle = S^{db}(m, m_q)S^{ac}(-x, m_q). \quad (\text{E.6})$$

# Apêndice F

## Relação de dispersão

Considere a função invariante, escrita em termos de uma dispersão da seguinte forma

$$\Pi(q^2) = \int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{s - q^2 + i\epsilon}. \quad (\text{F.1})$$

Usando a relação para  $\epsilon > 0$  dada por

$$\frac{1}{s - q^2 + i\epsilon} = i\pi\delta(s - q^2) + \Delta(s - q^2) \quad (\text{F.2})$$

onde

$$\Delta(s - q^2) = \frac{s - q^2}{(s - q^2)^2 - \epsilon^2} \quad (\text{F.3})$$

Da eq.(F.1) temos

$$\Pi(q^2) = i\pi\rho(q^2) + \int_0^\infty ds \rho(s) \frac{s - q^2}{(s - q^2)^2 - \epsilon^2}. \quad (\text{F.4})$$

Tomando a parte imaginária da eq.(F.4) em  $q^2 \rightarrow s$  temos

$$\text{Im}[\Pi(s)] = \pi\rho(s), \quad (\text{F.5})$$

o que nos leva

$$\rho(s) = \frac{\text{Im}[\Pi(s)]}{\pi}. \quad (\text{F.6})$$

Assim, substituindo a eq.(F.6) na eq.(F.1), temos a conhecida relação de dispersão, que é da seguinte forma

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{Im[\Pi(s)]}{s - q^2 + i\epsilon}. \quad (\text{F.7})$$

Para esse tipo de função, onde conhecemos a sua parte imaginária, a transformada de Borel em  $Q^2 = -q^2$  é imediata, pois o operador diferencial dado pela eq.(2.4.31) só atua na parcela de  $Q^2$ , logo temos:

$$B[\Pi(q^2)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds Im[\Pi(s)] e^{-\frac{s}{M^2}}. \quad (\text{F.8})$$

# Bibliografia

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [2] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147**, 385 (1979).
- [3] F. S. Navarra, M. Nielsen and J. -M. Richard, J. Phys. Conf. Ser. **348** 012007 (2012) [arXiv:1108.1230 [hep-ph]].
- [4] A. Martinez Torres, K. P. Khemchandani, D. Gamermann and E. Oset, Phys. Rev. D **80** 094012 (2009) [arXiv:0906.5333 [nucl-th]].
- [5] F. -K. Guo, C. Hanhart and U. -G. Meissner, Phys. Lett. B **665** 26 (2008) [arXiv:0803.1392 [hep-ph]].
- [6] R. M. Albuquerque, M. Nielsen and R. R. da Silva, Phys. Rev. D **84** 116004 (2011) [arXiv:1110.2113 [hep-ph]].
- [7] S. Godfrey and N. Isgur, Phys. Rev. D **32**, 189 (1985).
- [8] J. Beringer *et. al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [9] L. J. Reinders, H. Rubinstein and S. Yazaki, Phys. Rept. **127**, 1 (1985).
- [10] P. Gubler and M. Oka, Prog. Theor. Phys. **124** 995 (2010) [arXiv:1005.2459 [hep-ph]].
- [11] D. Harnett, R. T. Kleiv, K. Moats and T. G. Steele, Nucl. Phys. A **850** 110 (2011) [arXiv:0804.2195 [hep-ph]].

- [12] K. Ohtani, P. Gubler and M. Oka, AIP Conf. Proc. **1343** 343 (2011) [arXiv:1104.5577 [hep-ph]].
- [13] P. Gubler, K. Morita and M. Oka, Phys. Rev. Lett. **107** 092003 (2011) [arXiv:1104.4436 [hep-ph]].
- [14] K. Suzuki, P. Gubler, K. Morita and M. Oka, arXiv:1204.1173 [hep-ph].
- [15] T. Burch *et al.* [Bern-Graz-Regensburg Collaboration], Phys. Rev. D **70** 054502 (2004) [hep-lat/0405006].
- [16] C. McNeile *et al.* [UKQCD Collaboration], Phys. Lett. B **642** 244 (2006) [hep-lat/0607032].
- [17] J. J. Dudek, R. G. Edwards and D. G. Richards, Phys. Rev. D **73** 074507 (2006) [hep-ph/0601137].
- [18] J. J. Dudek, R. G. Edwards, N. Mathur and D. G. Richards, Phys. Rev. D **77** 034501 (2008) [arXiv:0707.4162 [hep-lat]].
- [19] L. Liu, S. M. Ryan, M. Peardon, G. Moir and P. Vilaseca, PoS LATTICE **2011** 140 (2011) [arXiv:1112.1358 [hep-lat]].
- [20] N. Mathur, Y. Chen, S. J. Dong, T. Draper, I. Horvath, F. X. Lee, K. F. Liu and J. B. Zhang, Phys. Lett. B **605** 137 (2005) [hep-ph/0306199].
- [21] R. G. Edwards, J. J. Dudek, D. G. Richards and S. J. Wallace, Phys. Rev. D **84** 074508 (2011) [arXiv:1104.5152 [hep-ph]].
- [22] D. B. Leinweber, Phys. Rev. D **51** 6369 (1995) [nucl-th/9405002].
- [23] L. Liu *et al.* [Hadron Spectrum Collaboration], JHEP **1207** 126 (2012) [arXiv:1204.5425 [hep-ph]].

- [24] S. -x. Qin, L. Chang, Y. -x. Liu, C. D. Roberts and D. J. Wilson, Phys. Rev. C **85** 035202 (2012) [arXiv:1109.3459 [nucl-th]].
- [25] T. Peng and B. -Q. Ma, Eur. Phys. J. A **48** 66 (2012) [arXiv:1204.0863 [hep-ph]].
- [26] D. Arndt and C. -R. Ji, Phys. Rev. D **60** 094020 (1999) [hep-ph/9905360].
- [27] H. Weigel, AIP Conf. Proc. **549** 271 (2000) [hep-ph/0006191].
- [28] S. H. Lee, K. Morita and M. Nielsen, Phys. Rev. D **78** 076001 (2008) [arXiv:0808.3168 [hep-ph]].
- [29] L. S. Kisslinger, Phys. Rev. D **79** 114026 (2009) [arXiv:0903.1120 [hep-ph]].
- [30] P. Colangelo and A. Khodjamirian, In \*Shifman, M. (ed.): At the frontier of particle physics, vol. 3\* 1495-1576 [hep-ph/0010175].
- [31] R. D'E. Matheus, F. S. Navarra and M. Nielsen, Braz. J. Phys. **36**, 1397 (2006).
- [32] S. Dobbs, Z. Metreveli, K. K. Seth, A. Tomaradze and T. Xiao, Phys. Rev. Lett. **109**, 082001 (2012) [arXiv:1204.4205 [hep-ex]].
- [33] M. Kaku. QUANTUM FIELD THEORY: *A Mordern Introduction*. New York, Oxford, Oxford University Press (1993).
- [34] M. O. C. Gomes. Teoria Quântica de Campos. São Paulo, USP, EDUSP (2002).
- [35] M. S. Maior de Sousa and R. Rodrigues da Silva, arXiv:1205.6793 [hep-ph].
- [36] R. R, da Silva, Constantes de Acoplamento a partir das Regras de Soma da QCD, Tese de Doutorado - USP, Instituto de Física, São Paulo (2005).
- [37] K. D. Machado, Teoria do Eletromagnetismo. Ponta Grossa, UEPG (2000).
- [38] C. Itzykson and J-B. Zuber, Quantum Field Theory, United States of America, Dover Publications (1980).

- [39] W. Greiner, S. Schramm and E. Stein, Quantum Chromodynamics, Berlin, Vol. 3, Springer (2007).