



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

Modelos de Campos Escalares no estudo da Cosmologia  
Inflacionária

Maria Aparecida dos Santos

Campina Grande

Fevereiro 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Maria Aparecida dos Santos

**Modelos de Campos Escalares no estudo da Cosmologia  
Inflacionária**

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

**Campina Grande-PB**

**Fevereiro 2014**

# Modelos de Campos Escalares no estudo da Cosmologia Inflacionária

MARIA APARECIDA DOS SANTOS

Aprovada em \_\_\_\_\_

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito (UAF/UFCG)

Orientador

---

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto (UAF/UFCG)

Examinador Interno

---

Prof<sup>ª</sup> Dra. Morgana Lígia de Farias Freire (DF/UEPB)

Examinadora Externa

# Dedicatória

*A Deus...*

*A minha mãe,*

*Aos meus filhos*

*A Josefa [in memoriam]*

*Ao meu esposo*

*”O que sabemos é uma gota  
e o que ignoramos é um oceano”.*

**Isaac Newton**

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, por está sempre presente em minha vida.

Agradeço à minha família.

Ao Prof. Francisco de Assis de Brito, meu orientador, pela paciência, dedicação e competência me ajudando a traçar rumos para este estudo.

Aos Professores da UAF da UFCG, por terem me transmitido os conhecimentos necessários que resultaram na minha formação pessoal e principalmente profissional.

A CAPES/UFCG, pelo apoio financeiro.

Aos professores da banca examinadora Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto e a Prof<sup>a</sup>. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire, pelo apoio e prontidão.

À mãe biológica, pelo o amor e pela a compreensão a mim dedicados.

À minha outra mãe, pelo o seu entusiasmo e pelo o apoio que me deu em todos os momentos de minha carreira pessoal e profissional.

Ao meu companheiro Anderson, pelo seu amor, sua paciência e cuidados nos momentos difíceis.

Aos meus amados filhos Diogo e Maria Rayane aos quais tanto quero bem.

A Serafina e a Lulu, por me ajudarem nos momentos de elevação espiritual.

E finalmente a todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para a concretização deste trabalho.

## RESUMO

Considerando as diferentes abordagens possíveis referentes ao Universo, este trabalho está voltado para o estudo da Cosmologia Padrão e Inflacionária utilizando campos escalares para descrever a fase de expansão acelerada do Universo. Assim, através da Teoria da Gravitação proposta pela Relatividade Geral é possível determinar as equações de Friedmann e utilizando a Teoria de Campos em Cosmologia podemos obter uma equação de movimento que descreve a evolução temporal de um campo escalar chamado *ínflaton*, responsável pela inflação. Nesse sentido, propomos como alternativa a utilização de alguns modelos de potenciais já existentes, dentre os quais: o potencial quadrático, o tipo cosseno, o tipo seno e o potencial tipo quártico com coeficiente dependente do tempo. Buscando dessa forma descrever a evolução temporal do fator de escala e o comportamento do parâmetro de desaceleração com o objetivo de analisar a fase inflacionária, identificando regiões de aceleração e desaceleração do Universo no cenário do espaço plano.

**Palavras-chave:** Campos Escalares, Cosmologia Inflacionária, Relatividade Geral.

## ABSTRACT

Considering the different possible approaches concerning the Universe, this work is devoted to the study of Standard and Inflationary Cosmology using scalar fields to describe the phase of accelerated expansion of the Universe. Thus, through the theory of gravitation proposed by General Relativity is possible to determine the Friedmann's equations and using the Field Theory in Cosmology we can obtain an equation of motion that describes the time evolution of a scalar field called inflaton, responsible for inflation. In this sense, we propose as an alternative the use of some existing potential models, among which: the quadratic potential, the cosine type, the sine type and the quartic type potential with coefficient depending on the time. Thus seeking this way to describe the time evolution of the scale factor and the behavior of the deceleration parameter with the objective of analyzing the inflationary phase, identifying regions of acceleration and deceleration of the Universe on the set of flat space.

**Keywords:** Scalar Fields, Inflationary Cosmology, General Relativity.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Aspectos da Relatividade Geral</b>	<b>4</b>
2.1 Dinâmica da Partícula . . . . .	4
2.1.1 Relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ . . . . .	6
2.2 Tensor de Riemann . . . . .	7
2.3 Tensor energia-momento . . . . .	10
<b>3 Aspectos da Cosmologia</b>	<b>12</b>
3.1 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	13
3.2 Equação de Friedmann-Lemaître . . . . .	17
3.3 Densidade de energia no Universo . . . . .	19
3.4 Parâmetro de desaceleração . . . . .	25
3.5 Modelos cosmológicos . . . . .	26
3.5.1 Modelo cosmológico de Einstein-de-Sitter . . . . .	26
3.5.2 Modelo de de Sitter . . . . .	28
<b>4 Cosmologia Inflacionária</b>	<b>30</b>
4.1 Teoria do Big Bang . . . . .	30
4.2 Cosmologia Inflacionária . . . . .	31
4.3 Teoria de Campo Escalar em Cosmologia . . . . .	32
4.4 Modelos de potenciais . . . . .	35
4.4.1 Modelo de campo escalar: Potencial quadrático . . . . .	35
4.4.2 Modelo de campo escalar: Potencial tipo cosseno . . . . .	39
4.4.3 Modelo de campo escalar: Potencial tipo seno . . . . .	42
4.4.4 Modelo de campo escalar: Potencial tipo quártico com coeficiente dependente do tempo . . . . .	46
<b>5 Conclusão</b>	<b>54</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>56</b>
<b>A Princípio da Equivalência</b>	<b>60</b>
A.1 Tensor de Curvatura . . . . .	61

# Lista de Figuras

3.1	Evolução do fator de escala em função do tempo para o Universo dominado pela matéria. . . . .	26
3.2	Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela matéria. . . . .	27
3.3	Evolução do fator de escala em função do tempo para o universo dominado pela radiação. . . . .	28
3.4	Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela radiação. . . . .	28
3.5	Evolução do fator de escala em função do tempo para o modelo de de Sitter. . . . .	29
3.6	Parâmetro de desaceleração para o modelo de de Sitter. . . . .	29
4.1	Evolução do campo escalar $\phi(t)$ para o modelo de potencial quadrático. . . . .	36
4.2	Evolução do fator de escala $a(t)$ para o modelo potencial quadrático. . . . .	37
4.3	Comportamento do parâmetro de desaceleração $q(t)$ para o modelo potencial quadrático. . . . .	38
4.4	Comportamento do fator de escala $a(t)$ e do parâmetro de desaceleração $q(t)$ para o modelo potencial quadrático. . . . .	39
4.5	Evolução do campo escalar $\phi(t)$ para o modelo de potencial tipo cosseno. . . . .	40
4.6	Evolução do fator de escala $a(t)$ para o modelo de potencial tipo cosseno. . . . .	41
4.7	Comportamento do parâmetro de desaceleração $q(t)$ para o modelo potencial tipo cosseno. . . . .	42
4.8	Evolução do campo escalar $\phi(t)$ para o modelo de potencial tipo seno. . . . .	44
4.9	Evolução do fator de escala $a(t)$ para o modelo de potencial tipo seno. . . . .	45
4.10	Comportamento do parâmetro de desaceleração $q(t)$ para o modelo de potencial tipo seno. . . . .	45
4.11	Comparando o parâmetro de desaceleração $q(t)$ com o fator de escala $a(t)$ , para o modelo de potencial tipo seno. . . . .	46
4.12	Evolução do campo escalar $\phi(t)$ para o modelo de potencial tipo quártico. . . . .	47
4.13	Evolução do fator de escala $a(t)$ para o modelo de potencial tipo quártico. . . . .	48
4.14	Evolução do fator de escala $a(t)$ para o modelo de potencial tipo quártico considerando $t > \frac{25}{3}$ . . . . .	49
4.15	Comportamento do parâmetro de desaceleração $q(t)$ para o modelo de potencial tipo quártico considerando $t = 0 \cdot \frac{25}{3}$ . . . . .	50
4.16	Comportamento da equação de estado $\omega(t)$ em função do tempo para $t = 0 \cdot \frac{25}{3}$ . . . . .	51
4.17	Comportamento da equação de estado $\omega(t)$ em função do tempo para $t > \frac{25}{3}$ . . . . .	51

4.18	Comportamento da densidade $\rho(t)$ em função do tempo (t) para $t = 0 \cdot \frac{25}{3}$ .	52
4.19	Comportamento da pressão $p(t)$ em função do tempo (t) para $t = 0 \cdot \frac{25}{3}$ .	53
A.1	Transporte paralelo de um vetor ao longo de um paralelogramo infinitesimal. . . . .	62

# Capítulo 1

## Introdução

No início do século XX ocorreu um grande avanço nos estudos referentes ao Universo, colaborando para o surgimento da Cosmologia como um ramo da Física. Por volta de 1917, foram realizadas pela primeira vez medidas de velocidade e distância das galáxias mais próximas [1]. Posteriormente, através de estudos realizados por Edwin Hubble e outros pesquisadores, observou-se que as galáxias mais distantes estavam se afastando de nós e quanto mais distante mais depressa se afastavam. Através de medidas, Hubble constatou que a velocidade com que as galáxias se afastavam era proporcional as distâncias que nos separavam delas [2]. Portanto, concluiu que o Universo estava em expansão progressiva, introduzindo assim um novo conceito de modelo de universo, que até então era considerado estático. Neste período os pesquisadores acreditavam que o Universo era estático e devido a esse pensamento científico, Einstein acrescentou a sua Teoria da Relatividade Geral uma constante cosmológica para descrever um modelo de universo que estivesse de acordo com o pensamento da época.

No entanto, com esses resultados astronômicos desencadeou-se uma série de estudos buscando analisar a expansão do Universo. Uma das teorias mais importante que surgiu foi a teoria do Big Bang, proposta por George Gamow em 1947. Apesar de sua relevância na descrição da origem e evolução do Universo, alguns problemas inerentes a esse modelo foram encontrados [3, 4]. Dentre os quais podemos citar os

problemas do horizonte e da planura. Então, em 1981 Alan Guth, propôs a teoria do universo inflacionário para tentar solucionar esses problemas encontrados na teoria do Big Bang.

A fase inflacionária corresponde a um período em que o Universo primordial sofreu uma expansão acelerada em um intervalo de tempo muito curto [5, 6, 7, 8]. De acordo com esse modelo, a expansão ocorreu devido a um campo escalar  $\phi$  chamado *ínflaton*, submetido a um determinado potencial  $V(\phi)$ . Sendo assim, esta fase é descrita no cenário em que o período de evolução do campo escalar  $\phi$  é caracterizado pelo regime slow-roll (rolamento lento), é nesse momento que o potencial  $V(\phi)$  desse campo, domina o termo de energia cinética, tendo em vista que a energia cinética do *ínflaton* torna-se pequena e grande parte da energia fica contida em seu potencial [5]. Esta energia possui pressão negativa provocando dessa forma uma expansão exponencial do Universo.

A Teoria Inflacionária é relevante não apenas para explicar os problemas do Bing Bang, mas também na descrição da formação de estruturas de galáxias, que ocorreu devido a inomogeneidade do Universo. Esta inomogeneidade foi provocada por flutuações quânticas do *ínflaton* sobre seu estado de vácuo, ou seja, de puras flutuações do vácuo [9]. Estas flutuações do vácuo causaram perturbações de densidade que podem explicar a estrutura em larga escala do Universo.

Estudos astronômicos constataram, através das Supernovas tipo Ia [10], que atualmente o Universo se encontra em uma nova fase de expansão acelerada. No contexto da Relatividade Geral, essa expansão acelerada é justificada por uma nova forma de energia que não tem interação com a luz, chamada de energia escura (constante cosmológica ou quintessência) [9, 11]. No contexto da Teoria Quântica de Campos, os modelos cosmológicos que envolvem campos escalares, também possibilitam o estudo dessa nova fase de expansão acelerada do Universo, pois, como citamos anteriormente, no período inflacionário do Universo primordial o campo escalar  $\phi$  no regime slow-roll

relacionado com o seu potencial  $V(\phi)$ , gerou a expansão [5, 7, 8]. Nesse sentido, utilizando modelos de campos escalares, torna-se possível analisar esta fase de expansão acelerada do Universo.

Portanto, nesse trabalho nosso interesse foi modelar regiões de aceleração e desaceleração do Universo, utilizando modelos de potenciais que descrevessem esses comportamentos no cenário do espaço plano. No capítulo 2 apresenta-se alguns aspectos referentes a Teoria da Relatividade Geral no contexto da Cosmologia dentre eles: a dinâmica de uma partícula num campo gravitacional e o tensor energia-momento. Em seguida, no capítulo 3 aborda-se o estudo da Cosmologia, destacando os aspectos da Cosmologia Padrão, tais como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, as equações de Einstein como solução das equações de Friedmann, dentre outros. Já no capítulo 4 discute-se o estudo da Cosmologia Inflacionária, assim como também a Teoria de Campo Escalar em Cosmologia para descrever regiões de aceleração e desaceleração do Universo através da análise dos comportamentos do fator de escala  $a(t)$  e do parâmetro de desaceleração  $q(t)$  para os modelos de potenciais utilizados no estudo dessas regiões. E no capítulo 5 apresenta-se as considerações finais deste trabalho.

Ao longo deste trabalho, consideramos a métrica com assinatura  $(-+++)$  para o espaço em quatro dimensões e um sistema de unidades naturais:  $c = \hbar = 1$ .

## Capítulo 2

# Aspectos da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria relativística da gravitação a qual relaciona o campo gravitacional com a curvatura do espaço-tempo, devido ao conteúdo de matéria e energia presente. Esse efeito de uma fonte gravitacional curvar o espaço tempo é uma consequência direta do Princípio da Equivalência [12]. Tal teoria é considerada uma forma generalizada da Teoria da Relatividade Especial, pois o espaço-tempo de Minkowski é ampliado para os espaços-tempo curvos. Nesse sentido, satisfaz os postulados<sup>1</sup> da relatividade especial. A relatividade geral, é válida não apenas para referenciais inerciais, mas também para quaisquer referenciais, pois, conforme veremos, o campo gravitacional é, localmente, equivalente a um referencial não-inercial. Sendo assim, podemos interpretá-la como uma teoria mais geral da gravitação.

Neste capítulo iremos abordar alguns aspectos fundamentais da Teoria da Relatividade Geral que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

### 2.1 Dinâmica da Partícula

Considere uma partícula movendo-se em queda livre em um sistema de coordenadas  $\xi^\alpha$  que a acompanha. Sendo assim, esse sistema é localmente inercial e de

---

<sup>1</sup>As leis da Física são as mesmas em quaisquer referenciais inerciais (Covariância das leis da física em relação aos referenciais inerciais). A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor  $c$  em todos os referenciais inerciais (Invariância da velocidade da luz no vácuo).

acordo com o princípio da equivalência, num referencial em queda livre, localmente, não temos aceleração e portanto a equação de movimento da partícula é dada por [13]:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1.1)$$

em que  $d\tau$  é o tempo próprio (tempo medido no referencial da partícula) descrito por:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.1.2)$$

sendo  $\eta_{\alpha\beta}$  o tensor métrico de Minkowski.

Considerando um sistema de coordenadas arbitrário  $x^\mu$  em repouso, submetido a um campo gravitacional [7, 13], a dinâmica da partícula observada a partir do referencial  $x^\mu$  poderá ser obtida fazendo uma mudança de referencial aplicando a regra da cadeia, ou seja:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (2.1.3)$$

Tomando a evolução temporal da equação acima, iremos obter:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.1.4)$$

Multiplicando por  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ , teremos:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.1.5)$$

A equação (2.1.5) é denominada equação da geodésica e descreve o menor caminho que uma partícula livre percorre em um espaço curvo, ou seja, representa a trajetória de menor comprimento entre dois pontos num referencial arbitrário  $x^\mu$ , o termo  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  é chamado de conexão afim e estabelece uma conexão entre vetores de espaços tangentes definidos em pontos vizinhos e pode ser interpretado como uma “correção” as equações devido a curvatura do espaço-tempo,

sendo  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  dado por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (2.1.6)$$

Tendo em vista que as derivadas de primeira ordem comutam, da Equação (2.1.6), temos que a conexão afim é simétrica com relação aos índices inferiores, ou seja:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (2.1.7)$$

Percebe-se que na equação de movimento escrita a partir da Equação (2.1.5) existe um termo adicional  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}$  quando comparada com a equação de movimento escrita a partir do sistema localmente inercial Equação (2.1.1), isso indica a presença de um campo gravitacional. Sendo assim, vemos que, de acordo com a teoria da relatividade geral, o campo gravitacional é descrito a partir da curvatura do espaço-tempo.

Podemos ainda expressar o tempo próprio em termos do sistema de coordenadas  $x^{\mu}$ , aplicando a regra da cadeia na Equação (2.1.2), ou seja:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \equiv -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.1.8)$$

Em que  $g_{\mu\nu}$  é o *tensor métrico*, definido como [13]:

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}. \quad (2.1.9)$$

Esse tensor é de fundamental importância na relatividade geral, pois sua função é medir distância entre dois pontos e ângulos entre vetores num espaço-tempo curvo. Suas componentes definem a geometria do espaço-tempo, descrevendo assim a dinâmica num campo gravitacional.

### 2.1.1 Relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$

No estudo referente a partícula em queda livre, o campo que determina a força gravitacional é a conexão afim  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ , enquanto que o tempo próprio é determinado pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  [13]. Sendo assim, a relação entre o tensor métrico e a conexão afim, é determinada derivando inicialmente a Equação (2.1.9) com respeito a  $x^{\lambda}$ , ou seja:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.1.10)$$

em que as seguintes relações são válidas [13]:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \quad e \quad \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho}. \quad (2.1.11)$$

Utilizando as relações acima e a Equação (2.1.9), obtemos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (2.1.12)$$

Realizando a seguinte permutação  $\mu \leftrightarrow \lambda$  e fazendo algumas manipulações, é possível chegar a seguinte expressão:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu}. \quad (2.1.13)$$

Podemos multiplicar ambos os lados da última equação por  $g^{\nu\sigma}$  com o objetivo de encontrar  $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$ :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.1.14)$$

Esta expressão representa a conexão afim em termos do tensor métrico. Dessa forma, observamos que o Princípio da Equivalência leva a uma dinâmica em que o movimento da partícula é determinado pela geometria do espaço-tempo, ou seja, o conceito de força pode ser substituído pela ideia de que a matéria e a energia curvam o espaço-tempo, e este determina quais são as geodésicas que devem ser seguidas pelas partículas de teste [6, 7, 13]. Então, uma vez estabelecida a forma métrica, as funções  $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ , são determinadas solucionando-se um conjunto de equações diferenciais conhecidas como equações de Einstein, que relacionam a geometria do espaço-tempo com o conteúdo de matéria e energia, fontes do campo gravitacional [6, 7, 14].

## 2.2 Tensor de Riemann

Iremos abordar algumas relações da geometria diferencial necessárias para a obtenção das equações de Einstein. Na teoria da relatividade geral, o campo gravitacional é descrito pela curvatura do espaço-tempo. A quantidade geométrica que determina essa curvatura é o tensor de Riemann definido por [6, 15, 16]:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\rho_{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\rho} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\beta\rho}. \quad (2.2.15)$$

O tensor de Riemann, com quatro índices, possui  $n^4$  componentes independentes em um espaço n-dimensional [6, 7]. Entretanto, de acordo com algumas propriedades fundamentais, podemos perceber que o número de componentes independentes se reduz a  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ . No entanto, para 4 dimensões obtemos 20 componentes independentes. As propriedades fundamentais do tensor de curvatura são dadas a seguir.

1º) O tensor  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  é anti-simétrico com relação à troca de índices do primeiro par;

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}. \quad (2.2.16)$$

2º) O tensor  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  é anti-simétrico com relação à troca de índices do segundo par;

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}. \quad (2.2.17)$$

3º) O tensor  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  é invariante com relação à troca do primeiro par de índices com o segundo;

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.2.18)$$

A soma de permutações cíclicas dos últimos três índices desaparece, logo:

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \quad (2.2.19)$$

Levando em consideração as propriedades do tensor de curvatura verifica-se que a Equação (2.2.19) é equivalente a:

$$R_{[\mu\nu\alpha\beta]} = 0. \quad (2.2.20)$$

O tensor de Riemann também satisfaz a identidade de Bianchi:

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} = 0. \quad (2.2.21)$$

Em que a derivada covariante  $\nabla_\lambda$  exerce a função da derivada parcial e obedece as propriedades de linearidade e a regra de Leibniz [6]. Portanto, pode ser escrita como uma derivada parcial mais alguma transformação linear que serve como conexão para se ter um resultado covariante e que se apresenta em forma de um conjunto de matrizes conhecidas como os coeficientes da conexão. Então, no caso de um vetor, segue que:

$$\nabla_\lambda V^\nu = \partial_\lambda V^\nu + \Gamma_{\lambda\rho}^\nu V^\rho. \quad (2.2.22)$$

Esta expressão representa a derivada covariante de um vetor em termos da derivada parcial, que nos permite obter as propriedades de transformação da conexão  $\Gamma_{\lambda\rho}^\nu$ .

O tensor de Riemann também possibilita definir um tensor muito importante na formulação da teoria da gravitação de Einstein, conhecido como tensor de Ricci, sendo considerado o único tensor de segunda ordem que é obtido a partir da contração do tensor de Riemann [6, 7, 13, 17]. Dessa forma, temos:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu}. \quad (2.2.23)$$

Trata-se de um tensor simétrico, ou seja,  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ , possuindo um total de 10 componentes independentes. Contraindo o tensor de Ricci, é possível ainda obter o escalar de curvatura ou escalar de Ricci representado da seguinte forma:

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.2.24)$$

em que relaciona a cada ponto do espaço-tempo um único número real, caracterizando assim, a curvatura intrínseca do espaço-tempo no ponto considerado.

Através desses resultados podemos obter um tensor simétrico de segunda ordem com derivada covariante nula, conhecido como tensor de Einstein, sendo representado por  $G_{\mu\nu}$  e definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.2.25)$$

O tensor de Einstein é simétrico, devido à simetria do tensor de Ricci e da métrica, e é fundamental na Teoria da Relatividade Geral. Temos também, que este tensor satisfaz as chamadas identidades contraídas de Bianchi [7],

$$\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (2.2.26)$$

Esta expressão está associada a uma lei de conservação e representa, localmente, a conservação das quantidades definidas pelo tensor de Einstein. Posteriormente veremos, de que forma este tensor se relaciona com o tensor energia-momento, contribuindo para obtenção das equações dinâmicas do campo gravitacional.

## 2.3 Tensor energia-momento

O tensor energia-momento corresponde a um tensor de segunda ordem, que descreve as quantidades físicas de um *fluido perfeito*<sup>2</sup>. Considerando um sistema de várias partículas, as linhas de universo das partículas definem um campo de 4-momento distribuído no espaço-tempo. Essa distribuição é praticamente contínua e portanto, pode ser descrita por meio de quantidades médias (densidade média de energia, pressão, dentre outros), que são determinadas através do tensor energia-momento [6, 7, 18], ou seja, toda informação relevante sobre o comportamento do fluxo de 4-momento das partículas está contida no tensor de energia-momento. Esse tensor possui 16 componentes e cada componente representa uma quantidade física. Diante disto, pode ser representado da seguinte forma:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu. \quad (2.3.27)$$

---

<sup>2</sup>Um fluido perfeito na relatividade é definido como um fluido que não possui viscosidade e nem fluxo de calor [18].

Em que  $\rho_0$  é a densidade de massa apropriada e  $u^\mu$  é a quadri-velocidade do fluido. Temos ainda que o tensor  $T^{\mu\nu}$  é simétrico, ou seja,  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$  e suas componentes  $T^{00}$ ,  $T^{0k}$  (ou  $T^{k0}$ ),  $T^{kk}$  e  $T^{kj}$  representam respectivamente a componente temporal (*densidade de energia*), a componente espaço-temporais (*densidade da k-ésima componente de momento*), as componentes espaciais (*fluxo da k-ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal está na direção k, corresponde a pressão*) e as componentes espaciais (*fluxo da k-ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal na direção k*).

O tensor energia-momento de um sistema completo satisfaz a lei de conservação [13]:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.3.28)$$

ou ainda,

$$\partial_0(T^{0\nu}) + \partial_i(T^{i\nu}) = 0. \quad (2.3.29)$$

Com a interação gravitacional, tem-se:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3.30)$$

Em cosmologia, o conteúdo de matéria e energia do Universo é considerado um fluido perfeito, conforme veremos. Nesse caso, o tensor energia-momento é representado por [6, 7]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (2.3.31)$$

Em que  $p$  e  $\rho$  representam a pressão e a densidade de energia respectivamente e  $u^\mu$  a 4-velocidade do fluido.

## Capítulo 3

# Aspectos da Cosmologia

A Cosmologia é o estudo da estrutura dinâmica do Universo em larga escala [6, 7]. Sendo assim, parte do princípio de que as leis da física são as mesmas em qualquer ponto. Dessa forma, existem na natureza quatro forças fundamentais que governam o Universo: as forças nucleares fraca e forte, que são denominadas de forças de curto alcance, portanto, não descrevem a dinâmica do Universo e as forças eletromagnética e gravitacional, que são de longo alcance.

No caso das forças de longo alcance, ambas poderiam contribuir para o estudo da evolução do Universo, no entanto, macroscopicamente a matéria no seu estado natural se apresenta eletricamente neutra, então a força eletromagnética não colabora para esta descrição. Diante disto, a força gravitacional torna-se a interação predominante para descrever a estrutura em larga escala do Universo. Logo, a Cosmologia deve ser entendida dentro do contexto da Relatividade Geral, que é a teoria fundamental para analisar a dinâmica do Universo.

Os dados observacionais apontam que em larga escala, considerando uma ordem maior que  $100Mpc^1$  o Universo se apresenta homogêneo e isotrópico [2, 8], ou seja, a matéria se encontra distribuída de forma homogênea e isotrópica. Para uma escala bem menor que  $100Mpc$  a distribuição de matéria é irregular. Para se ter uma ideia a

---

<sup>1</sup>Um parsec (1pc) corresponde a distância em que a distância média entre a Terra e o sol é de 1 arco de segundo (1arcseg) [4], equivale a 3.26 *anos-luz* (distância que a luz viaja em um ano), ou ainda 30.9 trilhões de quilômetros.

nossa galáxia faz parte de um pequeno grupo de galáxias chamado de grupo local. As estimativas indicam que a Via Láctea é uma das maiores galáxias do grupo local possuindo cerca de  $10^{11}$  (cem bilhões) de estrelas com um diâmetro de aproximadamente  $30Kpc$  (Kiloparsecs), que corresponde a  $10^5$  anos-luz [4]. Pertence a um aglomerado composto por 30 galáxias com um comprimento de aproximadamente  $1Mpc$  chamado de grupo local, que tem como mais próximo, o aglomerado de Virgo contendo 2000 galáxias inseridas num volume de  $5Mpc$  [4]. Portanto, é numa escala muito grande que as observações indicam que o Universo é homogêneo e isotrópico.

### 3.1 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Inspirado pelas observações, o modelo cosmológico padrão se baseia no chamado princípio cosmológico, que pode ser enunciado da seguinte forma: “Dois observadores que estejam acompanhando o movimento cosmológico, devem estar expostos a mesma interpretação do Universo” [2]. Então, de acordo com esse princípio, existe um tempo cosmológico( $t$ ), tal que as hiper superfícies, com  $t = \text{cte}$ , são espaços tridimensionais homogêneos e isotrópicos [19]. A homogeneidade significa que em torno de qualquer ponto desse espaço a métrica é invariante por translação, quanto a isotropia, significa que em torno de qualquer ponto a métrica é invariante por rotação. Logo, temos uma simetria esférica em qualquer ponto. Se existe simetria associada a métrica, então, as transformações de simetria desta, as isometrias, são geradas por vetores de Killing, em que a derivada de Lie da métrica  $g_{\mu\nu}$  é nula, portanto:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.1.1)$$

ou ainda,

$$\xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + g_{\alpha\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + g_{\mu\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} = 0. \quad (3.1.2)$$

Em que obtemos [7]:

$$\nabla_\mu \xi_\nu = -\nabla_\nu \xi_\mu, \quad (3.1.3)$$

que é chamada equação de Killing, cuja solução está associada aos vetores de Killing, geradores da isometria.

A equação de Killing é uma equação diferencial parcial e acoplada, ela admite, no máximo,  $\frac{n(n+1)}{2}$  soluções independentes. Para um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico, temos  $n = 3$ , em que o número máximo de simetrias geradas será seis. Ou seja, nesse espaço teremos seis vetores de Killing linearmente independentes, sendo, três vetores de translação e três vetores de rotação. Portanto, para um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico maximalmente simétrico, o tensor de curvatura pode ser escrito como [6, 20]:

$$R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}). \quad (3.1.4)$$

Em que  $k$  é uma constante chamada de constante de curvatura e  $\gamma_{ij}$  representa a métrica do espaço tridimensional, assim

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.1.5)$$

Esta representa a geometria do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico. Para encontrar explicitamente (em algum sistema de coordenadas) as componentes da métrica do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico deve-se escolher um ponto arbitrário como origem do sistema de coordenadas (em torno desse ponto a métrica é invariante por rotações, ou seja, simetria esférica), dessa forma:

$$dl^2 = e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.1.6)$$

Sendo  $\lambda(r)$  uma função desconhecida que deve também satisfazer a condição de homogeneidade. Nesse caso, podemos determiná-la utilizando o tensor de Riemann. Então, contraindo o primeiro  $i$  e o terceiro  $k$  índices da Equação (3.1.4) obtemos o tensor de Ricci descrito por:

$$R_{jl} = R^i{}_{jil} = k(\delta_i^i\gamma_{jl} - \delta_l^i\gamma_{ji}), \quad (3.1.7)$$

logo,

$$R_{jl} = 2k\gamma_{jl}. \quad (3.1.8)$$

que representa o tensor de Ricci para métrica da Equação (3.1.5). Calculando suas componentes, veremos que as componentes não-nulas são:

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r}, \quad (3.1.9)$$

$$R_{22} = 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} \quad (3.1.10)$$

e

$$R_{33} = \text{sen}^2(\theta)R_{22}. \quad (3.1.11)$$

Substituindo essas componentes na Equação (3.1.8), obtem-se duas equações independentes. Para  $j = 1$  e  $l = 1$ , obtemos a componente  $R_{11}$  da métrica dada por:

$$R_{11} = 2k\gamma_{11}, \quad (3.1.12)$$

sendo

$$\frac{d(e^{-\lambda})}{dr} = -2kr. \quad (3.1.13)$$

Integrando a Equação (3.1.13), temos:

$$e^{-\lambda} = -kr^2 + A, \quad (3.1.14)$$

em que  $A$  é uma constante de integração.

Para  $j = 2$  e  $l = 2$ , obtemos a componente  $R_{22}$  da métrica descrita por

$$R_{22} = 2k\gamma_{22}, \quad (3.1.15)$$

então,

$$1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} = 2kr^2, \quad (3.1.16)$$

que nos leva ao seguinte resultado:

$$A = 1. \quad (3.1.17)$$

Assim, combinando a Equação 3.1.14 com a Equação 3.1.17, obtemos:

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - kr^2}. \quad (3.1.18)$$

Logo, a métrica de um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico é definida da seguinte forma

$$dl^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (3.1.19)$$

que representa a distância espacial própria entre eventos simultâneos.

Considerando observadores co-móveis (observadores que não se movem relativisticamente em relação às galáxias) distribuídos no espaço tridimensional, a linha de Universo desses observadores deve ser ortogonal ao espaço tridimensional, homogêneo e isotrópico. Sendo assim, a métrica do espaço-tempo deve obedecer à linha de Universo que é uma geodésica na métrica, sendo que a homogeneidade e a isotropia induz que a parte espacial do tensor métrico evolua por meio de uma função universal do tempo (derivada direcional). Dessa forma, a métrica do espaço-tempo será representada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dl^2. \quad (3.1.20)$$

Sendo  $a(t)$  uma função do grau de afastamento e aproximação dos observadores co-móveis,  $t$  o tempo próprio medido pelos observadores e  $dl$  a distância co-móvel. Combinando as Equações (3.1.19) e (3.1.20), tem-se [4, 6, 7]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.1.21)$$

é denominada de métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e satisfaz a condição de homogeneidade e isotropia para a geometria do espaço-tempo [6, 7]. O fator  $a(t)$  corresponde a um fator de escala que é utilizado para descrever a evolução de distâncias espaciais e  $k$  é a constante de curvatura do espaço que pode assumir os valores  $k = -1$ ,  $k = 0$  e  $k = 1$  que representa respectivamente, o espaço com curvatura hiperbólica, o espaço sem curvatura, ou seja, plano e o espaço com curvatura espacial do tipo esférica.

Em relação ao parâmetro de escala, temos que, para um  $a(t)$  crescente com o tempo o Universo está em expansão, caso seja decrescente, o Universo está se contraindo.

## 3.2 Equação de Friedmann-Lemaître

As equações de Friedmann podem ser obtidas a partir da combinação da métrica de Friedmann-Robertson-Walker e o tensor energia-momento de um fluido perfeito, nas equações de Einstein representadas por [7, 8, 13]:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.2.22)$$

em que  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein descrito por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (3.2.23)$$

e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento.

Sabendo que  $R_{\mu\nu}$  representa o tensor de Ricci,  $R$  o escalar de Ricci e  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico de FRW, então, podemos obter as equações de Friedmann aplicando a métrica e o tensor energia-momento de um fluido perfeito as equações de Einstein. Então, calculando as componentes do tensor de Einstein, teremos para a componente  $G_{00}$ ,

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00}, \quad (3.2.24)$$

em que,

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.2.25)$$

e

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (3.2.26)$$

Substituindo na Equação (3.2.23), teremos:

$$G_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2}, \quad (3.2.27)$$

em que substituindo esta na Equação (3.2.22), obtemos  $G_{00} = 8\pi GT_{00}$ . Assim, como  $T_{00} = \rho$ , ficaremos com  $G_{00} = 8\pi G\rho$  que, ao ser comparada com a Equação (3.2.34), nos permite obter a primeira equação de Friedmann descrita por:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.2.28)$$

que é a primeira equação de Friedmann e representa a taxa de variação de expansão do fator de escala  $a(t)$ , que pode ser descrita por  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ , conhecido como parâmetro de Hubble. Já para a segunda equação de Friedmann devemos encontrar a componente  $G_{11}$ . Seguindo os mesmos procedimentos para a obtenção da primeira equação, temos:

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11}, \quad (3.2.29)$$

em que

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (3.2.30)$$

e

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (3.2.31)$$

Da métrica de FRW, temos que a componente  $g_{11} = \left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)$ , logo a componente  $G_{11}$  pode ser escrita como:

$$G_{11} = \frac{-2a\ddot{a}}{1 - kr^2} - \frac{\dot{a}^2}{1 - kr^2} - \frac{k}{1 - kr^2}. \quad (3.2.32)$$

Da Equação (3.2.23), temos que  $G_{11}$  é dada por  $G_{11} = 8\pi GT_{11}$ . Já a componente  $T_{11}$  do tensor energia-momento, assume a seguinte relação:  $T^1_1 = p$ , que na forma covariante é descrita como:

$$T_{11} = pg_{11}, \quad (3.2.33)$$

substituindo  $T_{11}$  na Equação (3.2.23), obtemos a seguinte expressão:

$$G_{11} = 8\pi Gp\left(\frac{a^2}{1 - kr^2}\right). \quad (3.2.34)$$

Comparando as Equações (3.2.32) e (3.2.34), temos que:

$$\frac{-2\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} = 8\pi Gp. \quad (3.2.35)$$

Substituindo a Equação (3.2.28) na Equação (3.2.35), encontramos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(3p + \rho). \quad (3.2.36)$$

Esta é a segunda equação de Friedmann, que descreve a taxa de aceleração com que o Universo se expande em função da densidade de matéria e da pressão do fluido relacionadas com o fator de escala de expansão do Universo [2, 6, 7]. De acordo com essa expressão, percebe-se que o Universo pode ser acelerado ou desacelerado, assim para  $\ddot{a} > 0$  o Universo é acelerado e  $\ddot{a} < 0$  temos um Universo desacelerado.

### 3.3 Densidade de energia no Universo

No Universo podemos identificar, em larga escala, três fontes principais de distribuição de matéria e energia [14], ou seja: a matéria presente nos aglomerados (como as Galáxias, Estrelas, dentre outros), a radiação cósmica (representada pelas ondas eletromagnéticas) e a constante cosmológica  $\Lambda$  (corresponde a energia do vácuo).

Considerando as fontes do campo gravitacional do Universo como um fluido perfeito, iremos, através das equações de Einstein, encontrar a relação entre a densidade de energia com fator de escala, para descrevermos a energia dinâmica do Universo [6, 14, 21]. Sendo assim, o tensor energia-momentum de um fluido perfeito é descrito por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} + pg_{\mu\nu}. \quad (3.3.37)$$

Como consideramos um sistema de coordenadas co-móveis para descrever a métrica, então o movimento do fluido vai estar em conjunto com a do referido sistema. Portanto,

a quadri-velocidade será dada por  $U^\mu = (-1, 0, 0, 0)$  e  $T_{\mu\nu}$  será:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Escrevendo na forma contravariante, teremos:

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (3.3.38)$$

em que o traço será:

$$T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p. \quad (3.3.39)$$

Aplicando a condição da conservação de energia a Equação (3.3.37), temos:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_0 = 0 \quad (3.3.40)$$

ou

$$\partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda = 0, \quad (3.3.41)$$

que leva a

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (3.3.42)$$

A Equação (3.3.42) é conhecida como a equação da conservação da energia para a métrica de FRW para um fluido perfeito.

Para resolvermos a Equação (3.3.42), deve-se utilizar uma equação de estado que relacione a densidade de energia ( $\rho$ ) com a pressão ( $p$ ). Portanto, esta relação é descrita através de:

$$p = \omega\rho. \quad (3.3.43)$$

Em que  $\omega$  representa uma constante independente do tempo que especifica a natureza do fluido cósmico, assim, substituindo a Equação (3.3.43) em (3.3.42), temos [6, 7]:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega). \quad (3.3.44)$$

Ou

$$\rho(t) = \rho_0 \left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3(1+\omega)}. \quad (3.3.45)$$

$\rho(t)$  representa a densidade de energia em função do fator de escala  $a(t)$  para um fluido perfeito.

Os exemplos mais comuns de fluidos cosmológicos são a matéria, a radiação e a energia de vácuo [22], que de acordo com a equação de estado (3.3.43), para cada tipo de fluido  $\omega$  pode assumir os seguintes valores:  $\omega = 0$ ,  $\omega = \frac{1}{3}$  e  $\omega = -1$ .

Para  $\omega = 0$  teremos um período dominado pela matéria diluída (poeira), em que a matéria não-relativística, possui pressão zero [6]. Equivale ao comportamento das galáxias numa escala de  $100Mpc$ , no qual a pressão é praticamente desprezível em relação a densidade de energia, ou seja, para  $\omega = 0$  temos:

$$\rho_M(t) \sim a^{-3}, \quad (3.3.46)$$

que relaciona a densidade de matéria com o fator de escala, indicando a diminuição da densidade do número de partículas na medida que o Universo se expande.

Para  $\omega = \frac{1}{3}$ , temos o período dominado pela radiação [6, 23]. Nesse caso, a densidade de radiação pode ser utilizada para descrever qualquer radiação eletromagnética real, ou partículas massivas que se deslocam com velocidades próximas da luz, indistinguíveis dos fótons.

O valor de  $\omega$  para o caso da radiação, considerando um gás isotrópico de partículas relativísticas como um fluido perfeito, podemos descrevê-lo através da Equação (3.3.37). Temos ainda, que o tensor  $T_{\mu\nu}$  para o eletromagnetismo pode ser descrito em termos da intensidade de campo, como se segue [6, 14]:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}, \quad (3.3.47)$$

Em que o traço deste tensor é representado por:

$$T^{\mu}_{\mu} = F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = 0. \quad (3.3.48)$$

Comparando com a Equação (3.3.39), temos:

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R, \quad (3.3.49)$$

que representa a equação de estado de um gás de fótons (radiação) e  $\omega = \frac{1}{3}$ , representa a constante para a radiação. Portanto, a densidade de energia da radiação descrita pela Equação (3.3.45) cai de acordo com a seguinte relação:

$$\rho_R(t) \sim a^{-4}. \quad (3.3.50)$$

Comparando as densidades, percebemos que a densidade de energia da radiação cai mais rápido do que a densidade de energia na matéria, isso porque a densidade do número de fótons diminui na mesma proporção que a densidade do número de partículas não-relativísticas. Atualmente acredita-se que a densidade de energia da radiação é muito menor que a da matéria, com  $\frac{\rho_M}{\rho_R} \sim 10^3$  [2, 6]. Porém, no passado o Universo era muito pequeno e quem dominava era a densidade de energia da radiação.

Para energia de vácuo, temos  $\omega = -1$ . Nesse caso, a equação de estado torna-se  $p_{vac} = -\rho_{vac}$ , sendo  $\rho_{vac} = \text{cte}$  que pode ser relacionada a constante cosmológica ( $\Lambda$ ) [24], conforme veremos a seguir.

Na Relatividade Geral, a fonte de energia para o campo gravitacional é o tensor energia-momento [6]. Na física não gravitacional, o movimento de uma partícula com a energia potencial  $V(x)$  é o mesmo que com uma energia potencial  $V(x) + V_0$ , com  $V_0$  sendo qualquer constante. Na gravitação, porém, o valor real das questões energéticas é considerado, e não apenas as diferenças entre os estados. Esse comportamento abre a possibilidade da existência de energia de vácuo: uma densidade de energia do espaço vazio. Uma característica interessante, é que no vácuo não há uma direção preferencial, no entanto, ainda é possível ter uma densidade de energia diferente de zero se o tensor energia-momento estiver associado à invariância de Lorentz com coordenadas inerciais locais [6]. Essa invariância de Lorentz nos leva ao tensor energia-momento correspondente, que deve ser proporcional à métrica, logo podemos descrever o termo

cosmológico  $\Lambda g_{\mu\nu}$  como um fluido perfeito e escrever a seguinte relação:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}\eta_{\mu\nu}. \quad (3.3.51)$$

Admitindo a condição de que  $\eta_{\mu\nu}$  é invariante por transformação de Lorentz, podemos generalizar com coordenadas localmente inerciais arbitrárias em que:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}. \quad (3.3.52)$$

Da equação de um fluido perfeito, o tensor energia-momento dado pela Equação (3.3.37) equivale à expressão acima generalizada, a menos de um sinal contrário na densidade de energia para pressão isotrópica, gerando:

$$p_{vac} = -\rho_{vac}. \quad (3.3.53)$$

Dividindo o tensor energia-momento em uma parte da matéria  $T_{\mu\nu}^M$  e uma parte de vácuo  $T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$  a equação de Einstein torna-se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^M - \rho_{vac}g_{\mu\nu}). \quad (3.3.54)$$

Acrescentando a constante cosmológica  $\Lambda$  para encontrar soluções para um modelo de Universo estático, tem-se [6, 24]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}), \quad (3.3.55)$$

$\Lambda$  é inserida como uma densidade de energia no vácuo, da seguinte forma:

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.3.56)$$

Portanto, para a constante cosmológica como distribuição de energia-matéria a Equação (3.3.53) leva a um parâmetro  $\omega = -1$ , em que a densidade de energia de vácuo é dada por:

$$\rho_{\Lambda}(t) = \rho_0. \quad (3.3.57)$$

Assim, temos três períodos para a evolução do Universo, sendo o primeiro dominado pela radiação, o segundo dominado pela matéria e por fim, o período dominado pela constante cosmológica  $\Lambda$  [7].

Da equação de Friedmann, usando a constante de integração  $a_0$ , podemos fixar o valor atual do fator de escala em  $a_0 = 1$  para simplificar e obter as três fontes para a evolução do Universo.

$$\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda. \quad (3.3.58)$$

Em que,

$$\rho_M = \frac{\rho_{0M}}{a^3}, \quad (3.3.59)$$

$$\rho_R = \frac{\rho_{0R}}{a^4}, \quad (3.3.60)$$

e

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.3.61)$$

Substituindo-as na Equação (3.2.28) obtemos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{0R}}{a^4} + \frac{\rho_{0M}}{a^3} \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.3.62)$$

Definindo um potencial efetivo como sendo dado por:

$$V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{0R}}{a^4} + \frac{\rho_{0M}}{a^3} \right) + \frac{k}{a^2}, \quad (3.3.63)$$

A Equação (3.3.62) torna-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a). \quad (3.3.64)$$

Como  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$  é positivo, podemos fazer uma analogia com a equação de movimento de uma partícula submetida a um potencial  $V_{eff}$  expressa por:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V_{eff}(x). \quad (3.3.65)$$

A condição necessária para o fator de escala ser positivo implica que  $V_{eff}(x) \leq \frac{\Lambda}{3}$ .

Para  $V_{eff}$  crítico igual a  $\frac{\Lambda}{3}$  teremos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 0. \quad (3.3.66)$$

Desta forma, derivando a Equação (3.3.64) de Friedmann, segue que:

$$\ddot{a} = \left[ \frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a) \right] a - \frac{1}{2} \left[ \frac{d(V_{eff})}{da} \right] a^2. \quad (3.3.67)$$

Para  $k = 0$ , o potencial efetivo  $V_{eff}(a)$  tem um predomínio do período da matéria sobre a radiação, portanto:

$$V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{0R}}{a^4} + \frac{\rho_{0M}}{a^3} \right). \quad (3.3.68)$$

Para  $k = 1$ , o potencial efetivo  $V_{eff}(a)$  tem um predomínio do período da constante cosmológica sobre a matéria e a radiação, portanto:

$$V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{0R}}{a^4} + \frac{\rho_{0M}}{a^3} \right) + \frac{1}{a^2}. \quad (3.3.69)$$

Para  $k = -1$ , o potencial efetivo  $V_{eff}(a)$  tem um predomínio do período da radiação sobre a constante cosmológica e a matéria, logo:

$$V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{0R}}{a^4} + \frac{\rho_{0M}}{a^3} \right) - \frac{1}{a^2}. \quad (3.3.70)$$

### 3.4 Parâmetro de desaceleração

Um outro parâmetro que descreve o processo de expansão do Universo, é o parâmetro de desaceleração definido por [15, 14]:

$$q = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = -\frac{\frac{\ddot{a}}{a}}{\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2}. \quad (3.4.71)$$

Essa expressão nos informa o quanto a taxa de aceleração  $H$  do Universo está se expandindo [4]. Sendo assim, podemos determinar o fator de escala  $a(t)$  variando no tempo e obter o comportamento do parâmetro de desaceleração  $q(t)$  para alguns modelos cosmológicos. Se  $q < 0$ , a expansão do Universo é acelerada, mas se  $q > 0$  indica uma fase de desaceleração.

## 3.5 Modelos cosmológicos

Nesta seção iremos apresentar alguns modelos cosmológicos como solução das equações de Friedmann.

### 3.5.1 Modelo cosmológico de Einstein-de-Sitter

No modelo cosmológico de Einstein-de-Sitter temos:  $\Lambda = 0$ ,  $\rho_{0R} = 0$  e  $k = 0$ , o que corresponde o Universo dominado pela matéria. Portanto através da equação de Friedmann podemos encontrar o fator de escala para o período da matéria [15]. Sendo assim, partindo da Equação (3.3.62), temos:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{0M}}{3}} \sqrt{a^{-3}}, \quad (3.5.72)$$

denominando  $\alpha = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{0M}}{3}}$  obtém-se que:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \alpha a^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.5.73)$$

Sendo  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ , obtemos que

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{\frac{2}{3}} (t)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.5.74)$$

A Figura 3.1 apresenta o comportamento do fator de escala para o período dominado pela matéria.

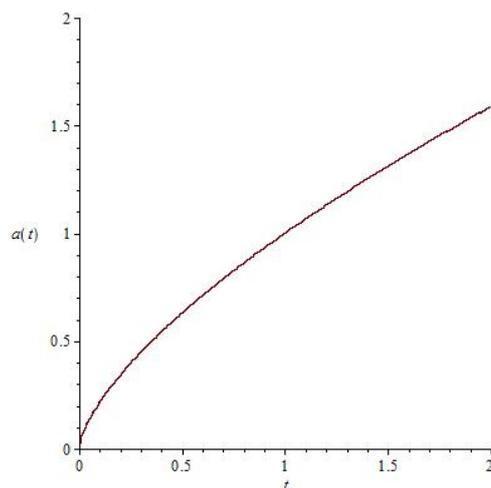


Figura 3.1: Evolução do fator de escala em função do tempo para o Universo dominado pela matéria.

Analisando o gráfico da Figura 3.1 percebe-se que o fator de escala cresce com o passar do tempo indefinidamente.

Utilizando a Equação (3.4.71), o parâmetro de desaceleração  $q(t)$  resulta num valor de  $q(t) = \frac{1}{2}$ , o que corresponde a um período de desaceleração constante com o passar do tempo. Sendo o modelo mais popular até as observações indicarem que o Universo estava em expansão acelerada. (Figura 3.2).

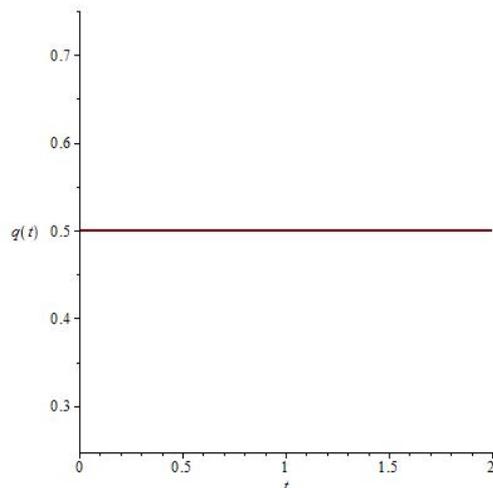


Figura 3.2: Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela matéria.

Para o Universo dominado pela radiação, temos:  $\Lambda = 0$ ;  $\rho_{0M} = 0$  e  $k = 0$ . Logo, utilizando a Equação (3.3.62), obtemos

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{0R}}{3}} \sqrt{a^{-2}}, \quad (3.5.75)$$

Assumindo  $\alpha = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{0R}}{3}}$  temos:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \alpha a^{-2}. \quad (3.5.76)$$

Sendo  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$  e fazendo os mesmos procedimentos do caso anterior, produz:

$$a(t) = (2\alpha t)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5.77)$$

Esse corresponde ao valor aproximado do fator de escala  $a(t)$  para o período da radiação, em que analisando, observamos que cresce com o passar do tempo indefinidamente [7]. (Figura 3.3).

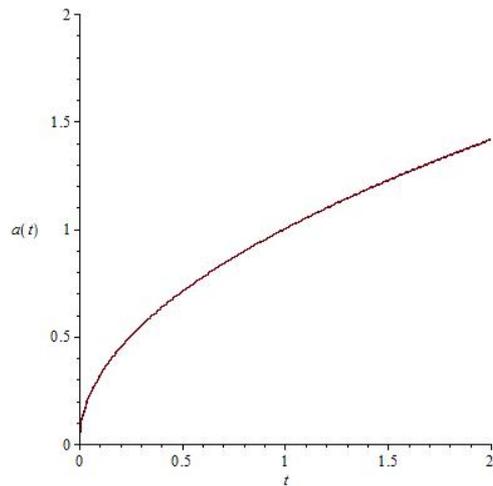


Figura 3.3: Evolução do fator de escala em função do tempo para o universo dominado pela radiação.

O parâmetro de desaceleração resulta em  $q = 1$ , o que indica um período de desaceleração constante com o passar do tempo. (Figura 3.4).

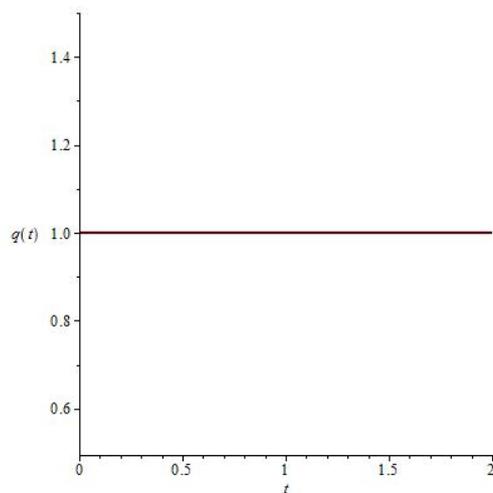


Figura 3.4: Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela radiação.

### 3.5.2 Modelo de de Sitter

Para o caso do Universo dominado pela constante cosmológica, que corresponde ao modelo de de Sitter, temos que  $\Lambda > 0$ ,  $\rho_{0R} = 0$ ,  $\rho_{0M} = 0$  e  $k = 0$ , então, partindo

da Equação 3.3.62, obtemos:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (3.5.78)$$

Como  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ , obtemos que  $a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$ . Assim, o fator de escala para a constante cosmológica obedece a uma expansão exponencial [7]. (Figura 3.5).

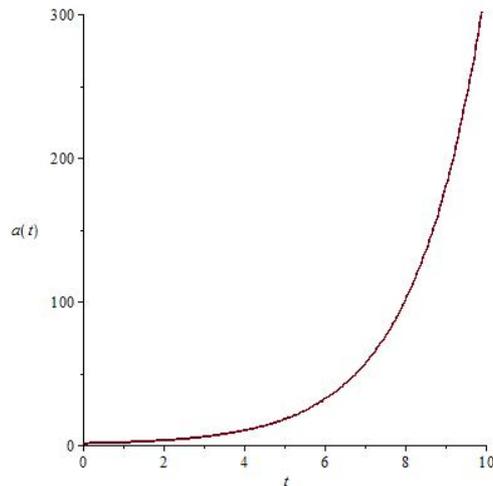


Figura 3.5: Evolução do fator de escala em função do tempo para o modelo de de Sitter.

.

O parâmetro de desaceleração, tem como resultado  $q = -1$ , o que indica um período de aceleração constante com o passar do tempo [7, 25]. (Figura 3.6).

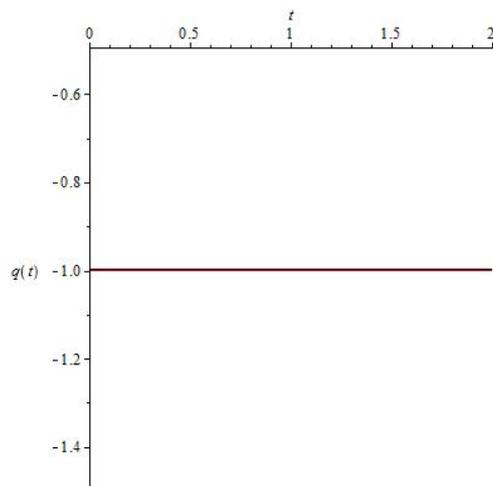


Figura 3.6: Parâmetro de desaceleração para o modelo de de Sitter.

# Capítulo 4

## Cosmologia Inflacionária

### 4.1 Teoria do Big Bang

A Teoria do Big Bang<sup>1</sup> é uma teoria que prevê que o Universo originou-se de um estado muito quente e denso, cuja expansão inicial afetou não só a matéria, mas a própria estrutura do espaço-tempo [2, 9]. Tal teoria recebeu uma extraordinária confirmação experimental em 1964 com a descoberta da radiação cósmica de fundo na faixa de microondas. Esta radiação foi detectada no ano de 1965, pelos engenheiros de telecomunicações Arno Allan Penzias e Robert Woodrow Wilson, que captaram acidentalmente essa radiação em ondas de rádio de 7,35 cm [25]. Através de dados obtidos pelo satélite COBE<sup>2</sup> foi confirmado que essa radiação corresponde a radiação de um corpo negro a 2,7K. A radiação é a mesma em todas as direções e as inhomogeneidades seriam inferiores a uma parte em 100 mil [25]. A detecção da radiação cósmica de fundo já havia sido prevista pelo físico norte-americano George Gamow (1904 – 1968) na década de 40 no entanto, na época, não foi dada importância. Atualmente são

---

<sup>1</sup>Termo que representa a concepção atual de que o nosso Universo se originou de uma grande expansão inicial do espaço-tempo a cerca de 10 bilhões de anos atrás. Neste processo de expansão tanto a densidade como a temperatura e a pressão variaram enormemente proporcionando o predomínio das diversas formas de interação física conhecidas, gerando as fases ou eras cosmológicas.

<sup>2</sup>Satélite norte-americano, lançado em (1989), e que operou até (1994). Seu nome refere-se a expressão Cosmic Background Explorer e conduziu três experimentos científicos destinados a estudar a radiação cósmica primordial.

consideradas como relíquias do Big Bang [26].

A teoria do Big Bang apesar de sua relevância, apresenta alguns problemas no que se refere as condições iniciais do Universo, dentre os quais podemos citar [4, 24]:

i) Problema do Horizonte: A distribuição observada do fundo de microondas revela uma grande homogeneidade. O problema, no entanto, é que estas regiões distantes não teriam condições de ter tido contato causal antes da época em que a radiação se desacoplou da matéria. Portanto, a grande questão é saber como o Universo conseguiu atingir tal grau de homogeneidade.

ii) Problema da Planura: O problema da planura consiste em explicar por que a densidade total de energia é extremamente próxima a densidade crítica. De acordo com os dados da astronomia experimental, o parâmetro de densidade tem um valor muito próximo a 1, mas não exatamente 1, que corresponde ao modelo crítico ( $\Omega_{total} = 1$ ), o que significa que a geometria do Universo é praticamente plana e, conseqüentemente, a densidade de energia do Universo é quase igual a crítica. Essa é uma situação muito especial, pois se fosse um pouco maior ou um pouco menor que a unidade no início do Universo, hoje o seu valor seria muito diferente de 1, uma vez que o mesmo é função do tempo. Isso implica num ajuste finíssimo do parâmetro de densidade no início do Universo para que o seu valor seja compatível com o que é observado hoje, o que realmente é algo bastante artificial em virtude desse caráter altamente instável de  $\Omega$ .

## 4.2 Cosmologia Inflacionária

A Teoria da Inflação proposta em 1981 por Alan Guth surge como alternativa para explicar os problemas do horizonte e planura. A ideia central é que o Universo sofreu uma expansão muito rápida em um período de tempo muito curto, durante o qual o fator de escala foi acelerado exponencialmente [4]. De acordo com a teoria, tal expansão foi provocada pela presença de um campo escalar relacionado à energia de vácuo conhecido como *ínflaton*. Acredita-se que em algum momento a energia

cinética do *ínflaton* torna-se pequena e a maior parte da energia fica armazenada em seu potencial. Esta energia possui pressão negativa e como consequência, provoca a expansão acelerada muito grande em curto intervalo de tempo [6, 14, 21, 27].

O fato de propor o campo escalar (*ínflaton*) como gerador da inflação, não é apenas para se obter um estágio acelerado do Universo e resolver os problemas da planura e horizonte, mas também fornecer um mecanismo para a geração de partículas e da radiação, bem como outro mecanismo para a geração das perturbações primordiais cosmológicas.

### 4.3 Teoria de Campo Escalar em Cosmologia

O campo escalar, associado a uma transição de fase, responde pela pressão negativa que acelera a expansão do Universo primordial. Sendo assim, introduzindo a teoria de campo escalar em cosmologia, através do tensor energia-momento, pode-se obter a densidade de energia e a pressão e assim relacionar o campo escalar com as equações de Friedmann. Portanto, iremos utilizar o tensor energia-momento definido por [28]:

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_{\mu} \phi} \partial_{\nu} \phi - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}. \quad (4.3.1)$$

que obedece a lei de conservação, pois utilizando as equações de movimento podemos verificar explicitamente que este tensor energia-momentum possui essa característica, ou seja

$$\partial_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0. \quad (4.3.2)$$

Substituindo a equação de um campo escalar real na Equação (4.3.1), obtemos o tensor energia-momentum para um campo escalar descrito por:

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (4.3.3)$$

em que  $\mathcal{L}$  é a lagrangeana padrão de campos escalares, definida por [11, 28, 29, 30]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi). \quad (4.3.4)$$

Substituindo a Equação (4.3.4) em (4.3.3) temos:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (4.3.5)$$

Fazendo  $\mu = 0$ ,  $\nu = 0$  e considerando  $\phi = \phi(t)$  temos:

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (4.3.6)$$

Como o tensor energia-momento possui componente  $T_{00} = \rho$ , assim, comparando com a Equação (4.3.6) iremos obter a densidade de energia que é dada por:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (4.3.7)$$

Agora substituindo  $\mu = 1$  e  $\nu = 1$ , teremos a componente  $T_{11}$  do tensor energia-momento descrita por:

$$T_{11} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - V(\phi). \quad (4.3.8)$$

Temos que as componentes  $T_{11} = p_1$ ;  $T_{22} = p_2$ ;  $T_{33} = p_3$ , mas como a pressão é constante, então:  $p_1 = p_2 = p_3 = p$  logo, comparando com a Equação (4.3.7) encontramos que a pressão é dada por:

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.3.9)$$

A partir da primeira equação de Friedmann e da expressão da densidade de energia  $\rho$ , obteremos a seguinte equação:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (4.3.10)$$

Para a segunda equação de Friedmann, temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-8\pi G}{3}\left[\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right]. \quad (4.3.11)$$

Com a equação da conservação de energia para a métrica de FRW de um fluido perfeito, representada pela Equação (3.3.42) e substituindo os valores de densidade e pressão encontrados, iremos obter que:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0, \quad (4.3.12)$$

que é a equação de movimento da partícula que governa a evolução temporal do campo escalar. Chamando  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , logo a Equação (4.3.12) torna-se:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.3.13)$$

Em que  $H$  representa a taxa relativa de crescimento do Universo, ou seja, taxa de expansão conhecida como sendo o parâmetro de Hubble. Percebe-se que o parâmetro de Hubble atua como um termo de atrito [31].

Da Equação (4.3.13) do movimento da partícula podemos analisar a evolução temporal do campo escalar, pois de acordo com o princípio cosmológico, o Universo é homogêneo e isotrópico, portanto varia somente como função do tempo, ou seja,  $\phi = \phi(t)$ . Assim a Equação (3.2.28), para  $k = 0$ , torna-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (4.3.14)$$

Na equação acima, se  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  teremos que  $\rho = V(\phi_0)$  e  $p = -V(\phi_0)$ , então podemos obter um regime de aceleração positiva quando a pressão for negativa, onde  $p = -\rho$  e percebemos que de acordo com a equação da pressão de um fluido perfeito e da densidade de energia esta condição é satisfeita desde que o termo cinético permaneça subdominante, sendo desprezível com relação ao termo potencial. Com esta condição, o potencial escalar torna-se máximo, e como a expansão é acelerada, o potencial deve variar lentamente nesse período. Logo teremos que  $V \approx \text{constante}$ , ou  $\frac{\partial V}{\partial \phi} = \xi$ , onde  $\xi$  é um valor muito pequeno. Essa aproximação é conhecida como aproximação de slow-roll (rolamento lento), caracterizando uma expansão acelerada. No regime slow-roll,  $\dot{\phi} \approx \text{constante}$  e  $\ddot{\phi} = 0$  de tal forma que a Equação (4.3.12) pode ser escrita como [6, 7, 14, 27]:

$$3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.3.15)$$

Como  $V \approx \text{constante}$ , então a equação de Friedmann torna-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} V_0, \quad (4.3.16)$$

onde obtemos:

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} t}. \quad (4.3.17)$$

Assim, percebe-se que independente da forma do potencial, a aproximação slow-roll sempre fornecerá uma solução exponencial de tal forma que  $p = -\rho = -V$  semelhante ao que ocorre no modelo para o Universo dominado pela constante cosmológica, que corresponde ao modelo de de Sitter [32]. Neste período o ínfaton evoluirá do estado de falso vácuo para o estado de vácuo verdadeiro quando  $\frac{\partial V}{\partial \phi}$  não for pequeno, o que corresponde ao término do regime inflacionário em que o potencial chega ao seu mínimo e o termo cinético não é mais desprezível e, de acordo com a Equação (4.3.13), o ínfaton sofre oscilações amortecidas e perde energia, reaquecendo o Universo.

## 4.4 Modelos de potenciais

Vimos que o campo escalar (*ínfaton*) é submetido a um potencial  $V(\phi)$ . Nesta seção iremos apresentar alguns modelos de potenciais, seguindo alguns procedimentos matemáticos, que viabilizem analisar o comportamento do fator de escala e do parâmetro de desaceleração para cada modelo.

### 4.4.1 Modelo de campo escalar: Potencial quadrático

Considere o modelo mais comum de campo escalar ( $\phi$ ) com massa ( $m$ ) e com densidade de energia potencial conforme segue [25, 27, 28]

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (4.4.18)$$

Substituindo a Equação (4.4.18) na equação que governa a evolução temporal, teremos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (4.4.19)$$

ou

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \quad (4.4.20)$$

Em que o termo  $3H\dot{\phi}$ , é interpretado como um termo de atrito.

Nesse caso, a primeira equação de Friedmann, considerando a aproximação slow-roll e o espaço com curvatura nula, apresenta-se da seguinte forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}[V(\phi)], \quad (4.4.21)$$

que leva a

$$H = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}m\phi. \quad (4.4.22)$$

Tendo em vista que estamos considerando o regime slow-roll, que significa que o campo escalar move-se muito lentamente como uma bola em um líquido viscoso [8], temos que o termo de atrito  $3H\dot{\phi}$  domina sobre o termo de aceleração  $\ddot{\phi}$  e a condição  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  torna-se válida. Sendo assim, a Equação (4.4.19), torna-se:

$$3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \quad (4.4.23)$$

Agora, substituindo a Equação (4.4.22) em (4.4.23), produz

$$\dot{\phi} = -\frac{m}{2\sqrt{3\pi G}}, \quad (4.4.24)$$

em que obtemos:

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{m}{2\sqrt{3\pi G}}t. \quad (4.4.25)$$

A Figura 4.1 apresenta o comportamento do campo escalar  $\phi(t)$ .

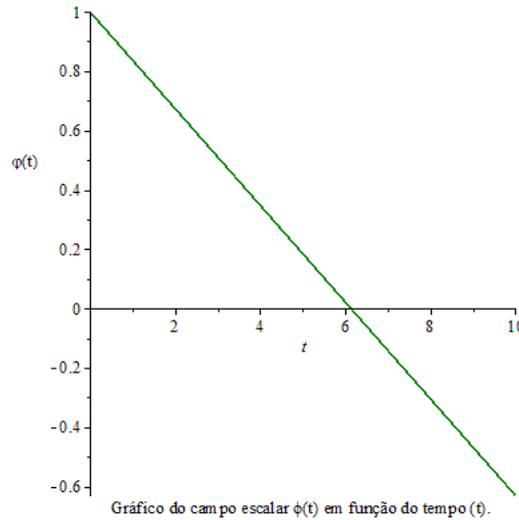


Figura 4.1: Evolução do campo escalar  $\phi(t)$  para o modelo de potencial quadrático.

Substituindo a Equação (4.4.25) em (4.4.22), podemos determinar o fator de escala  $a(t)$  para esse campo, ou seja

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m \left(\phi_0 - \frac{m}{2\sqrt{3\pi G}} t\right) \quad (4.4.26)$$

em que

$$\left(\frac{da}{adt}\right) = 2m\sqrt{\frac{\pi G}{3}} \phi_0 - \frac{m^2}{3} t, \quad (4.4.27)$$

obtemos:

$$a(t) = a_0 e^{2/3 m \sqrt{3\pi G} \phi_0 t - 1/3 m^2 t^2}. \quad (4.4.28)$$

A Figura 4.2 apresenta o comportamento do fator de escala para o campo  $\phi$ .

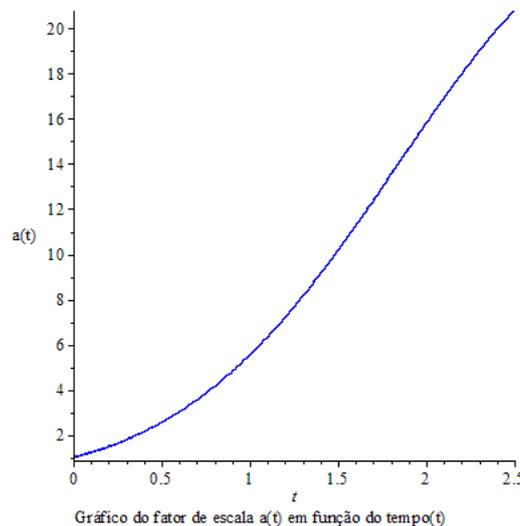


Figura 4.2: Evolução do fator de escalar  $a(t)$  para o modelo potencial quadrático.

Analisando o gráfico da Figura 4.2 percebe-se que o fator de escala  $a(t)$  cresce exponencialmente, apresentando dessa forma comportamento que, para tempos suficientemente curtos, descreve um modelo de Universo dominado pela constante cosmológica conhecido como modelo de de Sitter [7]. Porém, para tempos suficientemente longos o Universo tende a desacelerar.

O parâmetro de desaceleração é determinado utilizando a Equação (4.4.28) e calculando suas respectivas derivadas, conforme apresenta a Equação (3.4.71). Assim,

teremos que:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1/2 \frac{6\pi G \phi_0^2 - 4m\sqrt{3}\sqrt{\pi}\sqrt{G}\phi_0 t + 2m^2 t^2 - 3}{\left(\sqrt{3}\sqrt{\pi}\sqrt{G}(\phi_0) - mt\right)^2}. \quad (4.4.29)$$

A Figura 4.3 descreve o comportamento de  $q(t)$ , ou seja, do parâmetro de desaceleração.

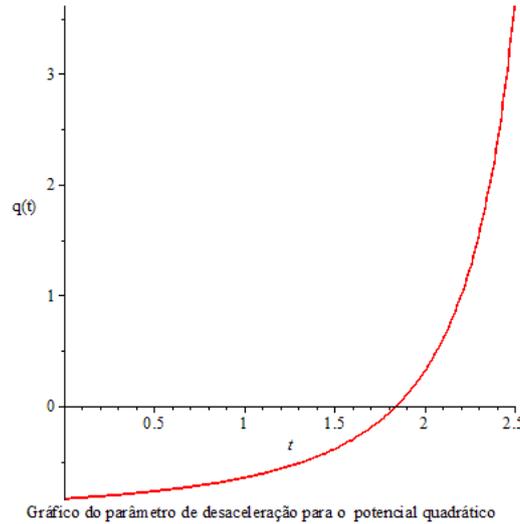


Figura 4.3: Comportamento do parâmetro de desaceleração  $q(t)$  para o modelo potencial quadrático.

A Figura 4.4 representa em conjunto, tanto o fator de escala, quanto o parâmetro de desaceleração para este caso. Observa-se que na medida que o fator de escala cresce exponencialmente, o parâmetro de desaceleração permanece negativo, ou seja,  $q(t) < 0$  e quando o fator de escala decresce o parâmetro de desaceleração torna-se positivo. Assim, para  $t = 0..1.8$ , o modelo de potencial utilizado indica um período de expansão acelerada do Universo, caracterizando a inflação primordial. Portanto, este potencial satisfaz o modelo teórico de de Sitter.

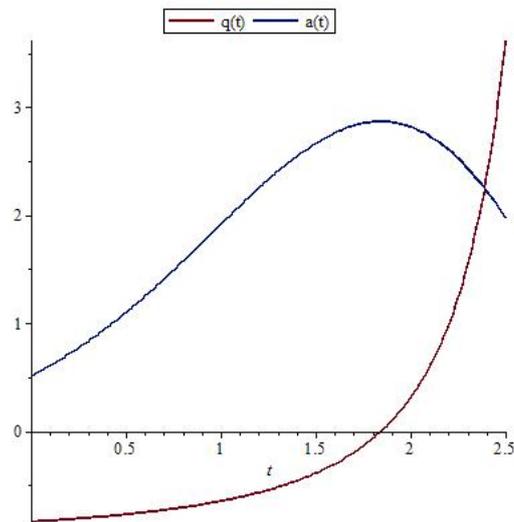


Figura 4.4: Comportamento do fator de escala  $a(t)$  e do parâmetro de desaceleração  $q(t)$  para o modelo potencial quadrático.

#### 4.4.2 Modelo de campo escalar: Potencial tipo cosseno

Para o modelo de potencial tipo cosseno, temos a seguinte configuração [25, 33]:

$$V(\phi) = C \cos^2 \beta \phi. \quad (4.4.30)$$

Em que  $C$  e  $\beta$  são constantes. Então, seguindo os mesmos procedimentos do modelo anterior, a equação de movimento do campo escalar, no regime slow-roll, se apresenta como segue

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.4.31)$$

Nesse caso, teremos:

$$3H\dot{\phi} + \frac{C\partial(\cos^2 \beta \phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (4.4.32)$$

Daí

$$3H\dot{\phi} - C\beta \sin(2\beta\phi) = 0. \quad (4.4.33)$$

Relacionando o potencial  $V(\phi) = C \cos^2 \beta \phi$ , com a Equação (3.2.28), resulta em:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} |\cos \beta \phi| \quad (4.4.34)$$

que, substituindo na Equação (4.4.33), produz:

$$3\left(\sqrt{\frac{8\pi GC}{3}}|\cos \beta\phi|\right)\dot{\phi} - C\beta \sin 2\beta\phi = 0, \quad (4.4.35)$$

sendo

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{C\beta \sin 2\beta\phi}{3\sqrt{\frac{8\pi GC}{3}}|\cos \beta\phi|}, \quad (4.4.36)$$

denominando

$$X = \frac{3\sqrt{\frac{8\pi GC}{3}}}{C\beta} \quad (4.4.37)$$

temos que:

$$\frac{X|\cos \beta\phi|}{2 \sin \beta\phi \cos \beta\phi} d\phi = dt. \quad (4.4.38)$$

Nessa situação, iremos considerar o intervalo  $\beta\phi$ , tal que  $|\cos \beta\phi| = \cos \beta\phi$ , o que implica em  $t < t_0$ . Que resulta em:

$$\phi = \frac{2}{\beta} \arctan\left(e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{X}}\right). \quad (4.4.39)$$

A Figura 4.5 apresenta o comportamento de  $\phi(t)$ , para o modelo de potencial tipo cosseno.

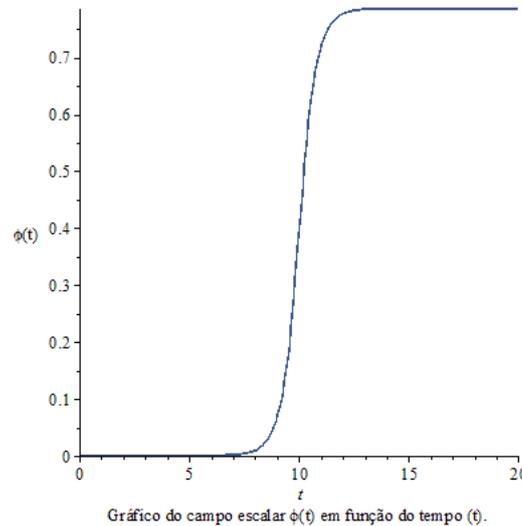


Figura 4.5: Evolução do campo escalar  $\phi(t)$  para o modelo de potencial tipo cosseno.

O fator de escala  $a(t)$ , para este modelo, é obtido substituindo  $\phi$  na Equação (4.4.34).

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} \left| \cos \beta \left( \frac{2}{\beta} \arctan \left( e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{X}} \right) \right) \right|, \quad (4.4.40)$$

em que obtém-se:

$$a(t) = e^{-2/3 X \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\left(-e^{2\frac{\beta t_0}{X}} + e^{2\frac{\beta t}{X}}\right)^2}{\left(e^{2\frac{\beta t_0}{X}} + e^{2\frac{\beta t}{X}}\right)^2}} CG \left( e^{2\frac{\beta t_0}{X}} + e^{2\frac{\beta t}{X}} \right) \sqrt{6} \left( -\ln \left( e^{2\frac{\beta t_0}{X}} + e^{2\frac{\beta t}{X}} \right) + \ln \left( e^{\frac{\beta t}{X}} \right) \right) \frac{1}{\beta \left( -e^{2\frac{\beta t_0}{X}} + e^{2\frac{\beta t}{X}} \right)}. \quad (4.4.41)$$

Admitindo  $C = 1, G = 1, \beta = 1, X = 1, t_0 = 10$ , podemos observar o seguinte comportamento para o fator de escala de acordo com a Figura 4.6.

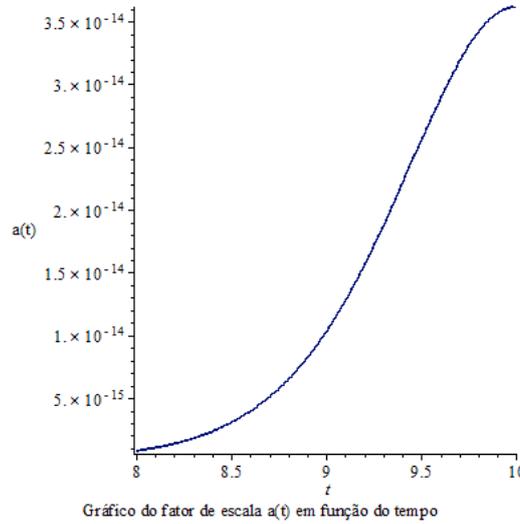


Figura 4.6: Evolução do fator de escala  $a(t)$  para o modelo de potencial tipo cosseno.

Comparando o gráfico da Figura 4.6 com o gráfico da Figura 4.2 observa-se que a evolução do fator de escala  $a(t)$  para os dois modelos de potenciais cresce exponencialmente em um período de tempo muito curto, indicando a fase inflacionária. No entanto, no caso do potencial tipo cosseno, percebe-se que a expansão acelerada do Universo ocorre de forma mais rápida.

Quanto ao parâmetro de desaceleração, temos que:

$$\begin{aligned}
q(t) = & -1/6 \left( \left( -\sqrt{\pi}\sqrt{6}e^{6t_0} + 3e^{4t_0+2t}\sqrt{6}\sqrt{\pi} - 3e^{2t_0+4t}\sqrt{6}\sqrt{\pi} + e^{6t}\sqrt{6}\sqrt{\pi} \right. \right. \\
& \left. \left. + 6e^{4t_0+2t}\sqrt{\frac{(e^{2t_0}-e^{2t})^2}{(e^{2t_0}+e^{2t})^2}} + 6e^{2t_0+4t}\sqrt{\frac{(e^{2t_0}-e^{2t})^2}{(e^{2t_0}+e^{2t})^2}} \right) \sqrt{6} \right) \\
& \frac{1}{(-e^{6t_0}+3e^{4t_0+2t}-3e^{2t_0+4t}+e^{6t})\sqrt{\pi}}.
\end{aligned} \tag{4.4.42}$$

A Figura 4.7 apresenta o comportamento do parâmetro de desaceleração para o modelo potencial tipo cosseno.

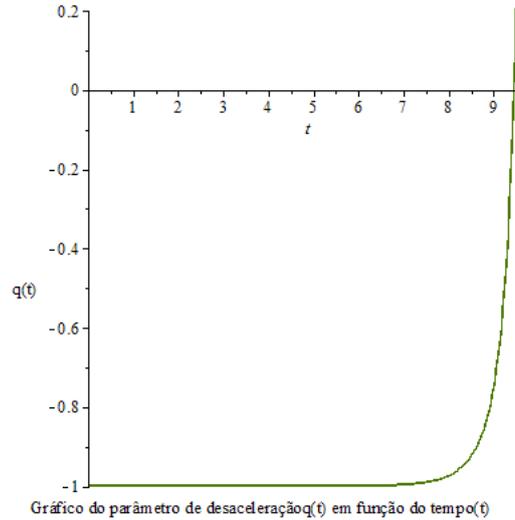


Figura 4.7: Comportamento do parâmetro de desaceleração  $q(t)$  para o modelo potencial tipo cosseno.

Observando o gráfico da Figura 4.7 percebe-se que, para  $t < t_0$ , o parâmetro de desaceleração assume o valor  $q(t) = -1$  o que indica um período de expansão acelerada do Universo neste intervalo.

### 4.4.3 Modelo de campo escalar: Potencial tipo seno

O modelo de potencial tipo seno, é representado pela seguinte expressão:

$$V(\phi) = C \sin^2 \beta \phi. \tag{4.4.43}$$

Em que  $C$  e  $\beta$  são constantes. Seguindo os mesmos procedimentos dos modelos anteriores, a equação de movimento do campo escalar, no regime slow-roll, se apresenta

da seguinte forma:

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.4.44)$$

Nesse caso, teremos

$$3H\dot{\phi} + \frac{C\partial(\sin^2 \beta\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (4.4.45)$$

ou

$$3H\dot{\phi} + C\beta \sin(2\beta\phi) = 0. \quad (4.4.46)$$

Substituindo o potencial  $V(\phi) = C \sin^2 \beta\phi$ , na Equação (3.2.28), temos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} |\sin \beta\phi|, \quad (4.4.47)$$

que, substituindo na Equação (4.4.46), produz

$$3\left(\sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} |\sin \beta\phi|\right)\dot{\phi} + C\beta \sin 2\beta\phi = 0 \quad (4.4.48)$$

ou

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = -\frac{C\beta \sin 2\beta\phi}{3\sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} |\sin \beta\phi|}, \quad (4.4.49)$$

denominando  $A$  como sendo

$$A = \frac{3\sqrt{\frac{8\pi GC}{3}}}{C\beta} \quad (4.4.50)$$

então,

$$\frac{A|\sin \beta\phi|}{2 \sin \beta\phi \cos \beta\phi} d\phi = -dt. \quad (4.4.51)$$

Nessa situação, iremos considerar o intervalo  $\beta\phi$ , tal que  $|\sin \beta\phi| = \sin \beta\phi$ , o que implica em  $t < t_0$ . Portanto, resulta que:

$$\phi(t) = \frac{2}{\beta} \operatorname{arccot}(e^{-\frac{2\beta(t-t_0)}{A}}). \quad (4.4.52)$$

A Figura 4.8 apresenta o comportamento do campo  $\phi(t)$  para o modelo potencial tipo seno. Admitindo  $\beta = 1$ ,  $A = 1$ ,  $t_0 = 10$ , observa-se o seguinte comportamento para o campo escalar:

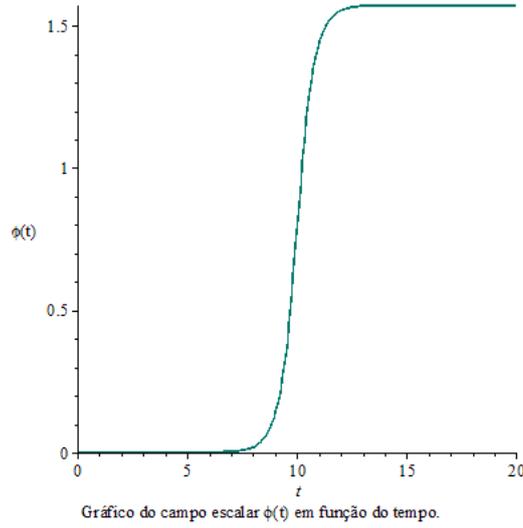


Figura 4.8: Evolução do campo escalar  $\phi(t)$  para o modelo de potencial tipo seno.

Para determinar o fator de escala  $a(t)$ , vamos substituir o campo escalar  $\phi(t)$  encontrado na Equação (4.4.47), assim:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} \left| \sin \beta \left( \frac{2}{\beta} \operatorname{arccot} \left( e^{-\frac{2\beta(t-t_0)}{A}} \right) \right) \right|, \quad (4.4.53)$$

ou

$$\frac{da}{a} = \sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} \left| \sin \beta \left( \frac{2}{\beta} \operatorname{arccot} \left( e^{-\frac{2\beta(t-t_0)}{A}} \right) \right) \right| dt, \quad (4.4.54)$$

denominando  $c$ , como sendo

$$c = \sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} = \text{cte}, \quad (4.4.55)$$

substituindo na Equação (4.4.54) e integrando, temos:

$$a(t) = e^{-1/2 icA \ln \left( e^{-2 \frac{\beta(t-t_0)}{A}} + i \right)^{\beta^{-1} + 1/2 icA \ln \left( e^{-2 \frac{\beta(t-t_0)}{A}} - i \right)^{\beta^{-1}}}. \quad (4.4.56)$$

A Figura 4.9 apresenta o comportamento do fator de escala para esse modelo.

Assumindo  $\beta = 1$ ,  $A = 1$ ,  $c = 1$ ,  $t_0 = 10$ , teremos:

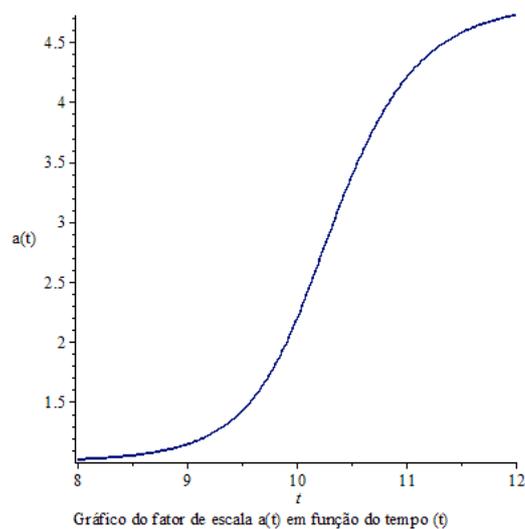


Figura 4.9: Evolução do fator de escala  $a(t)$  para o modelo de potencial tipo seno.

Comparando o gráfico da Figura 4.9 com o gráfico da Figura 4.6, percebe-se que a evolução do fator de escala  $a(t)$ , para os modelos de potenciais seno e cosseno, ocorre de forma semelhante.

Para o parâmetro de desaceleração, deve-se utilizar a Equação (3.4.71), em que se obtém:

$$q(t) = - \left( e^{-4t+4t_0} + e^{-2t+2t_0} - 1 \right) e^{2t-2t_0}. \quad (4.4.57)$$

A Figura 4.10 apresenta o comportamento do parâmetro de desaceleração.

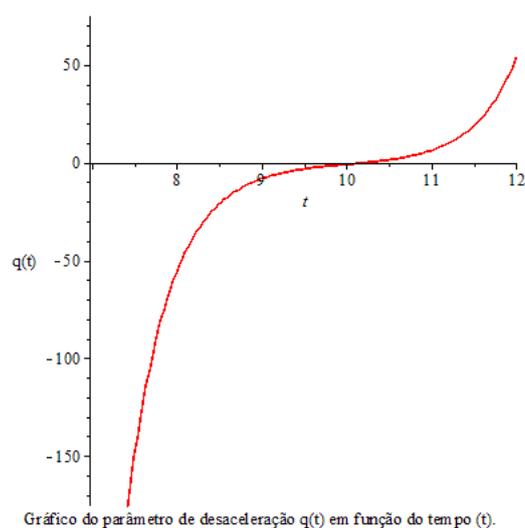


Figura 4.10: Comportamento do parâmetro de desaceleração  $q(t)$  para o modelo de potencial tipo seno.

Analisando a Figura 4.10 percebe-se que, para  $t < t_0$ ,  $q(t) < 0$  o que indica uma fase do Universo em expansão acelerada.

A Figura 4.11 apresenta os comportamentos, em conjunto, do fator de escala e do parâmetro de desaceleração. A análise conjunta indica um período de aceleração do Universo em  $t < t_0$ .

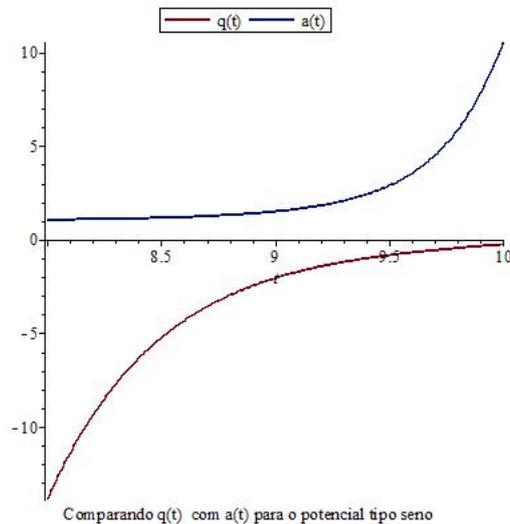


Figura 4.11: Comparando o parâmetro de desaceleração  $q(t)$  com o fator de escala  $a(t)$ , para o modelo de potencial tipo seno.

#### 4.4.4 Modelo de campo escalar: Potencial tipo quártico com coeficiente dependente do tempo

O modelo de potencial tipo quártico, que vamos utilizar, é representado da seguinte forma [34]:

$$V(\phi) = \lambda(t)\phi^4. \quad (4.4.58)$$

Em que  $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$ , é denominada constante de acoplamento, Substituindo o potencial na equação de movimento da partícula, considerando o regime slow-roll, obtemos:

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial(\lambda(t)\phi^4)}{\partial\phi} = 0. \quad (4.4.59)$$

Assim,

$$3H\dot{\phi} + 4\lambda(t)\phi^3 = 0. \quad (4.4.60)$$

Nesse caso, a primeira equação de Friedmann, considerando a aproximação slow-roll, apresenta-se da seguinte forma:

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G(t)}{3}} \lambda(t) \phi^4. \quad (4.4.61)$$

Sendo  $G(t)$  um parâmetro que varia com o tempo [35, 36]. Portanto, podemos assumir  $G(t) = \frac{G_0 \lambda_0}{\lambda(t)}$ . Assim, a Equação (4.4.61), torna-se:

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G_0 \lambda_0}{3}} \phi^2, \quad (4.4.62)$$

que substituindo na Equação (4.4.60), produz:

$$3 \left( \sqrt{\frac{8\pi G_0 \lambda_0}{3}} \phi^2 \right) \dot{\phi} = -4\lambda(t) \phi^3, \quad (4.4.63)$$

como  $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$ , nos leva a:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{-2(\lambda_0 + \lambda_1 t)}{\sqrt{6\pi G_0 \lambda_0}} dt, \quad (4.4.64)$$

em que obtemos:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-1/3 \frac{\sqrt{6}(\lambda_0 t + 1/2 \lambda_1 t^2)}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}}. \quad (4.4.65)$$

A Figura 4.12 apresenta a evolução do campo escalar  $\phi(t)$ , considerando  $G_0 = 1$ ,  $\phi_0 = 1$ ,  $\lambda_0 = 1$  e  $\lambda_1 = -0.12$ .

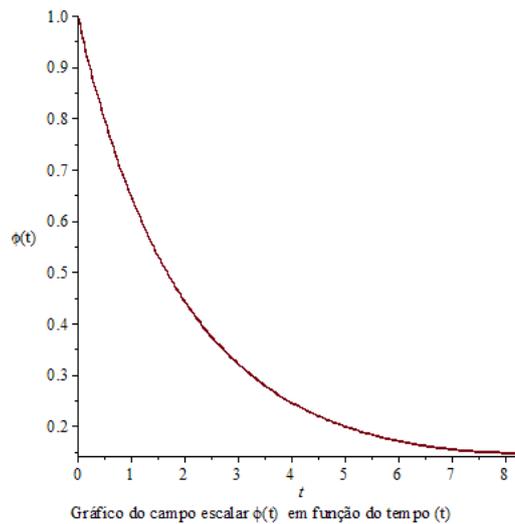


Figura 4.12: Evolução do campo escalar  $\phi(t)$  para o modelo de potencial tipo quártico.

A Figura 4.12 indica que a evolução do campo escalar  $\phi(t)$  decresce exponencialmente com o tempo.

Neste caso do modelo de potencial tipo quártico, o fator de escala é dado por:

$$\left(\frac{da}{a}\right) = \sqrt{\frac{8\pi G_0 \lambda_0}{3}} \phi^2 dt, \quad (4.4.66)$$

substituindo o campo escalar  $\phi(t)$  descrito pela Equação (4.4.65) e aplicando a integral, podemos determinar o fator de escala, que é dado por:

$$a(t) = a_0 \exp \left[ 1/3 \sqrt{6} \sqrt{\pi G_0 \lambda_0} (\phi_0)^2 \sqrt{\pi} \exp \left( 1/3 \frac{\lambda_0 \sqrt{6} \sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}{\pi G_0 \lambda_1} \right) \sqrt{3} \operatorname{erf} \left( 1/3 \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{6} \lambda_1}}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}} t + 1/3 \lambda_0 \sqrt{6} \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{6} \lambda_1}}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}}} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{6} \lambda_1}}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}} \right]. \quad (4.4.67)$$

Em que  $\operatorname{erf}(x)$  é a função erro. Assumindo  $G_0 = 1$ ,  $\phi_0 = 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 = -0.12$  e  $t = 0 \dots \frac{25}{3}$ , obtemos o comportamento para o fator de escala  $a(t)$ , apresentado na Figura 4.13.

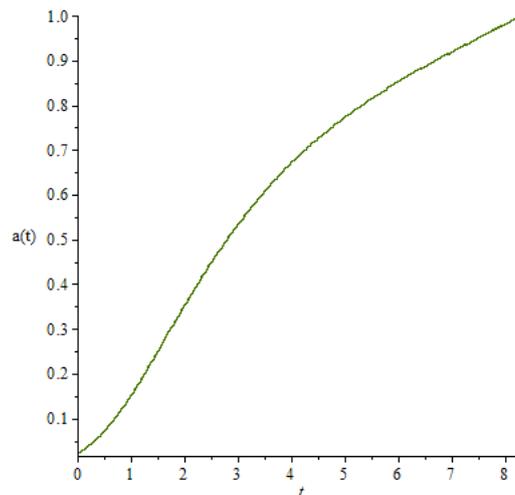


Gráfico do fator de escala  $a(t)$  em função do tempo  $(t)$  para  $t=0.25/3$ .

Figura 4.13: Evolução do fator de escala  $a(t)$  para o modelo de potencial tipo quártico.

Analisando a Figura 4.13, percebe-se que o fator de escala apresenta comportamento crescente. No entanto, nota-se que inicialmente cresce exponencialmente, após um certo tempo esse crescimento diminui e depois aumenta novamente. Para  $t > \frac{25}{3}$ , o comportamento do fator de escala é apresentado na Figura 4.14.

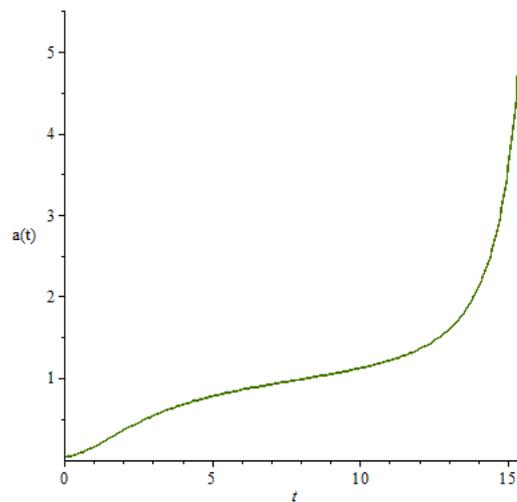


Gráfico do fator de escala  $a(t)$  em função do tempo ( $t$ ) para  $t > 25/3$ .

Figura 4.14: Evolução do fator de escalar  $a(t)$  para o modelo de potencial tipo quártico considerando  $t > \frac{25}{3}$ .

No gráfico da Figura 4.14, percebe-se que para  $t > \frac{25}{3}$ , o fator de escala apresenta divergência a partir de um determinado tempo, assim, o modelo de densidade de energia apresentado torna-se instável nessas circunstâncias. Isto porque para os valores de parâmetros utilizados, esse valor de tempo inverte o sinal de  $\lambda$  o que faz com que o potencial fique invertido, o que gera instabilidade.

No caso do parâmetro de desaceleração, este é dado por:

$$q(t) = \left( -\pi e^{-1/3 \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}t(\lambda_1 t + 2)}{\sqrt{\pi}}} + \lambda_1 t + 1 \right) e^{1/3 \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}t(\lambda_1 t + 2)}{\sqrt{\pi}}} \pi^{-1}. \quad (4.4.68)$$

Construindo o gráfico obtemos o seguinte comportamento para o parâmetro de desaceleração: (Figura 4.15).

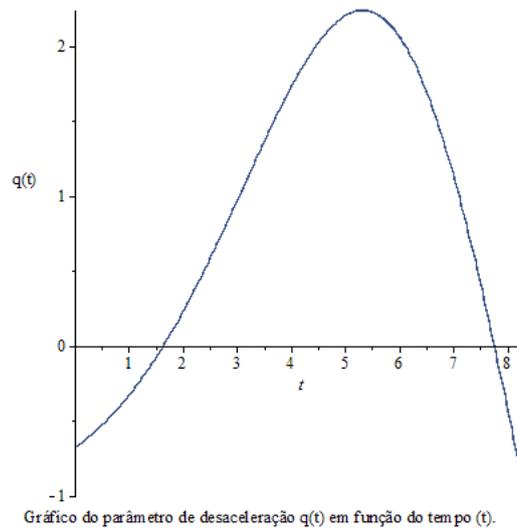


Figura 4.15: Comportamento do parâmetro de desaceleração  $q(t)$  para o modelo de potencial tipo quártico considerando  $t = 0 \cdot \frac{25}{3}$ .

Analisando o gráfico da Figura 4.15, percebe-se que existem regiões aceleradas e desaceleradas. Assim, apresenta inicialmente uma expansão acelerada do Universo (fase inflacionária), depois uma fase de desaceleração e posteriormente o Universo começa a se expandir de forma acelerada novamente. Esta última, podemos relacionar a fase atual do Universo, que de acordo com as observações, se encontra em uma nova fase de expansão acelerada.

Podemos analisar também, neste modelo, o comportamento da equação de estado cuja expressão pode ser descrita por [35]:

$$\omega(t) = \frac{1}{3} \left( 2q(t) - 1 \right), \quad (4.4.69)$$

como o parâmetro de desaceleração é dado pela Equação (4.4.68), obtemos que:

$$\omega(t) = -2/3 \left( \pi e^{-1/3 \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}t(\lambda_1 t + 2)}{\sqrt{\pi}}} - \lambda_1 t - 1 \right) e^{1/3 \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}t(\lambda_1 t + 2)}{\sqrt{\pi}}} \pi^{-1} - 1/3. \quad (4.4.70)$$

Assumindo os mesmos valores atribuídos as constantes, anteriormente, temos que o comportamento da equação de estado é dado pelo gráfico da Figura 4.16.

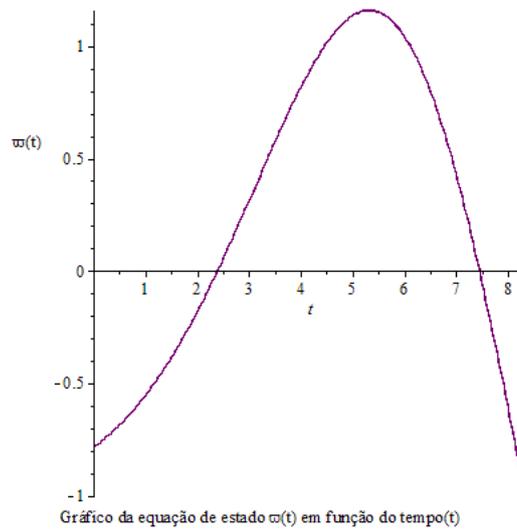


Figura 4.16: Comportamento da equação de estado  $\omega(t)$  em função do tempo para  $t = 0 \dots \frac{25}{3}$ .

Analisando o gráfico da Figura 4.16, percebemos que apresenta os três tipos de fluidos cosmológicos, então no caso em que  $\omega(t) = 0$  identificamos o período dominado pela matéria, para  $\omega(t) = \frac{1}{3}$  temos o período dominado pela radiação e em  $\omega(t) = -1$  quem domina é a constante cosmológica ( $\Lambda$ ) [37]. Para  $t > \frac{25}{3}$ , temos o gráfico apresentado na Figura 4.17.

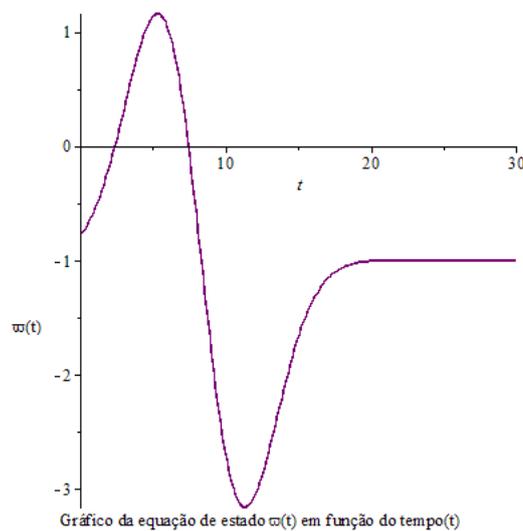


Figura 4.17: Comportamento da equação de estado  $\omega(t)$  em função do tempo para  $t > \frac{25}{3}$ .

Neste caso, observamos que a constante cosmológica ( $\Lambda$ ) é quem predomina, carac-

terizando dessa forma um modelo de Universo de de Sitter [7].

Podemos ainda escrever a densidade de energia e a pressão em termos do modelo de potencial tipo quadrático apresentado, assim  $\rho$  e  $p$  são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \lambda(t)\phi^4 \\ p &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \lambda(t)\phi^4.\end{aligned}\tag{4.4.71}$$

Calculando a derivada de  $\phi(t)$  e fazendo as devidas substituições nas relações acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{1}{3}\phi_0^2(\lambda_1 t + \lambda_0)^2 \left( e^{-1/3 \frac{\sqrt{6}(1/2 t^2 \lambda_1 + \lambda_0 t)}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}} \right)^2 \pi^{-1} G_0^{-1} \lambda_0^{-1} \\ &+ (\lambda_1 t + \lambda_0) \phi_0^4 \left( e^{-1/3 \frac{\sqrt{6}(1/2 t^2 \lambda_1 + \lambda_0 t)}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}} \right)^4.\end{aligned}\tag{4.4.72}$$

Cuja Figura 4.18 apresenta o comportamento da densidade, ou seja,  $\rho(t)$ .

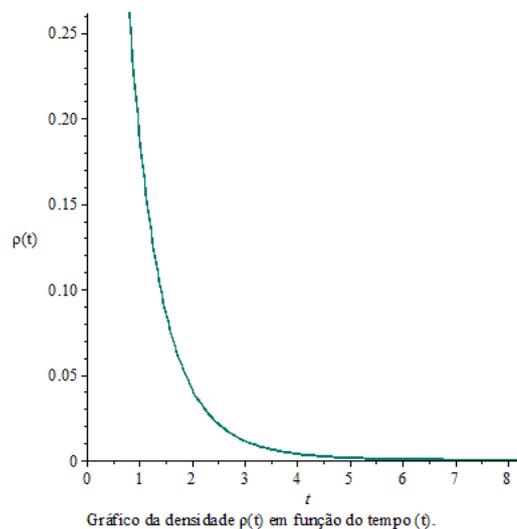


Figura 4.18: Comportamento da densidade  $\rho(t)$  em função do tempo  $(t)$  para  $t = 0 \dots \frac{25}{3}$ .

Observando o gráfico da Figura 4.18 percebe-se que, para a fase do Universo em expansão acelerada, a densidade  $\rho(t)$  diminui com o passar do tempo. Para a pressão

tem-se:

$$p(t) = \frac{1}{3} \phi_0^2 (\lambda_1 t + \lambda_0)^2 \left( e^{-1/3 \frac{\sqrt{6}(1/2 t^2 \lambda_1 + \lambda_0 t)}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}} \right)^2 \pi^{-1} G_0^{-1} \lambda_0^{-1} - (\lambda_1 t + \lambda_0) \phi_0^4 \left( e^{-1/3 \frac{\sqrt{6}(1/2 t^2 \lambda_1 + \lambda_0 t)}{\sqrt{\pi G_0 \lambda_0}}} \right)^4. \quad (4.4.73)$$

A Figura 4.19 apresenta o comportamento da pressão em função do tempo para o modelo tipo potencial quártico, para o intervalo  $t = 0 \cdot \frac{25}{3}$ .

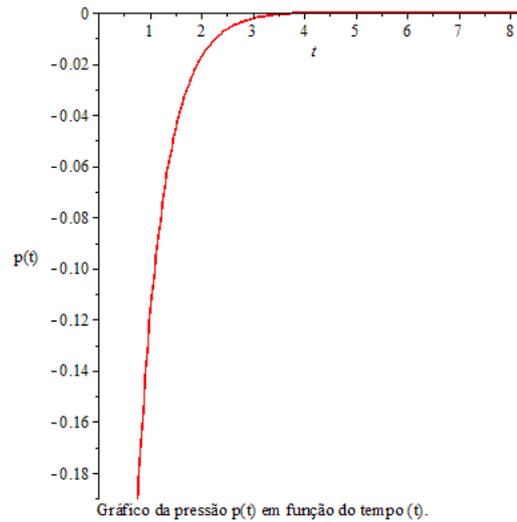


Figura 4.19: Comportamento da pressão  $p(t)$  em função do tempo ( $t$ ) para  $t = 0 \cdot \frac{25}{3}$ .

A Figura 4.19 indica que a pressão  $p(t)$  assume valores negativos para a fase do Universo em expansão acelerada.

Nesta faixa de tempo observamos que não existem singularidades futuras no fator de escala, densidade de pressão e na densidade de energia.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho propomos alguns modelos de potenciais, dentre os quais: o potencial quadrático, o tipo cosseno, o tipo seno e o potencial tipo quártico com coeficiente dependente do tempo, que aplicados as equações de Friedmann, podemos analisar a fase inflacionária. Sendo assim, observamos através do comportamento do fator de escala e do parâmetro de desaceleração que a evolução do Universo apresenta períodos de aceleração e de desaceleração.

Para os modelos de potenciais tipo quadrático, tipo cosseno e tipo seno, considerando o espaço plano, verificamos um período em que o Universo se expande aceleradamente até um determinado tempo, denominado de período inflacionário. Nessa fase quem domina a evolução do Universo é o campo escalar (*ínflaton*) representado pelo seu potencial. Verificamos ainda que os resultados obtidos satisfazem o modelo cosmológico de de Sitter.

No caso do modelo potencial tipo quártico com coeficiente dependente do tempo, identificamos um comportamento mais dinâmico da evolução do Universo. Inicialmente verificamos uma expansão acelerada (fase inflacionária), depois uma desaceleração e por fim observamos que o Universo começa a acelerar novamente. Esta última, podemos relacionar à fase atual do Universo, que de acordo com as observações, se encontra em uma nova fase de expansão acelerada.

Identificamos com o modelo do tipo quártico, através da equação de estado,

os períodos dominados pela matéria, radiação e constante cosmológica. Já para a densidade de energia e pressão, observamos que nesta faixa de tempo não existem singularidades futuras.

Portanto, para esses modelos foi possível identificarmos as regiões de aceleração e desaceleração do Universo, descrevendo dessa forma a inflação primordial e ainda a atual fase de expansão do Universo, estando assim de acordo com as observações.

# Bibliografia

- [1] MARTINS, R. A. **O Universo: Teoria sobre sua Origem e Evolução**. São Paulo: Moderna, 1996.
- [2] SOUZA, R. E. **Introdução à Cosmologia**. Edusp, 2004.
- [3] Donald, P. **Particle Astrophysics**. Oxford University Press, 1st edition, 2005.
- [4] LIDDLE, A. **An Introduction to Modern Cosmology**. Wiley, 2st edition, 2003.
- [5] GUTH, A. H. **Phys. Rev D** 23, 347, (1981).
- [6] CARROL, S. **Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity**. Addison-Wesley, 2004.
- [7] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, 1992.
- [8] MUKHANOV, V. F. **Physical Foundations of Cosmology**. Cambridge University Press, 2005.
- [9] FIGUEIRÓ, M. F. **Inflação em Modelos de Gravidade Generalizada: Análise Dinâmica e Singularidades**. Tese de Doutorado, p.7, USP, 2009.
- [10] SAHNI, V.; STAROBINSKY, A. **Int. J. Mod. Phys. D** 15, 2105, (2006).
- [11] SANTOS, J. J. G. dos. **Tópicos em Cosmologia com Campos Escalares**. Tese de Doutorado, p.30, UFPB, 2011.

- [12] RIBAS, M. O. **Em Modelos Cosmológicos Acelerados com Campos Fermiônicos**. tese de Doutorado, 32, UFPA, 2008.
- [13] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. John Wiley e Sons, New York, 1972.
- [14] COLLINS, P. D. B.; MARTIN, A. D.; SQUIRES, E. J. **Particle Physics and Cosmology**. Wiley, 1989.
- [15] CARMELI, M. **Group Theory and General Relativity**. McGraw-Hill, 1977.
- [16] SPIEGEL, Murray R. **Análise Vetorial**. Rio de Janeiro: Editora Mc Graw Hill, 1979.
- [17] LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.
- [18] SCHUTZ, B. F. **First Course in General Relativity**. Cambridge University Press, 2st edition, 2009.
- [19] PAPAPETROU, A. **Lectures on General Relativity**. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [20] WALD, R. M. **General Relativity**. The University of Chicago Press, 1984.
- [21] DODELSON, S. **Modern Cosmology**. Academic Press, 2003.
- [22] OHANIAN, H. C. **Gravitation and Spacetime**. W.W. Norton e Company, 1976.
- [23] ISLAM, J. N. **An Introduction to Mathematical Cosmology**. Cambridge University Press, 1987.
- [24] SOUZA, R. C. **Em Modelos Cosmológicos pela Simetria de Noether**. Dissertação de Mestrado, p.7, UFPR, 2009.

- [25] NASCIMENTO, M. S. P. **Cosmologia Inflacionária Via Campos Escalares**. Dissertação de Mestrado, p.15, UFCG, 2010.
- [26] HORVARTH, J. E. [et.al]. **Cosmologia Física**. Editora Livraria da Física, 2009.
- [27] WEINBERG, S. **Cosmology**. Oxford University Press, 2008.
- [28] KAKU, M. **Quantum Field Theory A Modern Introduction**. Oxford University Press, 1993.
- [29] GOMES, M. O. C. **Teoria Quântica de Campos**. Edusp, 2002.
- [30] FILHO, K. S. O.; SARAIVA, M.F.O. **Astronomia e Astrofísica**. Editora Livraria da Física, 2004.
- [31] HARWING, S.; ISRAEL, W. **Three hundred years of gravitation**. Cambridge University Press, 1989.
- [32] BERRY, M. **Principles of Cosmology and Gravitation**. CUP, 1976.
- [33] MISNER, C. W.; THORNE, K.S; WHEELER, J.A. **Gravitation**. W.H. Freeman and Company São Francisco, 1970.
- [34] HAMADA, Y.; KAWAI, H.; ODA, K. y.; PARK, S. C. **Higgs inflation still alive**. ArXiv: 1403.5043V2, (2014).
- [35] DABROWSKI, M. P.; MAROSEK, K. **Regularizing cosmological singularities by varying physical constants**. ArXiv: 1207.4038V4, (2013).
- [36] RAY, S.; MUKHOPADHYAY, U.; CHOUDHURY, S. B. D. **Int. J. Mod. Phys. D** 16, 1791, (2007).
- [37] ALMEIDA, C. A. G.; ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. **Cosmologia inflacionária e Superluminal Neutrinos**. ArXiv: 1112.0300V1, (2011).

- [38] ANDRADE, L. N. **Introdução à Computação Algébrica com o Maple.**  
Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção textos Universitários, 2004.

# Apêndice A

## Princípio da Equivalência

A Relatividade Geral está fundamentada em dois princípios que descrevem o comportamento das leis físicas quando se refere ao estudo da gravitação. O primeiro é o da covariância, que afirma que não existe sistema preferencial e o segundo é o princípio da equivalência, segundo o qual estabelece que não existem testes, realizados por observadores locais, que os levem a diferenciar entre um campo gravitacional e um referencial acelerado, ou seja, sistema acelerado é fisicamente indistinguível, localmente, de um campo gravitacional [2]. Por exemplo, vamos admitir um referencial em queda livre em um campo gravitacional, um observador irá verificar que corpos de diferentes massas inerciais sofrem a mesma aceleração. De acordo com o princípio da equivalência, se este observador estivesse em um referencial acelerado, iria constatar o mesmo comportamento da situação anterior [2]. Ou seja, corpos em queda livre (sem interação eletromagnética, fraca ou forte) seguem trajetórias que dependem apenas das condições iniciais (posição e velocidade). Isto decorre pelo fato de que, experimentalmente no vácuo, as observações sugerem que a massa inercial é igual a massa gravitacional para qualquer corpo, constatando que todo corpo cai com a mesma aceleração, independente da estrutura e composição química [7, 15].

Considere  $M$  como sendo a massa da Terra,  $r$  seu raio e  $m_G$  a massa gravitacional de uma partícula de teste. Então, de acordo com a mecânica newtoniana, o módulo

da força gravitacional entre  $M$  e  $m_G$  será dado por

$$F = \frac{GMm_G}{r^2}. \quad (\text{A.1})$$

Sendo  $m_G$  a medida da intensidade de interação gravitacional entre os corpos, ou seja,  $m_G$  é uma fonte do campo gravitacional equivalente a uma “carga gravitacional”. Entretanto, pela segunda lei de Newton, uma força aplicada a um corpo é proporcional ao produto da sua massa inercial e da aceleração provocada no mesmo, então

$$F = m_I a, \quad (\text{A.2})$$

em que  $F$  é o módulo da força que age na partícula e  $m_I$  é a massa inercial da partícula de teste que mede a resistência que os corpos têm à mudança do seu estado de movimento. Logo, igualando a equação (A.1) com a equação (A.2) obtemos:

$$\frac{GMm_G}{r^2} = m_I a, \quad (\text{A.3})$$

ou ainda,

$$a = \frac{m_G}{m_I} \frac{GM}{r^2} = \text{cte}. \quad (\text{A.4})$$

A igualdade da massa gravitacional e inercial para todos os corpos, significa que um corpo em queda livre tem uma aceleração igual a aceleração gravitacional e podemos anular localmente os efeitos de um campo gravitacional com a escolha adequada de referenciais, já que todos os corpos estão sujeitos a uma mesma aceleração [2, 7].

## A.1 Tensor de Curvatura

O transporte paralelo de um vetor em torno de um circuito fechado em um espaço curvo levará a uma transformação do vetor [6, 7, 33]. Considere dois campos vetoriais  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  tais que  $[\bar{v}, \bar{w}]$ . Com as curvas integrais de  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  construímos um paralelogramo infinitesimal conforme indica a Figura (A.1).

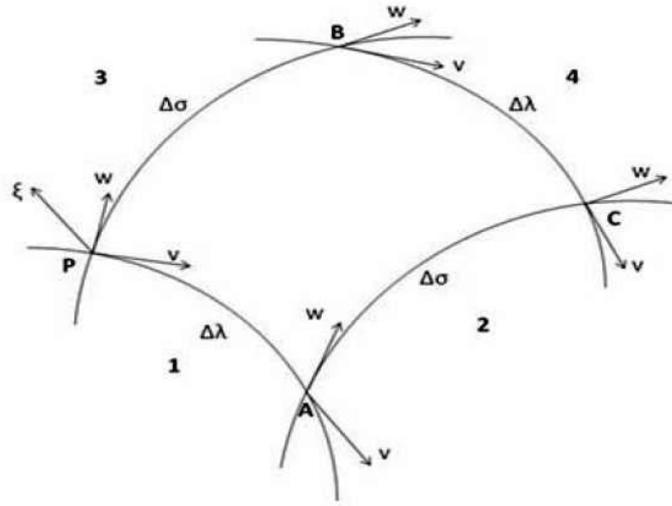


Figura A.1: Transporte paralelo de um vetor ao longo de um paralelogramo infinitesimal.

Para transportarmos um terceiro vetor  $\bar{\xi}$  ao longo deste paralelogramo devemos efetuar o transporte de  $\bar{\xi}_p$  até o ponto A ao longo do lado 1. Logo o vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva obedece à equação

$$\frac{d\xi^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \left( \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d\xi^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \left( \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\xi_A^{*\mu} - \xi_p^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda \quad (\text{A.7})$$

$$\xi_A^{*\mu} = \xi_p^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda \quad (\text{A.8})$$

onde  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha$  é calculado no ponto p.

Agora efetuando o segundo transporte de  $\xi_A^*$  do ponto A até o ponto C ao longo do lado 2 na curva vamos obter

$$\xi_c^{*\mu} = \xi_A^{*\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(A) \xi^{*\alpha} \bar{w}_A^\beta d\sigma, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X_A) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_p + \bar{v}d\lambda). \quad (\text{A.10})$$

Note que:  $x_A^\mu = x_p^\mu + v^\mu d\lambda$  portanto teremos que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X_A) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X_p) + \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} v^\gamma d\lambda. \quad (\text{A.11})$$

em que  $\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma}$  é calculado no ponto p.

Logo ao longo do caminho  $1 \rightarrow 2$  vamos ter:

$$\begin{aligned} \xi_c^{*\mu} &= (\xi_p^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda) - \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X_p) + \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} v^\gamma d\lambda \right) \times \\ &(\xi_p^\alpha - \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta v^\rho d\lambda) \left( w_p^\beta(X_p) + \frac{\partial w_p^\beta}{\partial x^\kappa} v^\kappa d\lambda \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Agora vamos efetuar o transporte de  $\bar{\xi}_p$  de P até B pelo lado 3. Com isso vamos obter:

$$\xi_B^* = \xi_P^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \bar{w}^\beta d\omega. \quad (\text{A.13})$$

Transportando o vetor  $\xi_B^*$  de B até C ao longo do lado 4 vamos ter

$$\xi_c^* = \xi_P^{*\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^{*\alpha} v^\beta d\lambda. \quad (\text{A.14})$$

Mas sabemos que  $x_B^\mu = x_p^\mu + \omega_p^\mu d\sigma$ , então

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu x_B = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_p + \bar{w} d\sigma) \quad (\text{A.15})$$

ou

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_B) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_p) + \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} w^\gamma d\sigma. \quad (\text{A.16})$$

Sabemos que:

$$v^\beta(x_p) = v^\beta(x_p + \omega_p d\sigma) \quad (\text{A.17})$$

ou

$$v^\beta(x_p) = v^\beta(x_p) + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\kappa} w^\kappa d\sigma, \quad (\text{A.18})$$

Logo ao longo do caminho  $3 \rightarrow 4$  vamos ter

$$\begin{aligned} \xi_c^{*\mu} = & (\xi_p^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha w^\beta d\sigma) - \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (X_p) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} w^\gamma d\sigma \right) \times \\ & (\xi_p^\alpha - \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta w^\rho d\sigma) \left( v_p^\beta (X_p) + \frac{\partial v_p^\beta}{\partial x^\kappa} w^\kappa d\sigma \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Vamos comparar  $\xi_{c(1,2)}$  com  $\xi_{c(3,4)}$  fazendo a variação. Portanto vamos ter:

$$\delta\xi^\mu = \xi_{c(1,2)}^* - \xi_{c(3,4)}^* \quad (\text{A.20})$$

em que

$$\begin{aligned} \delta\xi^\mu = & \left[ \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\alpha v^\beta w^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\alpha w^\beta v^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta v^\rho w^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta w^\rho v^\beta + \right. \\ & \left. \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\kappa} w^\kappa - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial w^\beta}{\partial x^\kappa} v^\kappa \right) \right] d\lambda d\sigma, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

sendo o colchete de Lie igual a zero e que é dado por:

$$\left( \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\kappa} w^\kappa - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial w^\beta}{\partial x^\kappa} v^\kappa \right) = 0. \quad (\text{A.22})$$

Portanto vamos ficar com a seguinte equação:

$$\delta\xi^\mu = [\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \Gamma_{\eta\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta] \xi^\alpha v^\beta w^\gamma d\lambda d\sigma \quad (\text{A.23})$$

ou

$$\frac{\delta\xi^\mu}{d\lambda d\sigma} = [\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \Gamma_{\eta\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta] \xi^\alpha v^\beta w^\gamma d\lambda d\sigma. \quad (\text{A.24})$$

Tomando o limite da expressão acima, quando  $d\lambda d\sigma \rightarrow 0$ , obtemos:

$$R^\mu{}_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \Gamma_{\eta\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta. \quad (\text{A.25})$$

Em que a quantidade finita avaliada no ponto P representa o tensor de Riemann, descrito acima.