



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**A Relação de Dualidade Testada com Aglomerados de Galáxias e  $H(z)$**

**Simony Santos da Costa**

CAMPINA GRANDE

- Março 2015 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**A Relação de Dualidade Testada com Aglomerados de Galáxias e  $H(z)$**

**Simony Santos da Costa**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda

CAMPINA GRANDE

- Março 2015 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C837r Costa, Simony Santos da.  
A relação de dualidade testada com aglomerados de galáxias e  $H(z)$  /  
Simony Santos da Costa. – Campina Grande, 2015.  
146 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda".  
Referências.

1. Cosmologia. 2. Distância Cósmica - Relação. 3. Aglomerados de Galáxias. 4. Taxa de Expansão. I. Holanda, Rodrigo Fernandes Lira de. II. Título.

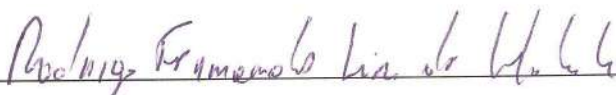
CDU 53:524.8(043)

**SIMONY SANTOS DA COSTA**

**TESTANDO A RELAÇÃO DE DUALIDADE COM AGLOMERADOS DE  
GALÁXIAS E  $H(Z)$**

Dissertação aprovada em 13/03/2015

**BANCA EXAMINADORA**



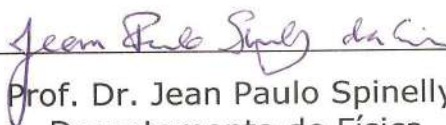
---

Prof. Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda  
Departamento de Física – UEPB  
(Presidente)



---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG  
(Membro interno)



---

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva  
Departamento de Física – UEPB  
(Membro externo)

À minha família.

# Agradecimentos

À toda minha família, que sempre acreditou em mim, que sempre me incentivou e me apoiou, que são exemplos de vida e de conquista a serem seguidos. Em especial, à minha mãe, meu maior exemplo de força de vontade, de superação, de garra, e de coragem que alguém pode ter. Ela foi, e é, meu porto seguro sempre. Às minhas irmãs Sabryna e Mere, que foram de uma ajuda estupenda ao longo desses dois anos de mestrado. Aos meus avós, que sempre depositaram confiança e acreditaram em meu potencial. E ao meu namorado Ozório Neto, por todo incentivo, apoio e presença nos bons momentos e, principalmente, nos difíceis desta reta final.

Ao meu orientador Prof. Rodrigo Holanda, pela ótima orientação, pela paciência, dicas e apoio a mim prestados e, principalmente, por todo o conhecimento que obtive ao realizar este trabalho e ao cursar suas disciplinas. Muito obrigada.

Aos meus excelentíssimos amigos do DF-UFCG. Obrigada pelos momentos dispendidos juntos, pela Física compartilhada e por todo companheirismo que aqui vivi. Em especial, ao meu grande amigo Gival Pordeus, às queridas amigas Desiane Gomes, Leide Pricila, Maria Aparecida e Priscila Santos que sempre me ajudaram, seja intelectualmente ou em qualquer outra situação, e que compartilharam de seus conhecimentos comigo.

Aos professores deste departamento pelos conhecimentos preciosos ministrados em suas disciplinas. E ao estimado Prof. Jean Spinelly por todo incentivo, apoio e torcida por mim, desde à graduação.

À CAPES pelo suporte financeiro.

“As teorias desmoronam, mas as boas observações nunca se apagam.”

Harlow Shapley

# Resumo

A chamada relação de reciprocidade, provada há alguns anos por Etherington (1933), é de fundamental importância em cosmologia. Ela afirma que, se o observador e a fonte estão em movimento relativo, os ângulos sólidos, subentendidos entre a fonte e o observador estão relacionados por invariantes geométricos e um fator dependente do *redshift* da fonte. Sua versão mais útil no contexto astronômico é conhecida como relação de dualidade de distância cósmica (RDDC), e relaciona às distâncias de luminosidade ( $D_L$ ) e de diâmetro angular ( $D_A$ ) de acordo com a seguinte expressão:  $D_L(z)(1+z)^{-2}/D_A(z) = 1$ . Esta relação é completamente geral, válida para todos os modelos cosmológicos baseados na geometria Riemanniana e é independente tanto das equações de campo de Einstein quanto da natureza da matéria. Ela apenas requer que observador e fonte estejam conectados por geodésicas nulas num espaço-tempo Riemanniano e que o número de fótons seja conservado. Neste trabalho, propomos um teste independente de modelo cosmológico para a RDDC envolvendo aglomerados de galáxias e medidas da taxa de expansão do universo,  $H(z)$ . Em uma primeira análise, usamos medidas de frações da massa do gás ( $f_{gas}$ ) e distâncias de diâmetro angular de uma amostra de 38 aglomerados de galáxias juntamente com medidas de  $H(z)$ , para testar a validade da RDDC. Em uma segunda análise, utilizamos uma amostra de 25 distâncias de diâmetro angular de aglomerados de galáxias, os quais foram obtidos considerando duas diferentes morfologias, a fim de investigar a influência da morfologia usada para descrever os aglomerados de galáxias sobre o teste. Em nossas análises, consideramos o parâmetro  $\eta$ , em função do *redshift*, sob duas formas distintas:  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z$  e  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z/(1+z)$ . Os resultados encontrados mostram que o valor de  $\eta_0$  depende do observável utilizado no teste (fração de massa do gás ou distância de diâmetro angular) e da morfologia considerada para descrever os aglomerados.



**Palavras-chave:** Cosmologia: relação de dualidade de distância cósmica, aglomerados de galáxias, taxa de expansão.

# Abstract

The so-called reciprocity relation, proved long ago by Etherington (1933), is of fundamental importance in cosmology. It states that if the source and the observer are in relative motion, solid angles subtended between the source and observer are related by geometrical invariants and a factor dependent of the source redshift. Its most useful version in the astronomical context is known as cosmic distance duality relation (CDDR), and relates the luminosity ( $D_L$ ) and angular diameter ( $D_A$ ) distances by the following expression:  $D_L(z)(1+z)^{-2}/D_A(z) = 1$ . This relation is completely general, valid for all cosmological models based on Riemannian geometry and is independent either upon Einstein field equations other nature of matter. It only requires that source and observer be connected by null geodesics in a Riemannian spacetime and that the number of photons be conserved. In this work we propose a cosmological model-independent test for the CDDR by using galaxy clusters and expansion rate of the universe measurements,  $H(z)$ . In a first analysis, we use gas mass fractions ( $f_{gas}$ ) and angular diameter distances measurements from a sample of 38 galaxy clusters jointly with  $H(z)$  measurements to test the validity of the CDDR. In a second analysis, we use 25 angular diameter distances sample, which were obtained by considering two different morphologies, in order to investigate the influence of the morphology used to describe the galaxy clusters on the test. In our analyzes, we consider the  $\eta$  parameter, as a function of the *redshift*, in two different ways:  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z$  and  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z / (1 + z)$ . The results showed that the value of  $\eta_0$  depend on the observable used in the test (gas mass fraction or angular diameter distance) and of the morphology considered to describe the clusters.

**Keywords:** Cosmology: cosmic distance duality relation, galaxy clusters, expansion rate.

# Lista de Figuras

2.1	Mapa de distribuição de galáxias com a Terra no centro obtido pela pesquisa SDSS. Retirada de: SDSS Image Gallery. . . . .	12
2.2	Mapa de temperatura da RCF obtida pelo WMAP. Retirada de: NASA/WMAP Science Team. . . . .	12
2.3	Hipersuperfícies bi-dimensionais que fornecem uma analogia para hipersuperfícies tipo-espaço tri-dimensionais nos casos de $k = +1$ , $k = 0$ e $k = -1$ (Lambourne,2010). . . . .	13
2.4	À esquerda temos a evolução do fator de escala para um universo apenas com matéria nos casos: plano, $k = 0$ , fechado, $k = 1$ , e hiperbólico, $k = -1$ . À direita temos a evolução do fator de escala para outros modelos. . . . .	19
2.5	Espectro da RCF obtido pelo FIRAS (Mather <i>et al.</i> , 1990). . . . .	24
2.6	Espectro de potência da RCF obtido pelo WMAP. Retirado de NASA/WMAP Science Team. . . . .	25
2.7	Curva de rotação da galáxia NGC3198. Os pontos representam as medidas da velocidade orbital em função do raio galáctico, e as curvas representam as contribuições das velocidades devido ao disco e ao halo (Van Albada <i>et al.</i> , 1985). . . . .	26
2.8	Curva de rotação da galáxia NGC6503. Novamente, os pontos representam as medidas da velocidade orbital em função do raio galáctico, e as curvas representam as contribuições das velocidades devido a cada uma das componentes, com o comportamento não kepleriano explicado pela presença do halo de matéria escura (Begeman <i>et al.</i> , 1991). . . . .	27
2.9	O aglomerado 1E0657-558 visto no óptico (imagem à esquerda) e em raios-X (imagem à direita). Note que os contornos do potencial gravitacional estão separados das componentes luminosas, indicando a existência de matéria escura (Clowe <i>et al.</i> , 2006). . . . .	28

2.10	Evidência para energia escura encontrada pelo <i>Supernova Cosmology Project</i> (Perlmutter <i>et al.</i> , 1999). . . . .	30
2.11	Evidência para energia escura encontrada pelo <i>High Redshift Supernova Search Team</i> (Riess <i>et al.</i> , 1998). . . . .	30
2.12	Distância de luminosidade adimensional ( $D_L/D_H$ , com $D_H = cH_0^{-1}$ sendo a distância de Hubble). Cada curva representa um modelo de universo, a curva sólida possui $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(1, 0)$ , a curva pontilhada possui $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(0.05, 0)$ e a curva tracejada possui $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(0.2, 0.8)$ (Hogg, 1999). . . . .	36
2.13	Distância de diâmetro angular adimensional ( $D_A/D_H$ ), onde cada curva representa um modelo de universo. A curva sólida possui $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(1, 0)$ , a curva pontilhada possui $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(0.05, 0)$ e a curva tracejada possui $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.2, 0.8)$ (Hogg, 1999). . . . .	38
3.1	Na imagem à esquerda podemos ver uma simulação da estrutura filamentar do Universo, onde os pontos mais luminosos indicam os halos das galáxias gigantes e na intersecção dos filamentos pode-se observar a formação dos aglomerados de galáxias (Fonte: simulação realizada por Couchman, Universidade de Ontário, Canadá). Na imagem da direita temos a estrutura filamentar do universo observado (Fonte: <i>survey</i> realizado pelo LCO ( <i>Las Campanas Observatory</i> )). . . . .	41
3.2	Emissão em rádio da galáxia elíptica NGC 7720 no aglomerado de Abell 2634. Os tons em azuis e com curvas de nível representam à emissão em rádio devido o movimento da galáxia em relação ao meio intra-aglomerado (Lima Neto, 2005). . . . .	42
3.3	Imagem à esquerda: Imagem no óptico da parte central do aglomerado de Coma centrada na galáxia NGC4889; a galáxia brilhante à direita é a NGC4874. Imagem à direita: Imagem de raios-X (ROSAT) de Coma. Fonte: <a href="http://chandra.harvard.edu/photo/2002/0150/more.html">http://chandra.harvard.edu/photo/2002/0150/more.html</a> . . . . .	47
3.4	Esquema do efeito Sunyaev-Zel'dovich térmico considerando o espalhamento de um fóton da RCF por um elétron do gás de um aglomerado fictício. Retirada de: <a href="http://www.russia-ic.com/people/general/z/141">http://www.russia-ic.com/people/general/z/141</a> . . . . .	52
3.5	Distorção observada no espectro da RCF devido ao efeito Sunyaev-Zel'dovich. A linha tracejada mostra o espectro original e a linha contínua mostra o espectro distorcido devido à interação (Carlstrom <i>et al.</i> , 2002). . . . .	55

3.6	A linha contínua representa o ESZ térmico, a linha tracejada o ESZ cinético, e a linha pontilhada representa o espectro de corpo negro da RCF multiplicada por um fator de 0.0005 (Carlstrom <i>et al.</i> , 2002). . . . .	57
3.7	Dados atuais de $H(z)$ . Os círculos vermelho, amarelo, azul escuro e preto são as medidas realizadas pelo método da diferença de idade, e os losangos verde, azul claro e rosa são as medidas feitas através de BAO (Ferreira, 2014). . . . .	62
3.8	$D_c$ obtidas a partir das medidas da taxa de expansão. A curva sólida representa o ajuste polinomial de 5 ordem para os pontos de $D_c$ e as curvas pontilhadas os erros de $1\sigma$ . . . . .	65
3.9	$D_A(z)$ obtidas a partir do ajuste polinomial da distância comóvel, considerando os mesmos <i>redshifts</i> da amostra de Bonamente <i>et al.</i> (2006). . . . .	65
4.1	Trajetória de raios provenientes de uma fonte G e alcançando um observador O, estando ambos em afastamento (Ellis, 1971). . . . .	67
5.1	Função de distribuição de probabilidade (verossimilhança) do parâmetro $\eta_0$ utilizando dados de $D_A$ via ESZ/raios-X e $H(z)$ para as parametrização P1 e P2. . . . .	82
5.2	Função de distribuição de probabilidade (verossimilhança) utilizando dados de $f_{gas}$ via raios-X e dados de $D_A$ a partir de $H(z)$ , para as parametrização P1 e P2. . . . .	87
5.3	Função de distribuição de probabilidade utilizando dados de $f_{gas}$ via raios-X e dados de $D_A$ via ESZ/raios-X, para a parametrização P1. . . . .	88
5.4	Função de distribuição de probabilidade utilizando dados de $f_{gas}$ via raios-X e dados de $D_A$ via ESZ/raios-X, para a parametrização P2. . . . .	88
5.5	Função de distribuição de probabilidade (verossimilhança) utilizando dados de $D_A$ via ESZ/raios-X e $H(z)$ para a amostra elíptica de De Filippis <i>et al.</i> (2005). . . . .	93
5.6	Função de distribuição de probabilidade (verossimilhança) utilizando dados de $D_A$ via ESZ/raios-X e $H(z)$ para a amostra esférica de De Filippis <i>et al.</i> (2005). . . . .	94
A.1	Superfície descrita por um conjunto de geodésicas $\gamma_s(\lambda)$ , com vetores tangentes $T^\mu$ e o campo de vetores $X^\mu$ mede o desvio entre geodésicas vizinhas (D’Inverno, 1992). . . . .	121

# Lista de Tabelas

5.1	Dados de medidas de distância de diâmetro angular da amostra de Bonamente <i>et al.</i> (2006). Adaptado de Bonamente <i>et al.</i> (2006). . . . .	80
5.2	Resultados obtidos para o teste de validade da RDDC utilizando $D_A$ (Bonamente <i>et al.</i> , 2006) $\times D_A^{H(z)}$ para um nível de confiança de 95,4%. . . . .	83
5.3	Dados de medidas de fração de massa do gás da amostra de La Roque <i>et al.</i> (2006). Adaptado de La Roque <i>et al.</i> (2006). . . . .	85
5.4	Resultados obtidos para o teste de validade da RDDC utilizando $f_{gas}$ (La Roque <i>et al.</i> , 2006) $\times D_A^{H(z)}$ para um nível de confiança de 68,3%. . . . .	86
5.5	Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando $D_A$ (Bonamente <i>et al.</i> , 2006) e $D_A^{H(z)}$ para os níveis de confiança de 68,3% e 95,4%, respectivamente, em ambas as parametrizações. . . . .	89
5.6	Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando $f_{gas}$ (La Roque <i>et al.</i> , 2006) e $D_A^{H(z)}$ para os níveis de confiança de 68,3% e 95,4%, em ambas as parametrizações. . . . .	89
5.7	Dados de medidas de distância de diâmetro angular da amostra de De Filippis <i>et al.</i> (2005) para os casos elíptico e esférico. Adaptado de De Filippis <i>et al.</i> (2005). . . . .	91
5.8	Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando a amostra elíptica para $D_A^{Elip}$ (De Filippis <i>et al.</i> (2005)) e $D_A^{H(z)}$ para os níveis de confiança de 68,3% e 95,4%, respectivamente, em ambas as parametrizações. . . . .	94
5.9	Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando a amostra esférica para $D_A^{Esf}$ (De Filippis <i>et al.</i> (2005)) e $D_A^{H(z)}$ para os níveis de confiança de 68,3% e 95,4%, respectivamente, em ambas as parametrizações. . . . .	94

6.1	Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando medidas de $D_A$ das amostras elíptica e esférica compiladas por De Filippis <i>et al.</i> (2005) e $D_A^{H(z)}$ para o nível de confiança de 68,3%, em ambas as parametrizações. . . . .	98
-----	--	----

# Lista de Siglas e Símbolos

**BAO** Barionic Acoustic Oscillations

**BIMA** Berkeley-Illinois-Maryland Association Observatory

**CDM** Cold Dark Matter

**COBE** Cosmic Background Explorer

**EDG** Equação de Desvio Geodésico

**ESZ** Efeito Sunyaev-Zel'dovich

**FIRAS** Far Infrared Absolute Spectrophotometer

**FLRW** Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

**HDM** Hot Dark Matter

**HZT** High-z Supernova Search Team

*$\Lambda$ CDM* Lambda Cold Dark Matter

**MCP** Modelo Cosmológico Padrão

**MIA** Meio Intra-Aglomerado

**OVRO** Owens Valley Radio Observatory

**RCF** Radiação Cósmica de Fundo

**RDDC** Relação de Dualidade de Distância Cósmica

**SCP** Supernova Cosmology Project

**SDSS** Sloan Digital Sky Survey



**SNe Ia** Supernova do Tipo Ia

**TRE** Teoria da Relatividade Especial

**TRG** Teoria da Relatividade Geral

**WMAP** Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

# Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	x
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Siglas e Símbolos	xvi
<b>1</b> Introdução	<b>1</b>
<b>2</b> Cosmologia Moderna	<b>5</b>
2.1 Relatividade Geral e Gravitação	5
2.1.1 Princípios da TRG	6
2.1.2 Tensor Energia-Momento	8
2.1.3 Equações de Campo	9
2.2 Cosmologia Relativística	11
2.2.1 Princípio Cosmológico	11
2.2.2 Geometria e Dinâmica Cósmica	13
2.2.3 Parâmetros Cosmológicos	16
2.3 O Modelo do <i>Big Bang</i>	19
2.3.1 Nucleossíntese Primordial	20
2.3.2 Radiação Cósmica de Fundo	22
2.3.3 Matéria Escura	25

2.3.4	Energia Escura . . . . .	28
2.4	Aspectos Observacionais . . . . .	32
2.4.1	Redshift Cosmológico . . . . .	32
2.4.2	Medidas de Distância . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Observáveis Padrão</b>	<b>40</b>
3.1	Aglomerados de Galáxias . . . . .	40
3.1.1	Cálculo da Massa em Forma de Galáxias . . . . .	43
3.1.2	Cálculo da Massa em Forma de Gás do MIA . . . . .	43
3.1.3	Cálculo da Massa Total de Um Aglomerado . . . . .	45
3.2	Fração de Massa do Gás em Aglomerados de Galáxias . . . . .	46
3.3	Efeito Sunyaev-Zel'dovich . . . . .	50
3.3.1	Cálculo de $D_A$ de Aglomerados de Galáxias . . . . .	57
3.4	Medidas da Taxa de Expansão do Universo . . . . .	60
3.4.1	Cálculo da Distância de Diâmetro Angular utilizando $H(z)$ . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Relação de Dualidade de Distância Cósmica</b>	<b>66</b>
4.1	Dedução da RDDC . . . . .	66
4.2	Testes da RDDC . . . . .	72
4.2.1	Testes Dependente de Modelo Cosmológico . . . . .	73
4.2.2	Testes Independente de Modelo Cosmológico . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Testando a RDDC com aglomerados de galáxias e <math>H(z)</math></b>	<b>77</b>
5.1	Análises utilizando $D_A$ de aglomerados $\times D_A$ de $H(z)$ . . . . .	78
5.1.1	$D_A$ via ESZ/raios-X . . . . .	78
5.1.2	Metodologia . . . . .	79
5.1.3	Resultados . . . . .	82
5.2	Análises utilizando $f_{gas}$ de aglomerados $\times D_A$ de $H(z)$ . . . . .	83
5.2.1	Metodologia . . . . .	83
5.2.2	Resultados . . . . .	86
5.3	Análises utilizando $D_A$ de aglomerados com diferentes morfologias . . . . .	89
5.3.1	Metodologia . . . . .	90
5.3.2	Resultados . . . . .	92

<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>95</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>100</b>
<b>A</b>	<b>Conceitos de Geometria Diferencial</b>	<b>117</b>
A.1	Tensores, Métrica e Derivadas Covariantes . . . . .	117
A.1.1	Tensor . . . . .	117
A.1.2	Métrica . . . . .	118
A.1.3	Derivada Covariante . . . . .	119
A.2	Geodésicas e Curvatura . . . . .	120
A.3	Equação de Desvio Geodésico . . . . .	121
<b>B</b>	<b>Ferramentas de Análise Estatística</b>	<b>124</b>
B.1	Probabilidade . . . . .	125
B.2	Teste Estatístico do $\chi^2$ . . . . .	126

# Capítulo 1

## Introdução

A Cosmologia, cujo principal objeto de estudo é o entendimento físico do Universo, é atualmente uma das áreas que mais cresce na Física, principalmente devido os avanços tecnológicos que têm propiciado uma grande quantidade de dados observacionais a respeito do universo com uma qualidade sem precedentes. As recentes observações de supernovas do tipo Ia (SNe Ia) em *redshifts* altos e intermediários, os dados precisos das anisotropias da radiação cósmica de fundo (RCF), e os estudos em raios-X dos aglomerados de galáxias, por exemplo, tem indicado a existência de uma componente exótica, denominada energia escura, que seria a responsável pela atual fase de expansão acelerada do Universo ([1], [2], [3], [4]). Segundo esses estudos, a energia escura equivale a cerca de 73% do conteúdo energético do universo, a matéria escura a 23% e a matéria bariônica corresponde a apenas 4% do conteúdo total [3].

Neste cenário, onde apenas aproximadamente 5% do conteúdo do universo é conhecido, os aglomerados de galáxias tornam-se inestimáveis traçadores da evolução cósmica. O fato de suas massas ultrapassarem  $10^{14}$  massas solares, seus diâmetros serem da ordem de Mpc e possuírem temperaturas da ordem de  $10^7$ - $10^8$  K faz deles as maiores estruturas virializadas<sup>1</sup> e capazes de fornecer diversos testes cosmológicos. Os aglomerados podem, por exemplo, mostrar como a expansão do universo influencia na formação e crescimento das estruturas nele existentes. Se a energia escura tivesse dominado no início do universo, o processo de formação de estruturas e a abundância dos aglomerados seriam reduzidos,

---

<sup>1</sup>Estruturas que obedecem o teorema do virial:  $2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$ , onde  $\langle T \rangle$  é a energia cinética média do sistema, e  $\langle U \rangle$  é a energia potencial média do sistema.

de forma que, medições da abundância destes objetos em altos *redshifts* nos fornecem vínculos sobre diversos parâmetros cosmológicos, dentre eles, o parâmetro de densidade de matéria  $\Omega_M$  e o parâmetro de densidade da energia escura  $\Omega_\Lambda$ .

Além de serem utilizados como “régua padrão”, os estudos dos aglomerados de galáxias revelaram um efeito físico muito importante e que tem recebido a atenção da comunidade científica já há alguns anos, o então conhecido Efeito Sunyaev Zel’dovich (ESZ) [5]. Este efeito é detectado através da distorção do espectro da RCF, devido o espalhamento dos fótons dessa radiação pelos elétrons energéticos do meio intra-aglomerado (MIA), e pode manifestar-se de duas formas: o ESZ térmico e o cinemático. Além disso, quando combinado com o brilho superficial em raios-X, nos fornece medidas diretas da distância de diâmetro angular até estes objetos. Esta técnica foi recentemente aplicada a uma quantidade razoável de aglomerados ([6], [7]) e é uma técnica favorável, pois é independente das distâncias de luminosidade de SNe Ia e de calibradores locais.

Uma vez que estamos vivendo em uma era muito rica de pesquisa no campo da cosmologia, existe a possibilidade de revermos alguns dos pressupostos acerca do universo considerando os dados observacionais disponíveis, ou seja, além de definir e restringir quais as componentes do universo podemos analisar a física por trás dos modelos cosmológicos. Um dos conceitos mais básicos atrelado a qualquer modelo de universo é o conceito de distância, já que sua importância abrange todas as escalas astronômicas. Necessitamos de medidas de distância precisas, por exemplo, na aferição de distâncias entre observador e estrelas, entre planetas e asteróides e até entre pontos distintos em uma galáxia. Mais do que precisão nas medidas, é importante saber como as distâncias são definidas, pois o modo como as definimos pode sugerir questões sobre a natureza dos fótons ou até mesmo sobre a geometria do espaço-tempo.

Com relação a este último enfoque, existe um teorema de grande valia conhecido como teorema de Etherington que demonstra que, em um Universo em expansão, a distância entre observador-fonte e fonte-observador é a mesma, a menos de um fator dependente do *redshift* [8]. Os estudos referentes a este teorema tiveram início no final da década de 1920, quando Tolman (1929) contribuiu para o tema utilizando uma métrica particular de De Sitter e conceitos astronômicos de distância. Em seguida, Whittaker (1931) utilizou apenas procedimentos matemáticos para definir distância em um espaço Riemanniano

geral. Por fim, Etherington (1933) adicionou conceitos de distância astrofísicos e apresentou uma versão definitiva em coordenadas gerais para o teorema. Contudo, o tema foi deixado de lado até o fim da década de 1960, quando Sachs & Wolfe (1967) e Ellis (1971), utilizando argumentos baseados em óptica geométrica, apresentaram, de maneira independente, novas provas para a relação de reciprocidade de Etherington. Seus resultados foram obtidos assumindo os pressupostos de que a geometria é Riemanniana e os fótons seguem geodésicas nulas e únicas. Além disso, quando se considera que o número de fótons é conservado ao longo da expansão do Universo é possível obter a relação de dualidade de distância cósmica [14].

A relação de reciprocidade de Etherington, como também é conhecida, tem sido, até então, tida como certa por meio de diversas observações cosmológicas. Mas, apesar disto é em princípio “testável” por meio de observações astronômicas [15]. Nesse contexto, existem, na literatura, diversas análises fenomenológicas com o intuito de testar a validade da RDDC, utilizando, para isso, uma diversidade de observáveis astrofísicos, tais como SNe Ia e fontes compactas de rádio [16], medidas de distância via ESZ/raios-X ([15], [17]), e dados da RCF [18], por exemplo. Se caso os resultados desse tipo de análise mostre que a RDDC é violada de maneira consistente, surgem evidências de uma nova física, com uma possível revisão do modelo cosmológico padrão. No entanto, a maioria das análises existentes são baseadas em dados de fontes distintas, o que introduz diferentes fontes de erros sistemáticos na análise, quer seja por diferentes mecanismos físicos associados a cada uma das fontes, ou pela diferença de *redshift* entre elas. Na tentativa de evitar esses erros, Holanda *et al.* (2012) propuseram um teste independente de modelo cosmológico, utilizando apenas uma fonte astrofísica, no caso os aglomerados de galáxias, para testar a validade da RDDC utilizando apenas medidas de fração da massa do gás em raios-X e via ESZ.

Neste cenário, surge o presente trabalho, que tem como objetivo analisar a relação de dualidade em sua forma geral, ou seja, levando em conta uma possível violação através da dependência com um parâmetro  $\eta$ . A RDDC é explorada investigando a dependência deste parâmetro com o observável usado de uma mesma amostra de objetos astrofísicos, no caso os aglomerados de galáxias. Os métodos utilizados neste trabalho, os quais não são encontrados na literatura, são uma contribuição original do nosso trabalho.

A análise se deu a partir de duas abordagens: na primeira, confrontamos os dados de  $D_A$ , via ESZ/raios-X da amostra de Bonamente *et al.* (2006) com os dados de  $D_A$  obtidos a partir de  $H(z)$ , através da expressão geral para a distância de diâmetro angular, via ESZ/raios-X, como demonstrado por Uzan *et al.* (2004). A ideia principal desta análise foi estipular um valor observacional para o parâmetro  $\eta$  que não apresentasse dados com diferença de *redshift*. Para isto, a partir do método de integração numérica e do método de ajuste polinomial, conseguimos estimar dados de distâncias de diâmetro angular, a partir de  $H(z)$ , considerando os mesmos *redshifts* da amostra de Bonamente *et al.* (2006). Na segunda abordagem, partimos para a análise da RDDC utilizando os dados de  $f_{gas}$  da amostra de La Roque *et al.* (2006), cujos aglomerados foram os mesmos considerados na amostra de Bonamente *et al.* (2006), e medidas de  $D_A$  a partir de  $H(z)$  (considerando os mesmos *redshifts* da amostra de  $f_{gas}$ ) para restringir o parâmetro da RDDC. Para complementar a análise, comparamos os resultados de ambos os testes e propusemos mais um, seguindo a primeira abordagem, mas dessa vez utilizando as amostras de De Filippis *et al.* (2005), para investigar a dependência da validade (ou não) da RDDC com a geometria dos aglomerados.

A organização geral deste trabalho se deu da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos uma revisão do modelo cosmológico padrão, discutimos os fatos observacionais e teóricos que o consolidaram, apresentamos as equações que governam a dinâmica cósmica e mostramos as principais medidas de distância em um Universo em expansão. No capítulo 3, exploramos as principais características dos aglomerados de galáxias e as medidas que podem ser extraídas destes objetos, estudamos o efeito Sunyaev-Zel'dovich e a taxa de expansão do Universo, bem como os métodos utilizados para estipular medidas de distância a partir dessas duas quantidades. No capítulo 4, nos detemos a dedução da RDDC e apresentamos uma revisão da literatura acerca dos testes cosmológicos existentes para esta relação. No capítulo 5, exploramos a relação de dualidade através das duas abordagens citadas anteriormente e discutimos os detalhes dos resultados obtidos para cada um dos testes considerados. E por fim, as conclusões e perspectivas futuras deste trabalho são apresentadas no capítulo 6.



# Capítulo 2

## Cosmologia Moderna

Neste capítulo, veremos algumas considerações acerca da Teoria da Relatividade Geral (TRG) e dos princípios que a fundamentam, além dos modelos de Universo que surgem diretamente das equações de campo de Einstein. Enfatizaremos também o modelo cosmológico padrão e os fatos observacionais que o consolidaram, assim como a dinâmica cósmica e os principais parâmetros cosmológicos que podem ser restringidos a partir das observações.

### 2.1 Relatividade Geral e Gravitação

A compreensão do nosso Universo exige uma teoria mais abrangente do que a teoria Newtoniana, pois essa apresenta limitações, quando por exemplo, os corpos se movem com velocidades próximas a da luz. A busca por resolver esta e outras inconsistências da teoria de Newton levou ao surgimento da Teoria da Relatividade Especial (TRE) ou restrita, na qual o espaço e o tempo não existem mais separadamente, mas são um: o espaço-tempo.

Os conceitos de espaço e tempo passam a ser equivalentes, uma vez que, para uma dilatação temporal corresponde uma contração do espaço, e da mesma forma, para uma dilatação do espaço corresponde uma contração do tempo. Sua descrição é dada em termos da geometria de Minkowski e a conexão entre espaço e tempo é dada pelo seguinte elemento de linha [21]:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.1)$$

onde estamos considerando o sistema natural de unidades, isto é,  $c = 1$ , sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo ( $c = 300.000km/s$ ). Vale ressaltar, contudo, que a TRE é válida apenas para referenciais inerciais.

Em 1915, Einstein estende seus resultados, formulando a TRG, para referenciais acelerados e sob a ação de um campo gravitacional, dando espaço, posteriormente, para uma nova linha de pensamento: a de que o Universo não seria mais imutável, com uma estrutura constante ao longo do tempo, mas estaria em expansão e o espaço-tempo seria distorcido pela presença de matéria-energia. Com a formulação da TRG tem início a Cosmologia Moderna.

Além disso, Einstein apresenta uma nova perspectiva para a gravidade, esta agora não seria mais uma força, mas sim uma propriedade geométrica do espaço-tempo. Dessa forma, a TRG propõe-se a substituir a teoria da gravitação universal de Newton, com a qual está de acordo localmente e para cenários com campos gravitacionais fracos e de lenta variação, tais como os interplanetários.

### 2.1.1 Princípios da TRG

A TRG é fortemente baseada em quatro suposições que qualquer teoria de gravitação deve satisfazer, e trata os fenômenos físicos tanto em referenciais inerciais como também em referenciais quaisquer.

O primeiro princípio diz respeito a equivalência local entre gravidade e aceleração e é conhecido como princípio da equivalência fraco, o qual não se aplica para objetos muito massivos que poderiam mudar substancialmente o campo gravitacional em sua vizinhança [22]. Além disso, o princípio fraco exclui experimentos que envolvam forças eletromagnéticas ou interações nucleares fortes.

O segundo, o princípio da equivalência forte, não apresenta restrições para as forças gravitacionais e nos diz que a equivalência entre efeitos gravitacionais e acelerativos está diretamente relacionado com a igualdade entre as massas gravitacional e inercial dos corpos, de modo que, não é possível distinguir o comportamento físico dos corpos através de um experimento qualquer, dentro de uma região de aceleração uniforme apropriada [22].

Um bom exemplo, talvez o principal exemplo dessa equivalência, é o experimento do elevador. Nesse caso, o observador, isolado do exterior, não conseguirá distinguir se está em queda livre, na presença de um campo gravitacional constante, ou se está em um referencial cuja aceleração seja igual à aceleração da gravidade do sistema em queda livre.

Embora menos geral que o princípio forte, o princípio da equivalência fraco por si só foi capaz de levar Einstein a prever dois novos efeitos: desvio gravitacional da luz e redshift gravitacional da luz, os quais, posteriormente, tornaram-se objeto de cálculos refinados e também dois importantes testes para a TRG.

A terceira suposição foi feita por Einstein, que argumentou que todos os observadores, sejam inerciais ou não, deveriam ser capazes de descobrir as leis da física e enuncia o princípio da relatividade geral: “*Todos os observadores são equivalentes*” [21].

Note-se ainda que, os observadores estão intimamente ligados aos seus sistemas de referência ou sistemas de coordenadas. Logo, se um observador pode descobrir leis físicas, qualquer outro observador o pode fazer. Outro ponto é que uma teoria deve ser invariante por mudança de coordenadas, e a ferramenta matemática que nos fornece equações invariantes por transformações de coordenadas é o formalismo tensorial.

Assim, a partir dessas considerações pode-se enunciar o princípio da covariância geral, que nos diz que as leis da física devem ser expressas como equações tensoriais para que elas se transformem covariantemente sob mudanças de coordenadas.

Os princípios, que até então discutimos, não nos dizem muito sobre como obter as equações de campo da relatividade geral. Para isso devemos fazemos uso do quarto princípio que rege a TRG, o chamado princípio de acoplamento gravitacional mínimo. Tal princípio nos diz que não se faz necessário adicionar termos contendo explicitamente o tensor de curvatura para fazer a transição da teoria especial para a teoria geral.

Uma outra forma de se apresentar esse princípio é dada em termos da deformação mínima do funcional ação da relatividade especial, onde é feita a substituição da métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  por  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas parciais  $\partial/\partial x$  por derivadas covariantes  $\nabla_{\mu}$  em relação a  $g_{\mu\nu}$ .

Por exemplo, na TRE o tensor energia-momento satisfaz a seguinte lei de conser-

vação:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

seguindo o princípio de acoplamento mínimo, temos a seguinte lei de conservação válida na TRG:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Tensor Energia-Momento

Na teoria de Newton a densidade de massa é tida como uma quantidade conservada e como fonte da gravitação. Quando vamos para a TRE, a massa deixa de ser conservada e passa a se relacionar com a energia e momento de uma partícula como [22]:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (2.4)$$

e, então, as leis de conservação relacionam energia (massa-energia) e momento. Portanto, é esperado que a fonte de gravitação em teorias relativísticas não seja apenas a massa (ou densidade de massa), mas algo que envolva energia e momento.

Como vimos na seção anterior, o princípio da covariância geral nos diz que as leis da física devem ter forma tensorial para que sejam invariantes por transformações de coordenadas. Assim, a quantidade que irá atuar como fonte gravitacional na TRG deve ser um tensor. Um tensor em termos de energia e momento, ou como é mais conhecido tensor energia-momento.

O tensor energia-momento vai descrever a distribuição e o fluxo de energia e momento devido a presença e movimento de matéria e radiação em uma região do espaço-tempo. Ele possui ordem 2, é simétrico, e assim sendo, tem apenas dez componentes independentes.

Dependendo da região de interesse sua forma varia, mas em todos os casos, suas componentes irão nos dar informações sobre densidade de energia, fluxo da energia em várias direções e o fluxo das várias componentes do momento em várias direções.

No caso de poeira, cujas partículas não-interagentes estão distribuídas sem qualquer coerência e podem ser caracterizadas por duas quantidades (velocidade e densidade), o

tensor energia-momento, construído a partir dessas quantidades, é:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu, \quad (2.5)$$

onde  $u^\mu$  é o vetor quadri-velocidade definido como  $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ . Este tensor energia-momento resulta na lei de conservação (2.2), e se consideramos a componente  $\mu = 0$ , chegamos na equação de continuidade das massas [21]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.6)$$

Um outro exemplo é o tensor energia-momento de um fluido perfeito. Esse tensor dependerá agora, além de sua quadri-velocidade e densidade de matéria, de um campo escalar de pressão,  $p$ , que atua igualmente em todas as direções em cada ponto (no limite de  $p \rightarrow 0$ , o fluido perfeito se reduz à poeira). Em um evento onde a métrica é  $g_{\mu\nu}$ , as componentes do tensor energia-momento de um fluido perfeito são dadas por,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

a qual recai na lei de conservação (2.3).

Podemos citar ainda, o tensor energia-momento para campos eletromagnéticos [22],

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( F^\mu_\sigma F^{\nu\sigma} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Equações de Campo

Segundo a teoria da gravitação de Einstein, uma distribuição de matéria-energia deforma a geometria do espaço-tempo. Sendo assim, as equações de campo dessa teoria devem ter, de um lado, a distribuição de matéria-energia e, do outro, as informações referentes à geometria que descreve esse espaço deformado.

Como vimos na sub-seção anterior, o tensor energia-momento, que carrega informações da distribuição de matéria-energia, atua como fonte gravitacional na TRG, assim, resta saber o que comporá o outro lado das equações de campo.

Einstein, em sua busca por uma teoria geométrica de gravitação, encontrou um tensor em termos de derivadas da métrica,  $g_{\mu\nu}$ , e que possuía divergência covariante nula, assim como o tensor energia-momento [22]. Após alguns anos de tentativas, ele chegou às

equações dinâmicas que descrevem a forma como o conteúdo matéria-energia modifica a geometria do espaço-tempo:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

que são as conhecidas equações de campo de Einstein, onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein, o qual traz informações da geometria,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci e  $\kappa$  é a constante de Einstein, que pode ser determinada indo-se para o limite de campo fraco, o que fornece  $\kappa = 8\pi G$  (para  $c = 1$ ). Tais equações podem ser apresentadas também em termos da constante cosmológica,  $\Lambda$ , como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Essas novas equações de campo, com o termo de constante cosmológica, foram introduzidas por Einstein na tentativa de descrever um universo composto por matéria gravitante, estático e com simetria esférica. Alguns anos depois, ele disse que esse foi o maior erro de sua vida, pois Hubble verificou, em 1929, que quase todas as nebulosas tinham um desvio para o vermelho, o que indicaria um universo em expansão, contrário as previsões teóricas de um universo estático. Posteriormente, Friedmann, utilizando uma métrica simples em coordenadas esféricas e assumindo o Princípio Cosmológico<sup>1</sup>, obteve como solução de suas equações de campo um universo dinâmico, sem necessitar da constante cosmológica ([23], [24]). Durante anos na Cosmologia, o uso (ou não) da constante cosmológica ficou a critério das considerações feitas pelos cosmólogos sobre a descrição das observações, e somente em 1968, a partir dos estudos de Zel'dovich, ela foi trazida de volta, dessa vez, associada a uma densidade de energia do vácuo [25].

A resolução das equações de campo de Einstein é algo particularmente difícil de se fazer, uma vez que envolve o tensor de Ricci e o escalar de curvatura de Ricci, dados em termos de combinações do tensor de Riemann,  $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ , que por sua vez é definido em termos dos coeficientes de conexão,  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ , os quais são definidos em termos da métrica,  $g_{\mu\nu}$ , e de sua inversa  $g^{\mu\nu}$ .

Assim, resolver as equações de Einstein significa encontrar o tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ , que corresponda a um dado tensor energia-momento,  $T_{\mu\nu}$  [22]. Na próxima seção vamos

---

<sup>1</sup>O qual discutiremos melhor na próxima seção.

resolver as equações de Einstein, a partir das considerações necessárias e, assim, encontrar as equações de Friedmann-Lemaître que governam a expansão do universo.

## 2.2 Cosmologia Relativística

O ponto de partida da cosmologia relativística é o fato de que a relatividade geral pode ser aplicada ao Universo como todo e, além disso, está baseada em dois elementos principais, a saber, o princípio cosmológico, que nos leva à métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [22], e o postulado de Weyl, que implica que o conteúdo material do universo é um fluido perfeito [21].

### 2.2.1 Princípio Cosmológico

O princípio cosmológico nos diz que o universo parece o mesmo de todas as posições no espaço em um determinado momento, e que todas as direções no espaço, em qualquer ponto são equivalentes em uma dada época, ou seja, o universo é homogêneo e isotrópico [26]. Pesquisas com redshifts sugerem, contudo, que o universo é homogêneo e isotrópico apenas em escalas  $\geq 100Mpc$ ; em escalas menores existe uma grande inomogeneidade, tais como galáxias, aglomerados e superaglomerados [27].

As primeiras suposições de um Universo homogêneo e isotrópico levaram Friedmann a obter, como solução das equações de Einstein, uma métrica simples, e, posteriormente, apenas com base na homogeneidade e isotropia, Robertson e Walker também a obtiveram [28]. Dos fatos observacionais que corroboraram para fundamentar o princípio cosmológico podemos citar os mapas de distribuição de galáxias, feitos pelo projeto *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) (fig. 2.1) [29], e o mapa da radiação cósmica de fundo, feito pelo projeto WMAP<sup>2</sup>(fig. 2.2) [30].

---

<sup>2</sup>Do inglês, *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*



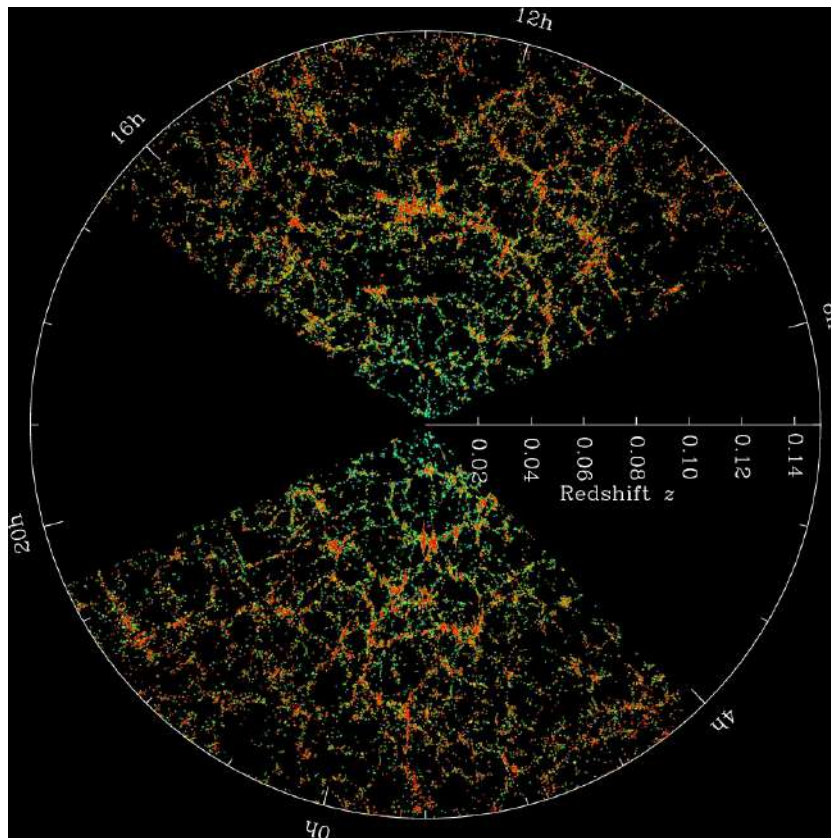


Figura 2.1: Mapa de distribuição de galáxias com a Terra no centro obtido pela pesquisa SDSS. Retirada de: SDSS Image Gallery.

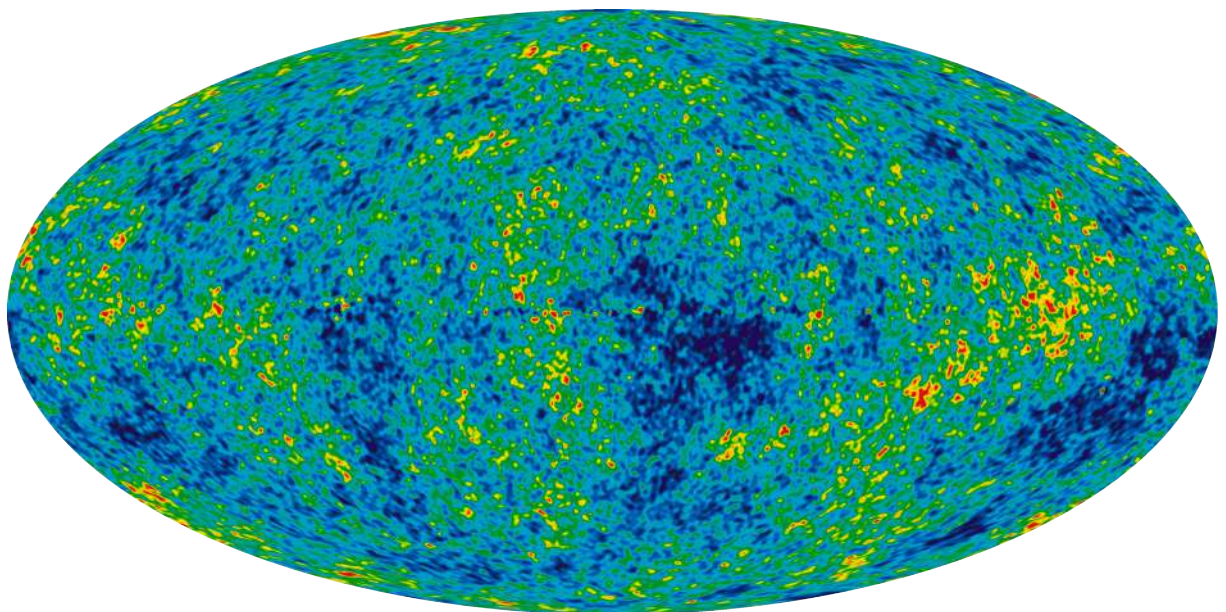


Figura 2.2: Mapa de temperatura da RCF obtida pelo WMAP. Retirada de: NASA/WMAP Science Team.



## 2.2.2 Geometria e Dinâmica Cós mica

A homogeneidade e isotropia do universo, propostas pelo princípio cosmológico e confirmada por diversas observações, implicam em um espaço-tempo maximamente simétrico que é bem descrito, em coordenadas esféricas, pela seguinte métrica [31]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.11)$$

conhecida como a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, sendo  $a(t)$  o fator de escala e  $k$  está relacionada com a curvatura do espaço, podendo assumir os valores de  $-1$ ,  $0$  e  $1$ , no caso do universo ser espacialmente aberto, plano ou fechado, respectivamente. A figura (2.3) nos mostra hipersuperfícies bi-dimensionais que fornecem uma analogia útil e memorável de hipersuperfícies tipo-espaço tri-dimensionais nos casos de  $k = +1$ ,  $k = 0$  e  $k = -1$ . Uma dedução completa da métrica FLRW pode ser encontrada em [26], [28], [31].

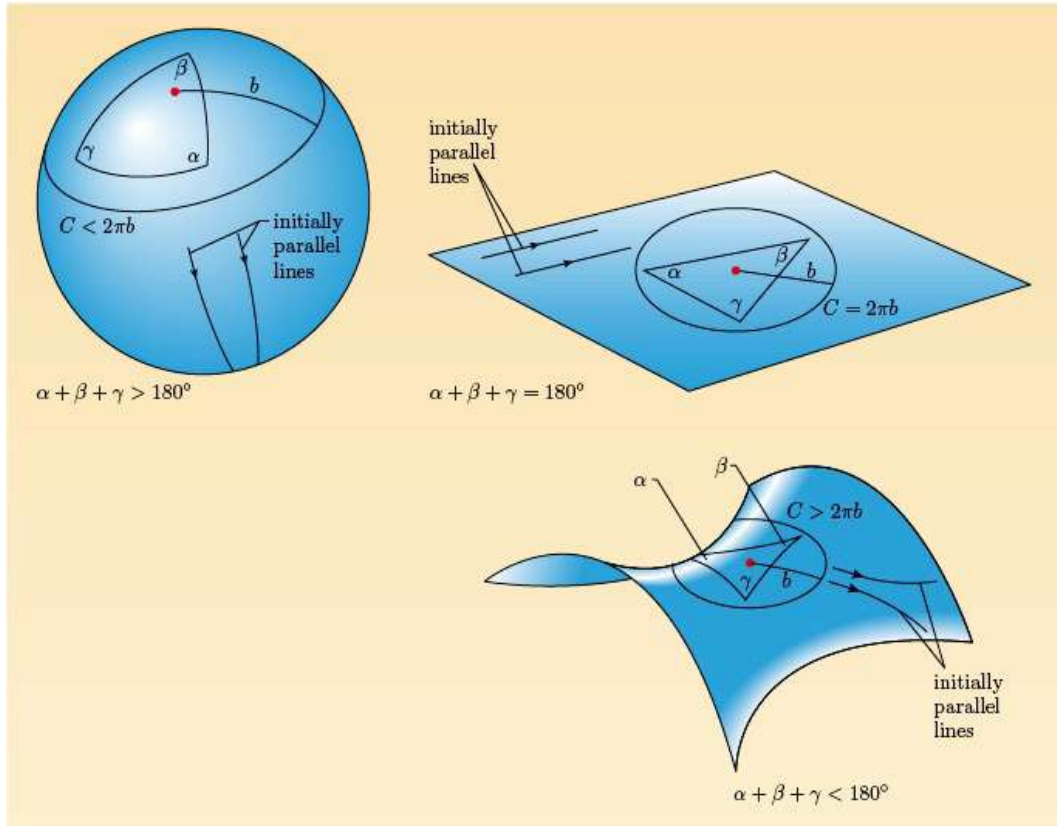


Figura 2.3: Hipersuperfícies bi-dimensionais que fornecem uma analogia para hipersuperfícies tipo-espaço tri-dimensionais nos casos de  $k = +1$ ,  $k = 0$  e  $k = -1$  (Lambourne,2010).

Uma maneira de preservar a homogeneidade e isotropia do espaço e ainda incor-

porar a evolução temporal é permitir uma escala de curvatura que seja dependente do tempo, a qual é representada pelo fator de escala,  $a(t)$ , e descreve completamente a evolução temporal de um universo homogêneo e isotrópico [27].

Podemos observar o significado do fator de escala mais claramente através do cálculo da distância própria em um tempo  $t$ , da origem até um objeto comóvel na coordenada radial  $r$  [28],

$$\begin{aligned} d(r, t) &= \int_0^r ds = \int_0^r \sqrt{g_{rr}} dr \\ &= a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

cuja solução é,

$$d(r, t) = a(t) \times \begin{cases} \operatorname{sen}^{-1}(r), & \text{se } k = +1 \\ \operatorname{senh}^{-1}(r), & \text{se } k = -1 \\ r, & \text{se } k = 0 \end{cases} . \quad (2.13)$$

Note que, a distância própria do objeto comóvel até um observador aumenta (ou diminui) de acordo com  $a(t)$ , e uma vez que não existe nada em especial sobre nossa posição, a distância própria entre observadores comóveis em qualquer lugar no universo deve ser proporcional ao fator de escala  $a(t)$ , o que é consequência do Princípio Cosmológico [28].

Para encontrarmos as equações que ditam a dinâmica cósmica devemos substituir a métrica e o tensor energia-momento adequados nas equações de Einstein (2.10). Como vimos, a métrica que melhor descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico é a métrica (2.11) e segundo Weinberg (1972), o tensor energia-momento do universo, necessariamente, toma a mesma forma daquele de um fluido perfeito, com a diferença de que devemos somar os termos referentes à radiação, matéria, curvatura, energia escura e constante cosmológica, de modo que ele assume a seguinte forma,

$$T_{\mu\nu} = \left( \sum_j \rho_j + \sum_j p_j \right) u_\mu u_\nu - \sum_j p_j g_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

onde  $\rho_j$  é a densidade,  $p_j$  é a pressão e  $u_\mu$  a quadri-velocidade.

A partir da métrica (2.11) e do tensor energia-momento (2.14), podemos resolver as equações de campo de Einstein, (2.10), em termos de componentes e obter duas equações independentes, chamadas de equações de Friedmann-Lemaître (as quais governam a

expansão do universo):

$$8\pi G \left( \sum_i \rho_i + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3 \frac{k}{a^2} \quad (2.15)$$

e

$$8\pi G \left( \sum_i p_i - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}. \quad (2.16)$$

com  $\dot{a}$  sendo a derivada do fator de escala com relação ao tempo. No caso de  $\Lambda = 0$  essas equações tornam-se, simplesmente, as equações de Friedmann.

É possível combinar as equações (2.15) e (2.16) para obter a equação de conservação de energia:

$$\dot{\rho}_{tot} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_{tot} + p_{tot}) = 0, \quad (2.17)$$

onde  $\rho_{tot}$  e  $p_{tot}$  representam a densidade de matéria total e pressão total do fluido, respectivamente. Dessa forma, sabendo a composição do universo podemos determinar sua dinâmica.

A grande maioria dos fluidos pode ser descrita por uma equação de estado que relaciona pressão e densidade, da seguinte forma:

$$p_i = w_i \rho_i. \quad (2.18)$$

Considerando fluidos não-interagentes e substituindo a equação (2.18) em (2.17), podemos integrar e obter a evolução da densidade de cada uma das componentes cósmicas:

$$\rho_i = \rho_{i0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w_i)}, \quad (2.19)$$

com  $w_i$  sendo uma constante.

O modelo padrão que descreve o universo abrange todas as formas de matéria conhecida, sendo elas: a matéria não relativística, a radiação e uma componente exótica associada à energia do vácuo, responsável pela expansão do universo. Para estes três casos, temos:

- A matéria não relativística que é caracterizada por ter pressão nula, implicando em  $w_m = 0$  e, conseqüentemente, na seguinte equação de evolução:

$$\rho_m = \rho_{m0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (2.20)$$

onde o sub-índice “0” indica a quantidade avaliada hoje. Esse tipo de matéria pode ser dividido em dois grupos: matéria bariônica e matéria escura fria. O primeiro é constituído por todas as partículas conhecidas da natureza e o segundo constitui umas das maiores incógnitas da física contemporânea.

- Radiação ou matéria relativística, sendo descrita por  $w_m = 1/3$ , o que leva à seguinte equação de evolução:

$$\rho_r = \rho_{r0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \quad (2.21)$$

A radiação inclui todas as partículas relativísticas da natureza, inclusive fótons e neutrinos. Na medida em que regredimos no tempo a temperatura aumenta e então as partículas bariônicas e leptônicas tornam-se, uma a uma, partículas relativísticas, de modo que, no universo primordial temos um banho térmico entre essas e os fótons e neutrinos, constituindo a componente de radiação do universo [32].

- No último caso, temos a constante cosmológica, associada à *energia escura* (EE) ou energia do vácuo, que é caracterizada por possuir pressão negativa, de forma que  $w_\Lambda = -1$  e assim:

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} = \text{constante}. \quad (2.22)$$

Por fim, podemos considerar um fluido desconhecido com uma equação de estado arbitrária,  $w_x$ , e cuja equação para evolução da densidade é do tipo:

$$\rho_x \propto a^{-3(1+w_x)}. \quad (2.23)$$

### 2.2.3 Parâmetros Cosmológicos

Um dos principais objetivos da cosmologia observacional é a determinação de parâmetros que determinem a evolução dinâmica do universo. Então, no intuito de testar se os modelos cosmológicos propostos na literatura estão de acordo com as observações, os parâmetros úteis na caracterização desses modelos são: a constante de Hubble ( $H_0$ ), o parâmetro de densidade ( $\Omega_i$ ) e o parâmetro de desaceleração ( $q_0$ ).

O parâmetro de densidade de cada componente é definido a partir da densidade crítica do universo,  $\rho_c$ . Tal densidade é a densidade total necessária para que o universo

tenha curvatura nula, isto é, fazendo  $k = 0$  em (2.15) e considerando  $\Lambda = 0$ , obtemos:

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,878 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{g}{cm^3}, \quad (2.24)$$

onde  $H_0 = (\dot{a}/a)_0$  é a constante de Hubble e o sub-índice 0 indica a quantidade avaliada hoje.

Agora, podemos escrever a densidade de cada uma das componentes do universo em função da densidade crítica. Para uma dada componente  $i$  do universo, com densidade  $\rho_i(t)$ , temos:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (2.25)$$

E, conhecendo-se cada componente de um modelo dado, é possível analisar sua contribuição na dinâmica cósmica.

Considerando o tempo atual na equação (2.15), é possível mostrar que:

$$\frac{k}{a_0^2 H_0^2} = \Omega_T - 1, \quad (2.26)$$

onde  $\Omega_T = \sum_i \Omega_i$ , com a somatória sendo feita sobre cada uma das componentes do modelo de universo considerado. Definindo ainda o parâmetro de curvatura como  $\Omega_k = -k/a_0^2 H_0^2$ , temos que:

$$\begin{aligned} \Omega_T + \Omega_k &= 1 \\ \sum_i \Omega_i + \Omega_k &= 1, \end{aligned} \quad (2.27)$$

de modo que a composição do universo influencia diretamente na sua curvatura:

$$\begin{aligned} k > 0 &\Rightarrow \sum_i \Omega_i > 1 \Rightarrow \text{Universo Fechado} \\ k = 0 &\Rightarrow \sum_i \Omega_i = 1 \Rightarrow \text{Universo Plano} \\ k < 0 &\Rightarrow \sum_i \Omega_i < 1 \Rightarrow \text{Universo Hiperbólico} \end{aligned}$$

Podemos escrever também uma relação entre o parâmetro de Hubble e os parâmetros de densidade para o modelo cosmológico padrão. Como vimos, nesse modelo o universo é composto por matéria não-relativística, radiação e energia do vácuo. Assumindo que a constante de curvatura é arbitrária e utilizando as equações (2.20), (2.21),

(2.22) e (2.15), chegamos a:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \Omega_{m0}x^{-3} + \Omega_{r0}x^{-4} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k x^{-2}, \quad (2.28)$$

onde  $x \equiv a/a_0$ .

A partir das equações (2.15) e (2.16) obtemos uma equação para a aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_i(1 + 3w_i) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.29)$$

Note que a equação anterior não possui o termo referente à curvatura ( $k$ ), o que nos permite usá-la sem que tenhamos nenhum conhecimento da geometria do universo. Se estivermos considerando um universo dominado por energia escura, ou seja,  $w_{\Lambda} < -\frac{1}{3}$ , teremos  $\ddot{a}$  positivo o que significa que o universo está acelerando; o mesmo ocorre para o caso da constante cosmológica, sendo ela suficientemente positiva. Esses casos estão em acordo com as recentes observações de SNe Ia, que apontam para um universo em fase acelerada ([1], [2], [34], [35]).

Por fim, vamos definir outro importante parâmetro cosmológico, o parâmetro de desaceleração  $q(t)$ , como:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (2.30)$$

sendo a principal função desse parâmetro indicar a dinâmica de expansão do universo. Por exemplo, se  $q_0 > 0$  temos  $\ddot{a} < 0$  e o estado atual do universo seria uma expansão desacelerada. Por outro lado, se  $q_0 < 0$  temos  $\ddot{a} > 0$ , e portanto, o universo se encontraria em uma fase de expansão acelerada.

A evolução do fator de escala com o tempo para as três possíveis curvaturas, quando o universo é composto apenas por matéria, ou seja,  $\Lambda = 0$  e  $p = 0$ , pode ser vista na figura (2.4, esquerda). Note que, no caso de um universo fechado, o fator de escala atinge um máximo e em seguida decai até atingir  $a(t) = 0$ , o que é conhecido como *Big Crunch*. Já nos casos do universo ser aberto ou plano, o fator de escala expande indefinidamente. Quando incluímos a constante cosmológica, surge uma gama de possibilidades, que vai desde o modelo estático de Einstein até modelos sem *Big Bang*. O comportamento do fator de escala para alguns modelos desse tipo podem ser vistos na figura (2.4, direita), onde  $t_H = H_0^{-1}$ .

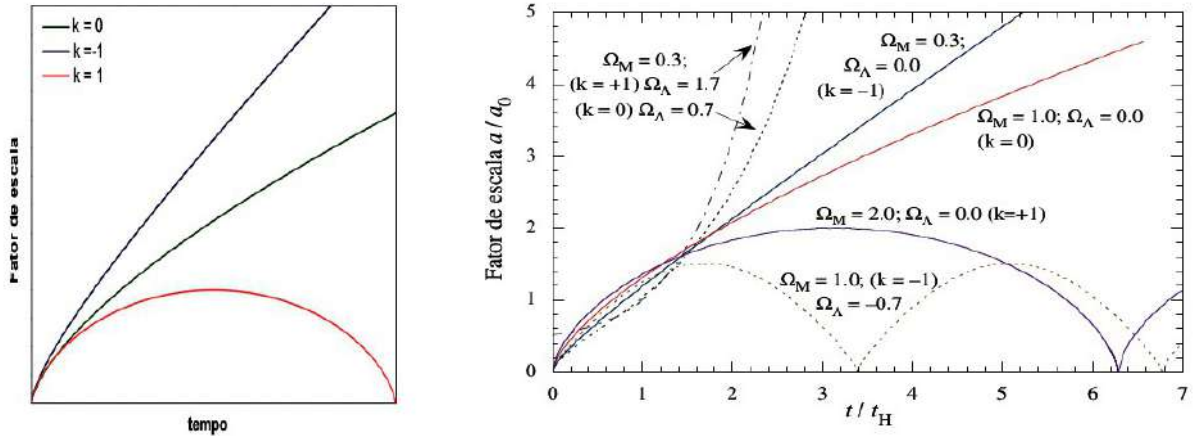


Figura 2.4: À esquerda temos a evolução do fator de escala para um universo apenas com matéria nos casos: plano,  $k = 0$ , fechado,  $k = 1$ , e hiperbólico,  $k = -1$ . À direita temos a evolução do fator de escala para outros modelos.

## 2.3 O Modelo do *Big Bang*

O modelo do *Big Bang* ou Modelo Cosmológico Padrão (MCP), como também é conhecido, é o modelo atual que melhor descreve a origem e evolução do universo. Segundo ele, o universo se originou de um estado com densidade e temperatura elevadas, em um volume incrivelmente pequeno, e expande adiabaticamente até os dias de hoje, de modo que tudo no cosmos, todas as estruturas formadas e em formação, evoluíram daquele estado inicial até a forma atual.

Existe, contudo, uma ideia errônea associada ao nome *Big Bang*, à analogia feita aos fenômenos explosivos comuns. Notemos, porém, que em uma explosão ocorre a expansão súbita de um fluido contido em um espaço pre-existente, ou no interior de outro fluido, o que não é o caso da expansão inicial do universo, uma vez que, a expansão inicial afetou não só a matéria, mas a própria estrutura do espaço-tempo [36].

O modelo do *Big Bang* prediz alguns fatos que foram observados e hoje constituem seus pilares. São eles: a recessão de galáxias, a abundância primordial dos elementos leves e a radiação cósmica de fundo. Quanto ao primeiro pilar, Edwin Hubble em 1929, observou a expansão do universo ao medir as distâncias de uma amostra de galáxias próximas e obter uma relação linear entre as distâncias ( $d$ ) e a velocidade de recessão ( $v$ ),

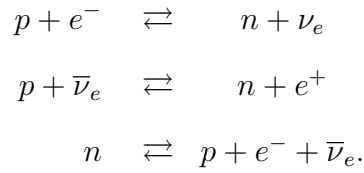
$$v = H(t)d \quad (2.31)$$

indicando que a velocidade de afastamento é diretamente proporcional à distância entre a galáxias.

Os dois últimos pilares serão enfatizados nas sub-seções seguintes, assim como, serão abordadas as implicações que as observações astronômicas recentes causaram na descrição do universo.

### 2.3.1 Nucleossíntese Primordial

O processo de formação dos elementos leves no universo primordial deve ter acontecido entre  $t \approx 0.01s$  e  $t \approx 100s$ , logo após a fase da bariogênese, quando o que existia era uma extremamente quente sopa cósmica de partículas elementares. Devido à alta densidade e temperatura desse plasma primordial, como é mais comumente conhecido, a primeira etapa da nucleossíntese se deu com a criação de novos nêutrons a partir das seguintes reações de equilíbrio,



À medida em que o universo expande e sua temperatura diminui, ao atingir valores abaixo de 0.8 MeV, a taxa de produção de prótons cessa pois as reações de equilíbrio deixam de existir, tanto devido a uma redução no suprimento de neutrinos como dos pares pósitron-elétron, que são quem sustentam tais reações. Nesse ponto, aproximadamente em um tempo de  $t = 2.7s$ , a fração de nêutrons congelou no valor de  $\frac{N_n}{N_p} \simeq 0.20$  [36]. Caso os nêutrons ficassem intactos no meio, sua fração decairia rapidamente a zero, e então o universo hoje seria constituído apenas por prótons, elétrons, neutrinos e fótons. Contudo, quando a temperatura do universo cai pra 0.1 MeV é viabilizada uma outra reação de equilíbrio que fixa o nêutron no núcleo do Deutério,



A formação do deutério ( $D$ ), por sua vez, viabilizou a formação do hélio ( ${}^4He$ ) e praticamente todo o deutério que havia surgido se transformou no  ${}^4He$  que observamos hoje.



Como pode ser percebido, o processo da nucleossíntese depende fortemente da temperatura, da taxa de expansão e da taxa de interação entre as partículas. À medida em que a temperatura cai, a pressão do plasma não é mais suficiente para a produção de elementos pesados. Assim, as condições do plasma primordial permitiram apenas a produção de elementos leves, tais como: deutério ( $D$ ), hélio-3 ( ${}^3He$ ), hélio ( ${}^4He$ ) e lítio ( ${}^7Li$ ), e ainda uma pequena quantidade de berílio ( $Be$ ) e boro ( $B$ ).

Devido a síntese dos elementos ter cessado, as frações dos elementos leves presentes no final da nucleossíntese é aproximadamente igual as frações presentes hoje no Universo, logo, medidas da abundância desses elementos fornecem um importante teste para os modelos cosmológicos. A formação dos elementos pesados somente ocorreu, posteriormente, através das reações nucleares no interior de estrelas. Previsões da nucleossíntese apontam que a parte bariônica do universo é constituída de 74% de Hidrogênio ( ${}^1H$ ), 25% de hélio ( $He$ ) e cerca de 1% de elementos mais pesados.

A abundância do hélio, medida por sua fração em massa é de  $Y = 0.26$  [36], resultado que está em pleno acordo com as observações que apontam para  $0.23 < Y < 0.3$  em  $(1\sigma)$  [3]. As abundâncias relativas dos elementos leves dependem ainda dos valores da razão fóton-bárion ( $n_{\gamma b} = 2 - 6.10^{-10}$ ) e do número de famílias de neutrinos ( $N_{\nu} < 3.9$ ) ([37], [38]), de modo que, a partir dessas informações e sabendo que a temperatura da radiação cósmica de fundo é estimada como  $T_0 = 2.75 \pm 0.001K$  [39], é possível estimar a componente bariônica do universo. De acordo com o WMAP<sup>3</sup> 9 anos, temos  $\Omega_b = 0.0463 \pm 0.0024$  para o modelo  $\Lambda CDM$ <sup>4</sup> [40].

Analisando o parâmetro  $n_{\gamma b}$  pode-se concluir que toda a massa que observamos na forma de galáxias é àquela que necessitamos para justificar a quantidade de elementos leves criados na nucleossíntese primordial, contudo, essa quantidade é insuficiente para fornecer uma densidade crítica que nos permita adotar o modelo plano, de modo que, se houver uma componente adicional de matéria no universo que nos forneça  $\Omega_T = 1$ , esta deve ser necessariamente não-bariônica [36].

---

<sup>3</sup>Do inglês, *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*.

<sup>4</sup>Do inglês, *Lambda Cold Dark Matter*. É o modelo cosmológico mais simples, que está em acordo com todas as observações. O termo  $\Lambda$  indica a constante cosmológica como parte de um termo da energia escura.

### 2.3.2 Radiação Cósmica de Fundo

Como comentado anteriormente, invertendo o sentido do tempo e indo até um passado muito remoto, o que veríamos seria um universo extremamente quente e denso, assim como diz o modelo do *Big Bang*, capaz de manter a matéria bariônica completamente ionizada, com os elétrons livres tornando o universo opaco. Como sabemos, um corpo quente e denso em equilíbrio, produz uma radiação de corpo negro. Assim os fótons que preenchiam o universo primordial deveriam apresentar um espectro desse tipo.

George Gamow (1904-1968), Ralph Asher Alpher (1921-2007) e Robert Herman (1922-1997) foram os primeiros a prever um fundo de radiação, em 1948, que seria a radiação remanescente do estado quente em que o universo se encontrava quando se formou, ou ainda, do estado em que o universo se encontrava quando ficou transparente (cerca de 300 mil anos após o início) [41]. Além disso, Alpher e Herman foram capazes de estimar a temperatura da RCF como sendo de  $5K$ .

Apenas em 1964, e por acaso, a radiação cósmica de fundo foi observada por dois rádio-astrônomos da Bell Laboratórios, Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1936-), enquanto testavam o desempenho de antenas de comunicação, fato que levou os dois a receberem o Prêmio Nobel de Física de 1978. O que eles observaram foi um “excesso de ruído” no céu, proveniente de todas as direções, mais ou menos isotrópico e com espectro térmico com temperatura bem definida e dada por  $T_0 \approx 3K$  [42]. Devido sua distribuição isotrópica e sua intensidade, várias ordens de grandeza maior do que qualquer erro sistemático possível, eles concluíram que sua origem deveria ser externa ao local da medida.

Paralelamente, Robert H. Dicke (1916-1997), Phillip J. Peebles (1935-), Peter G. Roll e Dennis T. Wilkinson estavam trabalhando em um projeto para construir uma antena capaz de medir o fundo de radiação previsto por Gamow, mas foram surpreendidos com os resultados de Penzias e Wilson. Ambos, publicaram seus resultados no mesmo volume do *Astrophysical Journal*. Os primeiros mostrando seus resultados do excesso de emissão observado [42], e Dicke e seus colaboradores apresentando a interpretação do excesso como a detecção da radiação remanescente do *Big Bang* [43].

Devido o equilíbrio térmico, a RCF deveria manter um espectro de corpo negro

mesmo posteriormente, quando em consequência da expansão do universo, sua temperatura diminuiria. Assim, a radiação de corpo negro que preenche o universo atualmente, pode ser interpretada como um remanescente da época na qual o universo era quente e denso o suficiente para ser opaco. Uma forma de entender melhor a RCF é fazer a distinção entre três épocas relacionadas na história do universo:

- *Recombinação*: ocorreu quando a densidade numérica de íons tornou-se igual à densidade de átomos neutros e marca o instante em que a matéria bariônica deixa de ser um plasma completamente ionizado e passa a ser um gás de átomos neutros;
- *Desacoplamento*: foi o instante no qual a taxa de espalhamento de fótons e elétrons tornou-se menor do que a taxa de expansão de Hubble, marcando o momento em que o universo se torna transparente;
- *Último espalhamento*: é definido como o instante em que um típico fóton da RCF sofre seu último espalhamento com um elétron. A superfície de último espalhamento é aquela a partir da qual os fótons tem se propagado sem sofrer nenhum espalhamento posterior por elétrons.

Desde que foi descoberta, vários satélites foram lançados no intuito de conhecer as propriedades da RCF. Podemos citar o pioneiro, COBE<sup>5</sup>, lançado em 1989, a bordo do qual estava o FIRAS<sup>6</sup>, que confirmou que a RCF tinha um preciso espectro de corpo negro com temperatura estimada de  $T = 2,726 \pm 0.01K$  (fig. 2.5) [44].

Através das medidas da RCF nós podemos acessar todas as informações contidas na superfície de último espalhamento. Como antes da recombinação os fótons da RCF estavam acoplados à matéria, qualquer anisotropia observada hoje na RCF indica uma sobredensidade na matéria. Medidas dessas sobredensidades foram inicialmente medidas pelo COBE, mas medidas mais precisas foram obtidas pelo WMAP, como pode ser visto na figura (2.2) na subseção (2.2.1).

Essas pequenas inhomogeneidades na matéria foram amplificadas pela gravidade e são responsáveis pelas estruturas que vemos hoje no universo. Em termos matemáticos,

---

<sup>5</sup> Do inglês *Cosmic Background Explorer*

<sup>6</sup>Do inglês *Far Infrared Absolute Spectrophotometer*

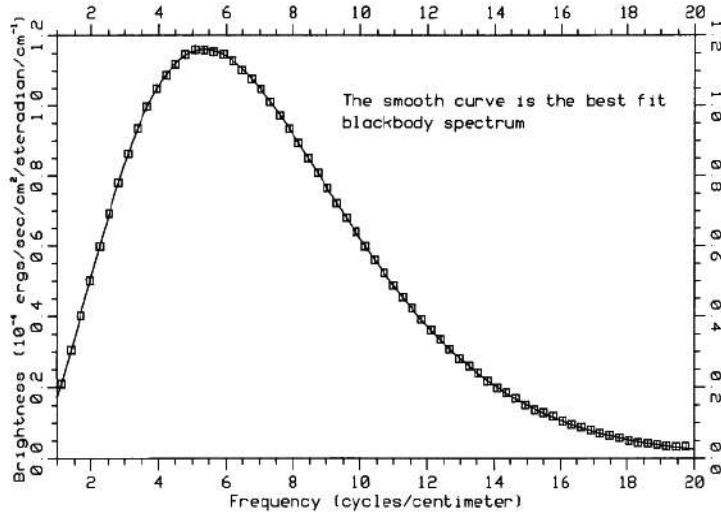


Figura 2.5: Espectro da RCF obtido pelo FIRAS (Mather *et al.*, 1990).

as flutuações de temperatura da RCF são definidas como:

$$\Delta_T(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0} \quad (2.33)$$

onde  $T(\theta, \phi)$  é a temperatura em um ponto arbitrário no céu e  $T_0$  é a temperatura média atual.

Um outro modo de estudar a RCF é através do seu espectro de potências (fig. 2.6), onde as posições e amplitudes dessas anisotropias no espectro revelam informações sobre parâmetros cosmológicos importantes. A posição do primeiro pico, por exemplo, está relacionada com o raio de Hubble na época da recombinação (tamanho da última superfície de espalhamento) e nos dará informações da curvatura espacial do universo e da evolução do fator de escala  $a(t)$  ([27], [28]).

O primeiro pico acústico na distribuição angular de potências ocorre em  $l = 220$ , com essa posição dependendo do conteúdo total do universo ( $\Omega_T$ ) e privilegiando um universo plano com grande precisão ( $\Omega_k \approx 0$ ). A amplitude do primeiro pico e a altura do segundo com relação ao primeiro é proporcional a densidade de bárions no universo e a fixa em 4,4% do conteúdo total do universo. Analisando a amplitude geral dos picos é possível obter informações de matéria total, de forma que, quanto mais matéria menor será a amplitude do pico acústico. Komatsu *et al.* (2011) indicam as contribuições da energia escura, dos bárions e da matéria escura, como sendo  $\Omega_\Lambda = 0.725 \pm 0.015$ ,  $\Omega_b = 0.0456 \pm 0.0015$  e  $\Omega_M = 0.224 \pm 0.013$ , respectivamente, o que está em acordo com

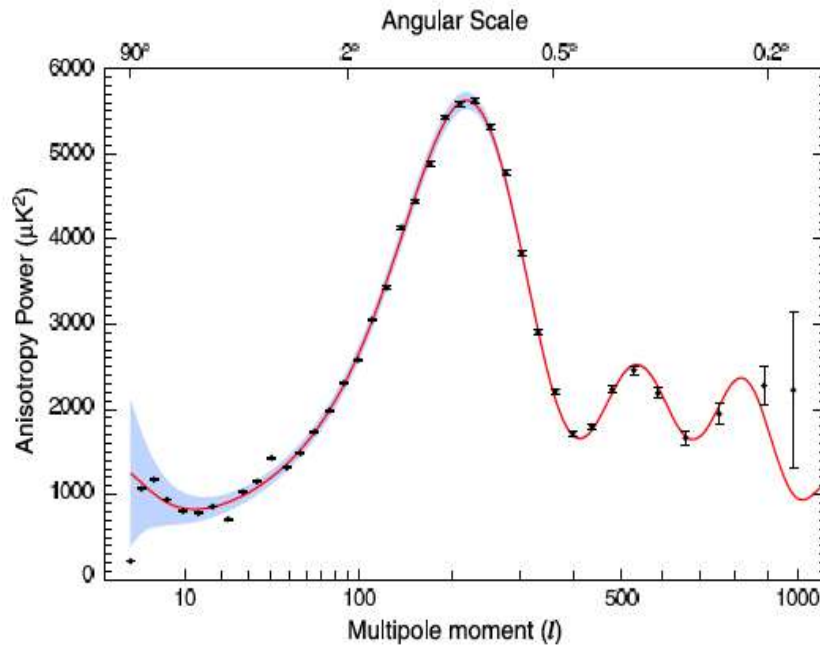


Figura 2.6: Espectro de potência da RCF obtido pelo WMAP. Retirado de NASA/WMAP Science Team.

o modelo padrão.

### 2.3.3 Matéria Escura

Como vimos na sub-seção (2.3.1), as considerações acerca da nucleossíntese primordial nos levam à conclusão de que a maior parte da massa do universo não está na forma de matéria bariônica ordinária, ou seja, núcleos de átomos e elétrons, mas está contida no que conhecemos como *matéria escura*, que se refere a qualquer forma de densidade de energia que somente é “sentida” através de seus efeitos gravitacionais. A primeira proposta de matéria escura se deu ainda na década de 1930, quando Zwicky (1933), analisando a dinâmica do aglomerado de Coma, observou anomalias na velocidade de dispersão das galáxias. Ele percebeu, aplicando o teorema do virial, que para interagir gravitacionalmente, sua massa deveria exceder a soma das massas das galáxias que o compunham, e o levou a considerar que a diferença entre a massa observada e a prevista seria devido à uma forma de matéria da qual não provinham fótons. Posteriormente, Smith (1936) estudando o aglomerado de Virgo confirmou a proposta de Zwicky.

Uma das principais formas de evidenciar a matéria escura é a partir do estudo das

curvas de rotação das galáxias espirais, que podem ser obtidas através das medidas da velocidade circular orbital  $v(r)$  em função do raio galáctico. Na década de 1970, Rubin e Ford (1970) mediram a curva de rotação da galáxia de Andrômeda (M31) e o esperado era que o comportamento da curva fosse igual à um corpo rígido para raios pequenos, uma vez que se esperava maior concentração de massa na região mais luminosa, e uma curva kepleriana<sup>7</sup> para raios médios e grandes.

O comportamento previsto para raios pequenos foi confirmado, mas a medida que o raio aumentava, a kepleriana não era obedecida e a curva permanecia praticamente constante. Esse mesmo comportamento é observado até hoje em várias galáxias, indicando uma outra componente massiva que é dominante em relação à matéria luminosa, nas partes mais externas das galáxias. Geralmente, se associa esta componente à um halo de matéria escura. Como exemplos, mostramos as curvas de rotação das galáxias espirais NGC3198 (fig. 2.7) e NGC6503 (fig. 2.8).

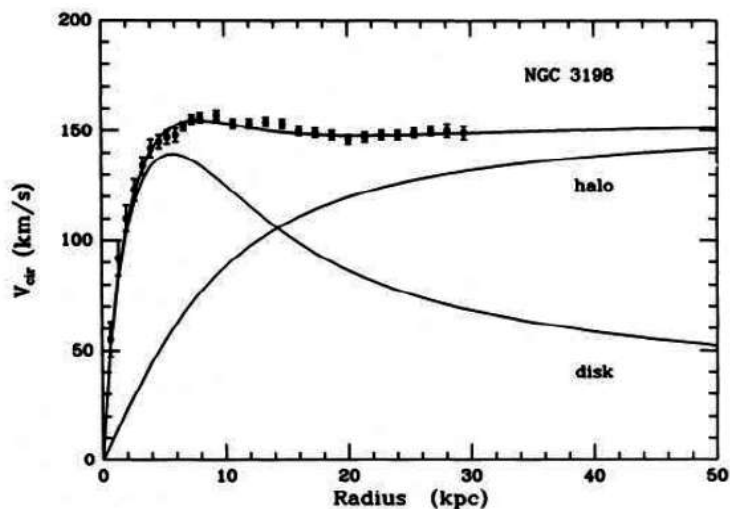


Figura 2.7: Curva de rotação da galáxia NGC3198. Os pontos representam as medidas da velocidade orbital em função do raio galáctico, e as curvas representam as contribuições das velocidades devido ao disco e ao halo (Van Albada *et al.*, 1985).

<sup>7</sup>Curva da velocidade de rotação, tal que,  $v(r) \propto r^{-1/2}$

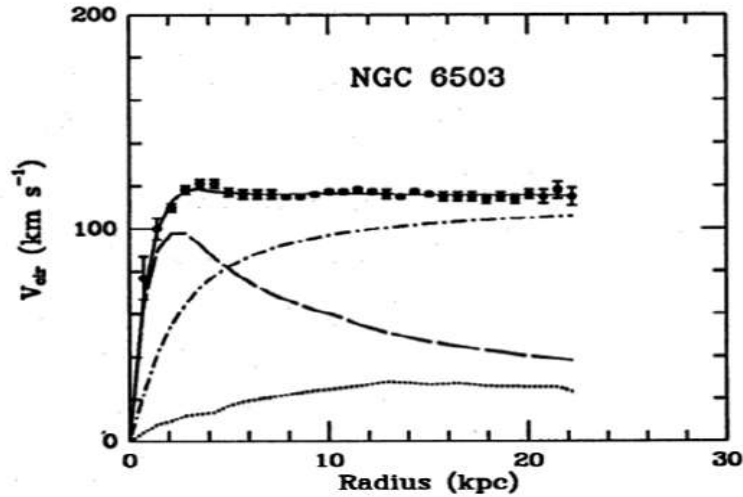


Figura 2.8: Curva de rotação da galáxia NGC6503. Novamente, os pontos representam as medidas da velocidade orbital em função do raio galáctico, e as curvas representam as contribuições das velocidades devido a cada uma das componentes, com o comportamento não kepleriano explicado pela presença do halo de matéria escura (Begeman *et al.*, 1991).

Uma vez que a matéria escura é detectada através de seus efeitos gravitacionais, é possível detectá-la em todas as escalas do universo. Em galáxias vimos que ela pode ser detectada através das curvas de rotação. Em aglomerados de galáxias, por sua vez, sua detecção acontece por meio lentes gravitacionais, medidas das velocidades orbitais ou observações da fração de massa do gás intra-aglomerado.

O aglomerado 1E0657-558 ou *Bullet Cluster*, que é na verdade o resultado da colisão de dois aglomerados ainda em andamento, nos traz claras evidências da existência de matéria escura [50]. Observações dos mapas de potenciais, obtidos através da técnica de lentes gravitacionais fortes e fracas, mostraram que o centro de massa total de cada aglomerado não acompanhava as componentes luminosas, fato que sugere uma componente não-bariônica, uma vez que o maior potencial corresponde à região mais “escura” do aglomerado (fig. 2.9).

A necessidade da matéria escura surge também quando analisamos o crescimento das perturbações primordiais, previstas pelo modelo do *Big Bang*. Se o crescimento de tais perturbações fosse apenas devido os bárions, as flutuações de temperatura da RCF deveriam ser aproximadamente cem vezes menores do que as observadas [3]. Além disso, para termos as estruturas observadas hoje faz-se necessário a presença de uma componente não-bariônica, que, por não interagir com a radiação, possibilita que o processo de aglomeramento se inicie após a (equipartição) e também para que já existam poços de



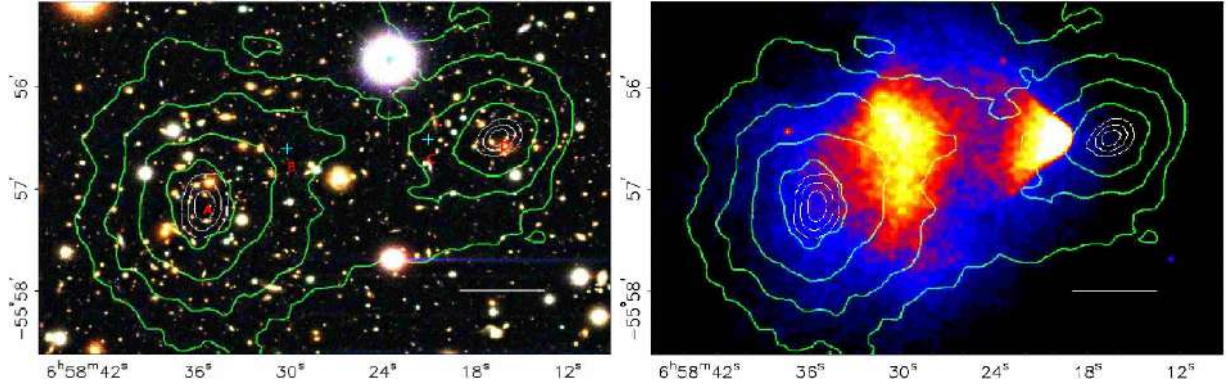


Figura 2.9: O aglomerado 1E0657-558 visto no óptico (imagem à esquerda) e em raios-X (imagem à direita). Note que os contornos do potencial gravitacional estão separados das componentes luminosas, indicando a existência de matéria escura (Clowe *et al.*, 2006).

potencial suficientemente grandes nessa época para desenvolver as perturbações.

Uma vez afirmada a necessidade da matéria escura, surgem duas vertentes quanto ao seu tipo: a matéria escura fria (CDM<sup>8</sup>) e a matéria escura quente (HDM<sup>9</sup>). A primeira sendo constituída por partículas não-relativísticas e a segunda por partículas relativísticas. A diferença entre elas surge quando vamos analisar a formação e evolução das estruturas do universo.

Os modelos com HDM apagam as flutuações de pequena escala na época da formação das estruturas e nesse contexto as estruturas em grande escala seriam formadas primeiro, enquanto as galáxias seriam formadas apenas posteriormente, por meio da fragmentação dessas. Todavia, esse cenário vai de encontro com as observações, que indicam um esquema *bottom-up* para a formação de estruturas, ou seja, primeiro galáxias, seguida pelos aglomerados e superaglomerados. Por outro lado, modelos com CDM conseguem formar as pequenas flutuações que mais tarde podem se combinar e formar as grandes estruturas, fato que está em acordo com o cenário hierárquico que descreve as observações.

### 2.3.4 Energia Escura

Como sabemos, o modelo do *Big Bang* nos diz que o Universo surge de um estado muito denso e quente e está em expansão desde então. Mas, a primeira constatação

<sup>8</sup>Do inglês *Cold Dark Matter*

<sup>9</sup>Do inglês *Hot Dark Matter*



observacional somente ocorreu quando Hubble mediu a velocidade de recessão de galáxias próximas, como visto anteriormente. Foi evidenciado por ele que estas medidas obedeciam uma relação linear, indicando que as galáxias se afastam umas das outras, e todas da nossa galáxia, com velocidade proporcional à distância em que se encontram de nós. Todavia, o fato que chocou os astrônomos no ano de 1998 foi a descoberta de que essa expansão, na verdade, estaria passando por uma fase acelerada, sendo este um conceito contra-intuitivo, uma vez que se pensava que a expansão do universo seria desacelerada devido os efeitos gravitacionais.

A comprovação da expansão acelerada ocorreu quando dois grandes grupos, o *Supernova Cosmology Project* (SCP) [2] e o *High-z Supernova Search Team* (HZT) [1], que trabalhavam independentemente, apresentaram resultados das observações de Supernovas do tipo Ia. Esperava-se que o brilho das supernovas fosse maior do que os seus *redshifts* indicariam, implicando em uma expansão desacelerada, mas o que foi observado foi um brilho mais fraco do que o esperado, indicando assim que o universo estaria em expansão acelerada.

O SCP analisou a relação entre luminosidade aparente e *redshift* para 42 SNe Ia em uma faixa de  $0.10 < z < 0.83$ , juntamente com um conjunto de 18 supernovas próximas, de outra fonte de pesquisa, em baixos *redshifts*  $z < 0.1$ . O resultado original da construção do diagrama de Hubble pode ser visto na figura (2.10). O melhor ajuste para a densidade de matéria em um universo plano encontrado pelo SCP foi de  $\Omega_m = 0.28_{-0.08}^{+0.09}$ , favorecendo o modelo  $\Lambda$ CDM, e foi descartado com um nível de confiança de 99% o caso  $\Omega_\Lambda = 0$ . É possível também encontrar o parâmetro de desaceleração a partir dos resultados anteriores,  $\Omega_m = 0.28$  e  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ . O valor obtido por eles eles foi negativo ( $q_0 < 0$ ), indicando que a expansão do universo está acelerando.

O HZT, por sua vez, originalmente analisaram 16 SNe Ia de altos *redshifts*,  $0.16 < z < 0.97$ , incluindo duas do SCP, mais 34 SNe Ia próximas, e concluíram que  $\Omega_\Lambda > 0$  com 99.7% de confiança, mas sem qualquer suposição sobre a curvatura espacial. Seu resultado original pode ser visto na figura (2.11). O melhor ajuste encontrado para uma cosmologia plana foi de  $\Omega_m = 0.28 \pm 0.10$  e  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ , o que resulta em uma idade de  $14.2 \pm 1.5 \times 10^9$ . Supondo ainda um método conservador eles puderam estimar o parâmetro de desaceleração  $q_0 < 0$ , indicando novamente uma expansão acelerada.

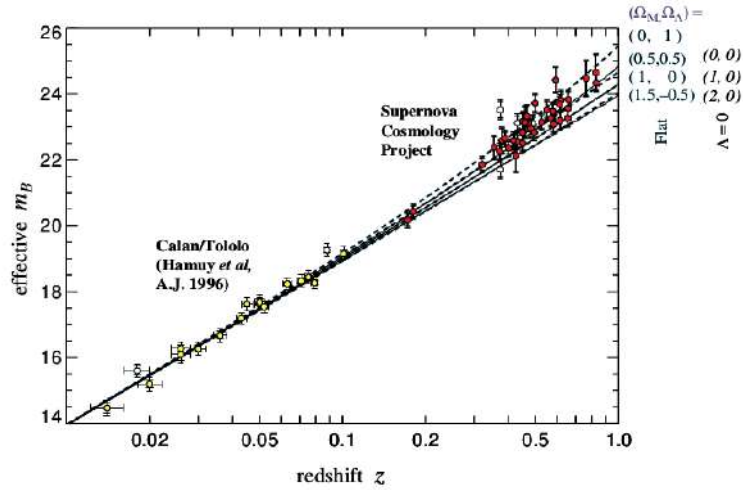


Figura 2.10: Evidência para energia escura encontrada pelo *Supernova Cosmology Project* (Perlmutter *et al.*, 1999).

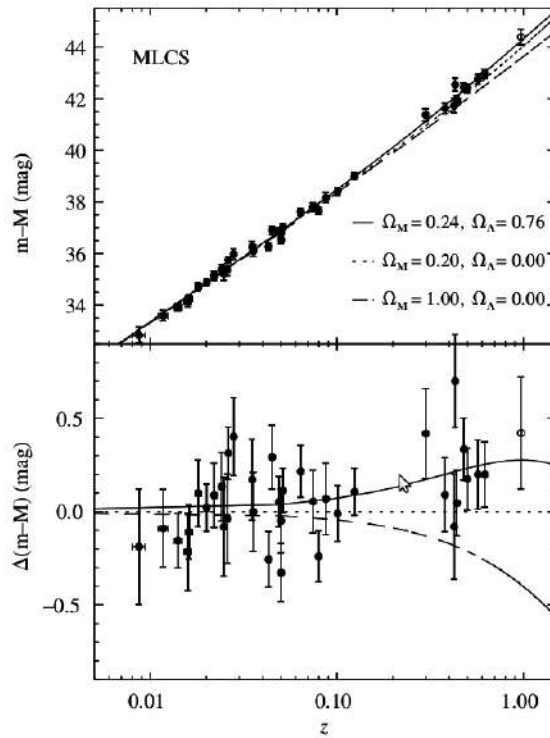


Figura 2.11: Evidência para energia escura encontrada pelo *High Redshift Supernova Search Team* (Riess *et al.*, 1998).

As observações de uma expansão acelerada são consistentes com a existência de uma energia do vácuo constante, mas não provam que essa densidade de energia é realmente constante. Olhando para a eq.(2.29), percebe-se que a existência da expansão acelerada

obriga, contudo, que a maior parte da densidade de energia do universo esteja numa forma que tenha  $\rho + 3p < 0$ , ao contrário da matéria comum ou radiação. Este tipo energia recebe o nome de **energia escura**.

A conclusão de que a energia escura compõe grande parte da energia do universo vem sendo corroborada através de outros indicadores, como por exemplo, a RCF [3], as Oscilações Acústicas dos Bárions (BAO<sup>10</sup>) [52] e recentes catálogos de SNe Ia [53]. Contudo, a natureza da energia escura é ainda um dos maiores desafios atuais da física e cosmologia.

Como sua função é acelerar a expansão do universo, pode ser bem caracterizada por uma pressão negativa que tem o efeito semelhante ao de uma força em larga escala que age contrária à gravidade. Atualmente existem diversos candidatos à energia escura, mas nenhum foi considerado como modelo padrão. Dentre os principais podemos citar a constante cosmológica  $\Lambda$  e a matéria  $X$ , componente extra caracterizada por uma equação de estado do tipo  $p = \omega_X \rho$  com  $-1 \leq \omega_X \leq 0$ .

Uma forma alternativa de explicar a expansão do universo determinada pelas SNe Ia seria através dos seguintes métodos:

- Assumindo a TRG e o princípio cosmológico, mas mudando a componente escura  $\Lambda$  por outra componente também com pressão negativa para obter a aceleração, ou ainda, supor a criação de matéria através de flutuações quânticas do campo gravitacional como têm proposto [54], [55] e [56];
- Utilizar modelos inomogêneos de universo, ou seja, assumir a TRG e a isotropia mas não requerer a homogeneidade, o que leva à métricas distintas da métrica de Friedmann ([57], [58], [59], [60], [61]);
- Utilizar modelos com  $f(R)$  ([62], [63], [64], [65]; [66], [67], [68], [69], [70]) ou modelos de branas ([71], [72], [73]).

---

<sup>10</sup>Do inglês *Barionic Acoustic Oscillations*

## 2.4 Aspectos Observacionais

### 2.4.1 Redshift Cosmológico

A maioria das observações de objetos astronômicos são feitas a partir da análise de sinais de luz. Assim, torna-se importante saber como os fótons se propagam em um universo homogêneo e isotrópico para, então, podermos discutir os aspectos observacionais que nos indicarão a evolução do universo.

Como vimos, um bom indicador de que o universo está em expansão, contração ou se é estacionário, é o fator de escala. Mas, ainda não sabemos como medi-lo ou qual sua forma de evolução, para isso devemos fazer uso das observações de desvio nas frequências de linhas espectrais.

Sem perda de generalidade, para calcular estes desvios de frequência, consideremos um sinal de luz se propagando até a origem ao longo da direção radial, de modo que,  $d\theta = d\phi = 0$  na equação (2.11). Além disso, como os fótons seguem geodésicas nulas, temos  $ds = 0$  de acordo com a expressão (2.11) e suas trajetórias podem ser escritas como:

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.34)$$

Para um raio de luz que esteja vindo em direção à origem a partir de uma fonte distante,  $r$  diminui à medida em que  $t$  aumenta. Assim, devemos escolher o sinal negativo na equação (2.34). Admitindo que a luz é emitida por uma fonte na coordenada comóvel  $r_1$  em um tempo  $t_1$ , ela chegará na origem ( $r = 0$ ) num tempo posterior  $t_0$ , dado por:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.35)$$

Usando a definição de distância própria, dada pela equação (2.12), e definindo a variável  $\tau$  como:

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.36)$$

obtemos:

$$\tau(t_0) - \tau(t_1) = \frac{d(r_1, t_1)}{a(t_1)} \quad (2.37)$$

onde o lado direito da equação anterior é definido como a distância comóvel entre um observador na origem e uma fonte em  $(r_1, \theta, \phi)$ .

Uma vez que a distância comóvel entre dois observadores em repouso e a origem não muda com o tempo, se a fonte emite uma segunda crista de onda em um tempo  $t_1 + \delta t_1$ , ela chega a origem em um tempo  $t_0 + \delta t_0$  dado por:

$$\tau(t_0 + \delta t_0) - \tau(t_1 + \delta t_1) = \frac{d(r_1, t_1 + \delta t_1)}{a(t_1 + \delta t_1)}. \quad (2.38)$$

Combinando as equações (2.37) e (2.38), temos:

$$\tau(t_0 + \delta t_0) - \tau(t_0) = \tau(t_1 + \delta t_1) - \tau(t_1) \quad (2.39)$$

Como  $\delta t_1 \ll t_1$  e  $\delta t_0 \ll t_0$ , pois o período típico de um sinal de luz é da ordem de  $10^{-14}$ s, e usando a definição de  $\tau$ , obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}. \quad (2.40)$$

Lembrando que os sinais são cristas de onda subseqüentes, a frequência é  $\nu_1 = 1/\delta t_1$ , e a frequência observada é  $\nu_0 = 1/\delta t_0$ , então:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (2.41)$$

Ou em termos do comprimento de onda  $\lambda_1 = c\delta t_1$  e do comprimento de onda observado  $\lambda_0 = c\delta t_0$ , como:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.42)$$

O parâmetro *redshift* é definido como a mudança relativa do comprimento de onda observado e do emitido pela fonte,  $z \equiv (\lambda_0 - \lambda_1)/\lambda_1$ , assim:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.43)$$

Das equações (2.41) e (2.42) podemos fazer ainda duas observações:

- Em um universo em expansão, o fator de escala observado é maior do que o emitido ( $a(t_0) > a(t_1)$ ) e então temos um *redshift*, ou seja, uma diminuição na frequência observada por um fator  $a(t_1)/a(t_0)$ , o que é equivalente a um aumento no comprimento de onda pelo fator  $1 + z$ ;

- No caso de um universo se contraindo, teremos uma diminuição do fator de escala o que implica em um *blueshift*, ou seja, uma diminuição no comprimento de onda dada pelo fator (2.43).

Portanto, os casos em que  $z > 1$  correspondem a um *redshift* e quando  $z < 1$  temos um *blueshift*, indicando que as fontes estão se afastando ou se aproximando de nós, respectivamente, sendo este último caso devido a movimentos peculiares do objeto.

## 2.4.2 Medidas de Distância

Em Cosmologia existem diversas maneiras de se medir a distância entre dois pontos, uma vez que vivemos em um universo em expansão [74]. Podemos citar, como exemplos, a distância própria<sup>11</sup> ( $d$ ), a distância comóvel<sup>12</sup> ( $D_c$ ), a distância de luminosidade ( $D_L$ ) e a distância de diâmetro angular ( $D_A$ ). As duas primeiras, contudo, não são diretamente observadas e as duas últimas são passíveis de serem obtidas através das observações astronômicas. Considerando um universo estático temos,  $d = D_A = D_L$ . Mas, ao se admitir a expansão cósmica, estas medidas apresentam diferentes valores, como veremos a seguir.

### Distância de Luminosidade

A luminosidade aparente  $L_{ap}$  de uma fonte com luminosidade absoluta  $L_{abs}$ , *redshift*  $z$  e coordenada comóvel  $r_1$ , de qualquer tamanho é definida como [28]:

$$L_{ap} = \frac{L_{abs}}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)(1+z)^2}. \quad (2.44)$$

Agora podemos introduzir uma distância de luminosidade de modo que a relação entre luminosidade aparente e luminosidade absoluta permaneça a mesma, assim:

$$L_{ap} = \frac{L_{abs}}{4\pi D_L^2}, \quad (2.45)$$

---

<sup>11</sup>É definida como o intervalo ou comprimento da geodésica do tipo espacial, que liga as linhas de universo de dois observadores, um localizado na origem  $(0,0,0)$  e o outro em coordenadas genéricas  $(r, \theta, \phi)$ , no mesmo instante de tempo  $t$ .

<sup>12</sup>É definida como a distância própria num instante de tempo  $t$  dividida pelo fator de escala correspondente.

de onde obtemos a seguinte relação para  $D_L$ <sup>13</sup>

$$D_L = a(t_0)r_1(1+z). \quad (2.46)$$

Por outro lado, a distância de uma fonte observada hoje com *redshift*  $z$  pode ser calculada a partir da métrica FLRW, como sendo:

$$r(z) = S \left[ \int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right], \quad (2.47)$$

onde:

$$S[y] \equiv \begin{cases} \text{sen}(y), & \text{se } k = +1 \\ y, & \text{se } k = 0. \\ \text{senh}(y), & \text{se } k = -1 \end{cases} \quad (2.48)$$

Através de uma manipulação matemática podemos reescrevê-la apenas em função do *redshift* como:

$$r(z) = S \left[ \int_0^z \frac{dz'}{a_0 H(z')} \right] \quad (2.49)$$

ou

$$r(z) = S \left[ \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (2.50)$$

onde  $H(z) \equiv H_0 E(z)$ , e a expressão para  $E(z)$  pode ser obtida a partir da equação (2.28), de modo que:

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{0\Lambda} + \Omega_{0r}(1+z)^{-4} + \Omega_{0m}(1+z)^{-3} + \Omega_{0k}(1+z)^{-2}} \quad (2.51)$$

Por outro lado, utilizando o termo de curvatura,  $\Omega_{k0} = -k/a_0^2 H_0^2$ , para reescrever  $a_0 H_0$  na equação (2.50) em função de  $\Omega_{0k}$ , temos que:

$$a_0 r(z) = \frac{1}{\Omega_{0k}^{1/2} H_0} \sinh \left[ \Omega_{0k}^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (2.52)$$

sendo esta equação válida para qualquer curvatura. Além disso, quando  $\Omega_{0k} \rightarrow 0$  recuperamos a curvatura nula e, para o caso de  $\Omega_{0k} < 0$ , o argumento do seno hiperbólico é imaginário, e podemos usar o fato de que  $\sinh ix = i \sin x$  [28].

---

<sup>13</sup>A definição da equação (2.46) também pode ser obtida a partir do fluxo, como pode ser visto na seção (4.1)

Reescrevendo a expressão para  $D_L$  utilizando a equação anterior, temos que:

$$D_L = \frac{(1+z)}{\Omega_{0k}^{1/2} H_0} \sinh \left[ \Omega_{0k}^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (2.53)$$

A figura (2.12) nos mostra o comportamento da distância de luminosidade para diferentes modelos de universo.

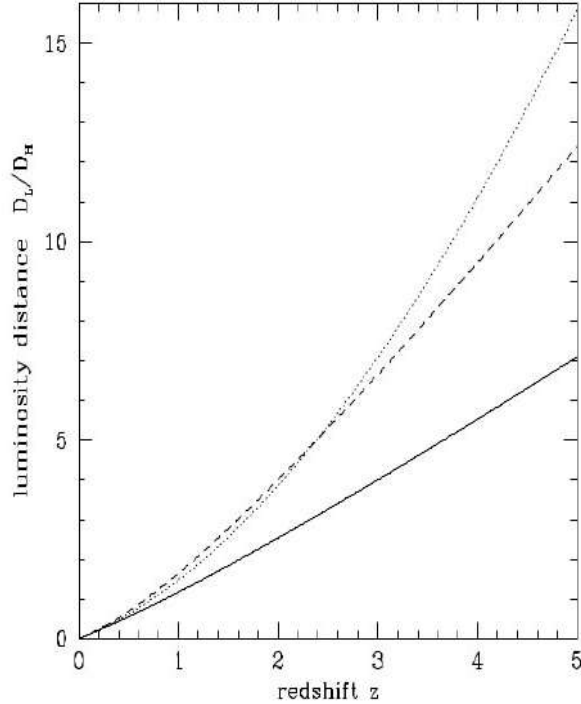


Figura 2.12: Distância de luminosidade adimensional ( $D_L/D_H$ , com  $D_H = cH_0^{-1}$  sendo a distância de Hubble). Cada curva representa um modelo de universo, a curva sólida possui  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(1, 0)$ , a curva pontilhada possui  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(0.05, 0)$  e a curva tracejada possui  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(0.2, 0.8)$  (Hogg, 1999).

### Distância de Diâmetro Angular

A distância de diâmetro angular, por sua vez, compara a dimensão física com o tamanho angular dos objetos astronômicos, e uma vez que o comprimento próprio de uma determinada fonte seja conhecido, este pode ser usado como régua padrão. Contudo, mesmo assumindo a expansão do universo, a régua padrão deve ser um corpo mantido agregado pela gravidade ou outros fatores de forma que suas dimensões não sejam modificadas com a expansão. Neste sentido, alguns estudos têm sido realizados para a utilização



de fontes de rádio ultracompactas pois considera-se que elas não sofrem efeitos evolutivos [75], ou que seu tamanho intrínseco evolue de acordo com a seguinte lei de potência  $D = D_0(1+z)^\alpha$  ([76], [77]).

Consideremos pois, uma fonte na coordenada radial comóvel  $r_1$  que emita luz num tempo  $t_1$  e é observada hoje subtendendo um pequeno ângulo  $\theta$ . É possível calcular seu tamanho intrínseco,  $D$ , a partir do elemento de linha (2.11), como sendo:

$$D = a(t_1)r_1\theta. \quad (2.54)$$

De maneira análoga à geometria euclidiana, a distância de diâmetro angular é definida como:

$$D_A = \frac{D}{\theta}, \quad (2.55)$$

e daí,

$$D_A = a(t_1)r_1. \quad (2.56)$$

Substituindo a equação (2.50) em (2.56) e utilizando a relação  $a(t_1) = a_0/(1+z)$ , obtemos:

$$D_A = \frac{1}{(1+z)} S \left[ \int_0^z \frac{1}{a_0 H_0} \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (2.57)$$

ou em função do termo de curvatura como:

$$D_A = \frac{1}{\Omega_{0k}^{1/2} H_0 (1+z)} \sinh \left[ \Omega_{0k}^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (2.58)$$

Por fim, comparando as equações (2.46) e (2.56), temos que a razão entre as distâncias de luminosidade e de diâmetro angular é simplesmente uma função do *redshift*:

$$\frac{D_L}{D_A} = (1+z)^2 \quad (2.59)$$

Em Cosmologia, a expressão  $D_L/D_A(1+z)^2 = 1$  é conhecida como relação de dualidade de distância<sup>14</sup> cuja validade tem sido testada na literatura através de diferentes

---

<sup>14</sup>A dedução completa desta relação pode ser encontrada no Cap. 4 e foi obtida partindo dos pressupostos de que o número de fótons é conservado e de que fonte e observador estão conectados por geodésicas nulas.

formas. No capítulo 4 encontraremos uma revisão bibliográfica acerca dos testes existentes, e no capítulo 5 teremos os resultados dos testes que elaboramos.

A figura (2.13) nos mostra o comportamento da distância de diâmetro angular para diferentes modelos de universo. É importante notar que quando  $z \rightarrow \infty$ , a distância não cresce indefinidamente e sim sofre um decréscimo, o que equivale a um aumento no tamanho angular em  $z \approx 1$ , o que faz com que objetos mais distantes pareçam ter tamanho angular maior, ou seja, sua distância de diâmetro angular é menor embora esses objetos estejam de fato a uma distância maior do observador.

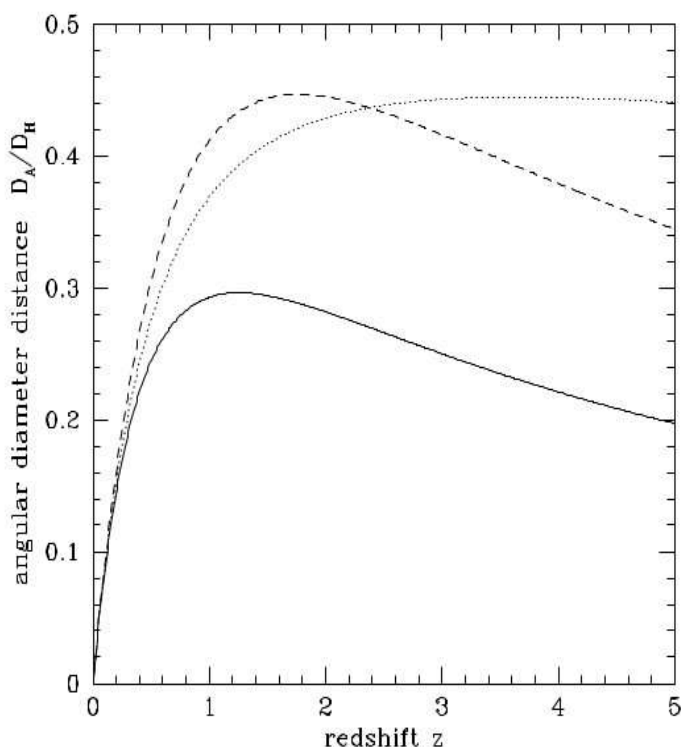


Figura 2.13: Distância de diâmetro angular adimensional ( $D_A/D_H$ ), onde cada curva representa um modelo de universo. A curva sólida possui  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(1, 0)$ , a curva pontilhada possui  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)=(0.05, 0)$  e a curva tracejada possui  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.2, 0.8)$  (Hogg, 1999).

### Módulo de Distância

Os astrônomos utilizam atualmente o sistema de magnitudes para medir luminosidade e fluxos, mas sua utilização remonta aos tempos da antiguidade, quando o astrônomo grego Hiparco (160-125 a.C.), no século II a.C., estabeleceu uma escala para a luminosidade das estrelas a olho nu, atribuindo 1 à mais brilhante e 6 às mais fracas.

Posteriormente, já no século XIX, Norman Robert Pogson (1829-1891) constatou que a percepção do brilho pelo olho humano obedecia uma lei logarítmica do tipo [78]:

$$m = A \log f + B, \quad (2.60)$$

com  $A$  e  $B$  sendo constantes, e  $f$  o fluxo. Ele verificou ainda que o fluxo correspondente a uma estrela de magnitude  $m = 1$  era 100 vezes maior que o fluxo de uma estrela com magnitude  $m = 6$ , de modo que:

$$m_1 - m_2 = A \log \left( \frac{f_1}{f_2} \right) \Rightarrow 1 - 6 = A \log \left( \frac{100f_2}{f_2} \right), \quad (2.61)$$

de onde obtemos  $A = -2,5$ . A constante  $B$ , por sua vez, define o zero da escala e geralmente é utilizada a magnitude aparente da estrela Vega.

A magnitude bolométrica<sup>15</sup> aparente de uma fonte de luz pode ser definida em termos do fluxo bolométrico de referência através da seguinte relação:

$$m = -2.5 \log \left( \frac{f}{f_x} \right), \quad (2.62)$$

com o fluxo de referência sendo  $f_x = 2,53 \cdot 10^{-8} W m^{-2}$ .

Por outro lado, a magnitude absoluta de uma fonte de luz será a magnitude aparente quando este objeto estiver a uma distância de  $10pc$  do observador. Assim, podemos definir a magnitude absoluta de uma fonte que esteja a  $10pc$  de distância com luminosidade  $L$  e valor de referência  $L_x$ , cujos fluxos sejam, respectivamente,  $f$  e  $f_x$ , como:

$$M \equiv -2.5 \log \left( \frac{L}{L_x} \right). \quad (2.63)$$

Subtraindo as equações (2.62) e (2.63), temos que:

$$m - M = -2.5 \log \left( \frac{L f_x}{f L_x} \right), \quad (2.64)$$

e utilizando a definição de distância de luminosidade em termos do fluxo<sup>16</sup>:

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}, \quad (2.65)$$

podemos reescrever a equação (2.64) como:

$$\mu \equiv m - M = 5 \log \left( \frac{D_L}{1Mpc} \right) + 25 \quad (2.66)$$

onde  $\mu$  é denominado módulo de distância e é a quantidade geralmente utilizada nos testes cosmológicos que utilizam medidas de magnitude.

<sup>15</sup>Grandeza relacionada a energia total emitida por uma estrela.

<sup>16</sup>Cuja definição completa poderá ser vista na seção 4.1, equação (4.22).

# Capítulo 3

## Observáveis Padrão

Neste capítulo, vamos discutir sucintamente algumas das características dos aglomerados de galáxias, assim como sua utilização como observável padrão. O pretexto para abordarmos os aglomerados de galáxias é que podemos obter dois tipos de medidas que são utilizadas em diferentes testes cosmológicos, a primeira delas é a fração de massa do gás ( $f_{gas}$ ), principalmente obtida a partir de observações do brilho superficial em raios-X, e a segunda é a medida da distância de diâmetro angular, a qual pode ser estimada através das medidas combinadas do brilho superficial em raios-X e do efeito Sunyaev-Zel'dovich. Nas próximas seções discutiremos em detalhes como estimar as medidas de fração de gás e as medidas de distância, tanto utilizando o ESZ + raios-X, como os dados da taxa de expansão do universo,  $H(z)$ .

### 3.1 Aglomerados de Galáxias

As galáxias raramente encontram-se isoladas no universo e tampouco estão distribuídas uniformemente no espaço, sua maioria (entre 60% e 70%) concentra-se em aglomerados, os quais contêm cerca de 50% de seus membros em uma região  $< 1Mpc$ , e cuja classificação é feita de acordo com o número de galáxias.

Os aglomerados pobres são estruturas com até  $\approx 10$  galáxias, principalmente do tipo espirais e irregulares, e são conhecidos como grupos. Por outro lado, os aglomerados ricos contêm entre  $10 - 10^2$  galáxias ligadas gravitacionalmente, sendo, portanto, as mai-

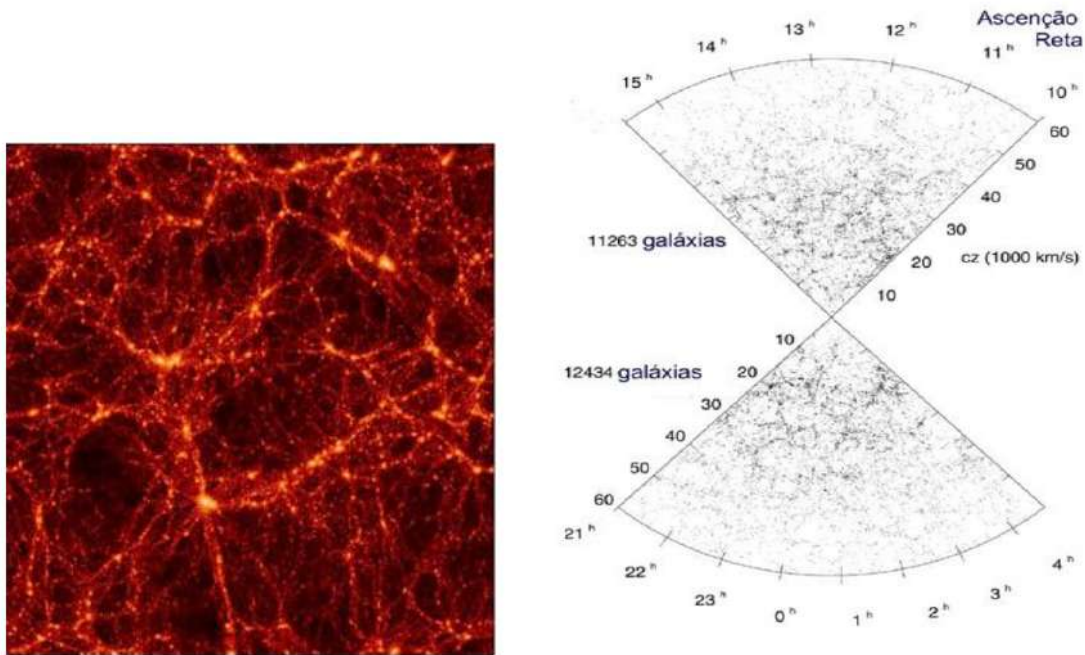


Figura 3.1: Na imagem à esquerda podemos ver uma simulação da estrutura filamentar do Universo, onde os pontos mais luminosos indicam os halos das galáxias gigantes e na intersecção dos filamentos pode-se observar a formação dos aglomerados de galáxias (Fonte: simulação realizada por Couchman, Universidade de Ontário, Canadá). Na imagem da direita temos a estrutura filamentar do universo observado (Fonte: *survey* realizado pelo LCO (*Las Campanas Observatory*)).

ores estruturas virializadas do Universo, com massas entre  $10^{14} - 10^{15}$  massas solares, e luminosidade na faixa de  $10^{43} - 10^{46} \text{ erg/s}$ . Sua emissão se dá principalmente em raios-X via bremsstrahlung térmico<sup>1</sup> e suas temperaturas giram em torno de  $1 - 10 \text{ KeV}$ .

Quanto à sua origem, os aglomerados de galáxias são o resultado das perturbações de densidade do Universo primordial. À medida em que essas perturbações aumentaram ao longo da evolução do Universo, por meio da atração gravitacional, essas estruturas tomaram a forma filamentar prevista por simulações computacionais, e que é observada atualmente, como podemos ver na figura (3.1).

Quanto à composição dos aglomerados temos que, 80% de sua massa é matéria escura que, por interagir apenas gravitacionalmente, é detectada através de seus efeitos dinâmicos e pelas lentes gravitacionais; as galáxias contabilizam com cerca de  $\approx 2 - 3\%$  da massa total e o gás do meio intra-aglomerado, que possui temperatura média da ordem de  $10^7 - 10^8 \text{ K}$  e densidade central de  $10^{-3} - 10^{-2} \text{ partículas/cm}^3$ , corresponde a cerca de

<sup>1</sup>Discutiremos este efeito com detalhes na próxima seção.

17 – 18% da massa total do aglomerado.

A detecção do MIA se dá por pelo menos três formas:

1. Efeito de pressão sobre o gás mais frio no interior das galáxias, figura (3.2);
2. Radiação *bremsstrahlung*: sendo o gás do MIA extremamente rarefeito e com temperaturas altas, ele é completamente ionizado e opticamente fino. Nestas condições os elétrons livres são espalhados pelos íons do gás, acarretando na emissão observada em raios-X;
3. Efeito Sunyaev-Zel'dovich: ocorre quando os fótons da radiação cósmica de fundo interagem com os elétrons do gás do MIA através do efeito Compton inverso, de modo que os elétrons perdem energia tornando os fótons que atravessam o aglomerado mais energéticos.

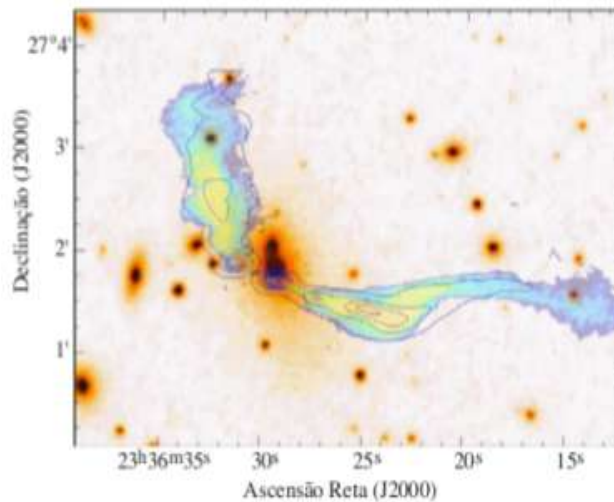


Figura 3.2: Emissão em rádio da galáxia elíptica NGC 7720 no aglomerado de Abell 2634. Os tons em azuis e com curvas de nível representam à emissão em rádio devido o movimento da galáxia em relação ao meio intra-aglomerado (Lima Neto, 2005).

É possível ainda a utilização dos aglomerados de galáxias como “régua padrão”. Neste sentido, a partir da suposição de que a fração de massa do gás em aglomerados é constante, ou seja, não evolui com o *redshift*, esta torna-se um bom observável para impôr limites sobre os parâmetros cosmológicos. A medida de  $f_{gas}$ , como veremos na próxima seção, pode ser obtida a partir dos perfis de densidade e temperatura do aglomerado, de modo que vai depender da distância de diâmetro angular na forma  $f_{gas} \propto D_A^{3/2}(z)$ , contudo, esta fração só será constante se o modelo adotado para obter  $D_A$  for o correto

([80], [81]).

### 3.1.1 Cálculo da Massa em Forma de Galáxias

A massa das galáxias pode ser inferida a partir de sua luminosidade total multiplicado pela razão massa-luminosidade, tal que [82]:

$$M_{gal} = L_{tot} \left( \frac{M}{L} \right). \quad (3.1)$$

Da relação de luminosidade, (2.44), apresentada na seção 2.4.2 temos que,

$$L_x \propto D_L^2,$$

com  $D_L$  sendo uma função dos parâmetros  $(z, h, \Omega_i)$ , equação (2.53).

Por outro lado, a razão massa-luminosidade é proporcional apenas ao parâmetro de Hubble ([80], [83]),

$$\frac{M}{L} \propto h.$$

Dessa forma,

$$M_{gal} \propto h D_L^2. \quad (3.2)$$

É importante enfatizar que, mesmo considerando um aglomerado rico, o qual contém uma grande quantidade de galáxias, a massa referente às galáxias contribui muito pouco para a massa total do aglomerado, com a maior parte da contribuição provinda da matéria bariônica vindo do gás do MIA.

### 3.1.2 Cálculo da Massa em Forma de Gás do MIA

O gás do meio intra-aglomerado é composto principalmente pelos elementos formados na nucleossíntese primordial (uma fração de  $\approx 0.58$  de hidrogênio e hélio) e pelo material ejetado no processo de formação de galáxias, incluindo traços estelares intergaláticos [84]. Os elementos pesados, que somam uma pequena contribuição, foram provavelmente produzidos por supernovas do tipo II [85].

Sabe-se que a massa de um gás ocupando um certo volume  $V$  é dada por:

$$M_{gas}(< V) = \int_V \rho_{gas} dV. \quad (3.3)$$

Por simplicidade, vamos supor que o gás apresenta simetria esférica. Assim:

$$M_{gas}(< V) = 4\pi \int_0^R \rho_{gas} r^2 dr. \quad (3.4)$$

Seguindo a abordagem de Sasaki (1996) e assumindo que a densidade do gás segue um modelo  $\beta$  isotérmico, com simetria esférica, a densidade de elétrons nesse modelo é escrita como:

$$n_e(r) = n_{e0} \left( 1 + \frac{r^2}{r_c^2} \right)^{-\frac{3\beta}{2}}, \quad (3.5)$$

onde  $n_{e0}$  e  $r_c$  são, respectivamente, a densidade de elétrons e o raio na região central e  $\beta$  é a energia por unidade de massa nas galáxias dividido pela energia por unidade de massa no MIA [86].

Como já foi argumentado, o gás do MIA tem origem no gás primordial e podemos considerar que ele é constituído apenas por hidrogênio e hélio. Uma vez desprezados os elementos pesados, obtemos as densidades do hidrogênio e hélio como sendo, respectivamente:

$$n_H = \left( \frac{2X}{1+X} \right) n_e(r) \quad (3.6)$$

e

$$n_{He} = \left[ \frac{1-X}{2(1+X)} \right] n_e(r), \quad (3.7)$$

onde  $X$  é a abundância do hidrogênio. Assim, usando o fato de que,

$$\begin{aligned} \rho_{gas} &= \rho_H + \rho_{He} \Rightarrow \\ \rho_{gas} &= (n_H + 4n_{He})m_H \Rightarrow \\ \rho_{gas} &= \frac{2n_{e0}m_H}{(1+X)} \left( 1 + \frac{r^2}{r_c^2} \right)^{-\frac{3\beta}{2}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

sendo  $m_H$  a massa do hidrogênio. Logo, a equação (3.4) torna-se:

$$M_{gas}(< V) = \frac{8\pi n_{e0}m_H}{(1+X)} \int_0^R \left( 1 + \frac{r^2}{r_c^2} \right)^{-\frac{3\beta}{2}} r^2 dr. \quad (3.9)$$



Definindo a variável  $x = r/r_c$ , obtemos:

$$M_{gas}(< V) = \frac{8\pi n_{e0} m_H r_c^3}{(1+X)} I_M(y, \beta), \quad (3.10)$$

onde

$$I_M(R/r_c, \beta) \equiv \int_0^{R/r_c} (1+x^2)^{-\frac{3\beta}{2}} x^2 dx. \quad (3.11)$$

A expressão (3.10) representa a massa em forma de gás do aglomerado e o nosso próximo passo será deduzir uma expressão para a massa total do aglomerado, uma vez que, na próxima seção deduziremos a fração de massa do gás, que é a razão entre a matéria em forma de gás e a matéria total do aglomerado, incluindo a matéria escura.

### 3.1.3 Cálculo da Massa Total de Um Aglomerado

Finalmente, vamos deduzir a massa total de um aglomerado, lembrando que esta quantidade engloba não só a matéria bariônica, mas também a matéria escura. Desta feita, assumindo um modelo com equilíbrio hidrostático e simetria esférica, a equação de Euler nos fornece [87]:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}, \quad (3.12)$$

em que  $G$  é a constante gravitacional de Newton e  $\rho$  a densidade de matéria em análise. Podemos ainda utilizar a equação para gases perfeitos, tal que,

$$p = \frac{\rho k_B T_G}{\mu m_H}, \quad (3.13)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $T_G$  é a temperatura do gás e  $\mu$  é o peso molecular médio do hidrogênio. Combinando as equações (3.12) e (3.13), obtemos:

$$M_{tot}(< R) = -\frac{k_B T_G R}{\mu G m_H} \left( \frac{d \ln \rho}{d \ln r} + \frac{d \ln T_G}{d \ln r} \right)_{r=R}. \quad (3.14)$$

Além disso, o sistema está em equilíbrio isotérmico,  $dT_G = 0$ , portanto:

$$M_{tot}(< R) = \frac{3\beta k_B T_G}{\mu G m_H} \left[ \frac{R^3}{(r_c^2 + R^2)} \right]. \quad (3.15)$$

## 3.2 Fração de Massa do Gás em Aglomerados de Galáxias

A fração de massa do gás de um aglomerado é definida como a razão entre a massa do gás e a massa total (matéria bariônica e matéria escura) do aglomerado, tal que,

$$f_{gas} = \frac{M_{gas}}{M_{tot}}. \quad (3.16)$$

Utilizando as equações (3.10) e (3.15), obtemos:

$$f_{gas} = n_{e0} \frac{8\pi m_H^2 \mu G}{3(1+X)\beta k_B T_G} \left[ \frac{(r_c^5 + r_c^3 R^2)}{R^3} \right] I_M(R/r_c, \beta), \quad (3.17)$$

com todos os parâmetros já definidos anteriormente. No entanto, um dos parâmetros observacionais da equação anterior não pode ser inferido observacionalmente, que é a densidade de elétrons na região central,  $n_{e0}$ . Uma maneira de resolver este problema é obter essa densidade através da radiação de *Bremsstrahlung*, como veremos a seguir.

### $f_{gas}$ via *Bremsstrahlung*

O desenvolvimento da astronomia de raios-X teve início na década de 1970 com o lançamento do satélite *UHURU* e as primeiras observações revelaram que os aglomerados de galáxias são as fontes estendidas mais luminosas de raios-X no céu ([88], [89], [90]) (fig. 3.3), onde os fótons emitidos, nessa faixa do espectro eletromagnético, possuem energias típicas da ordem de  $10^2 - 10^4 eV$ .

As observações em raios-X foram usadas inicialmente para restringir a fração de massa do gás nos aglomerados e, assim, definir um limite inferior para a fração de bárions no universo ( $\Omega_B/\Omega_M$ ) [91]. Mas, com a evolução dos instrumentos de observação mais detalhes puderam ser observados nos aglomerados como, por exemplo, a descoberta de sub-estruturas nos mesmos.

A radiação em raios-X térmica é uma ferramenta importante para o estudo de fontes cósmicas, onde os processos de alta energia são importantes. Exemplos desse tipo são a corona do Sol e das estrelas, *flares* solares e estelares, remanescentes de supernovas, variáveis cataclísmicas, discos de acreção em estrelas binárias e em torno de buracos

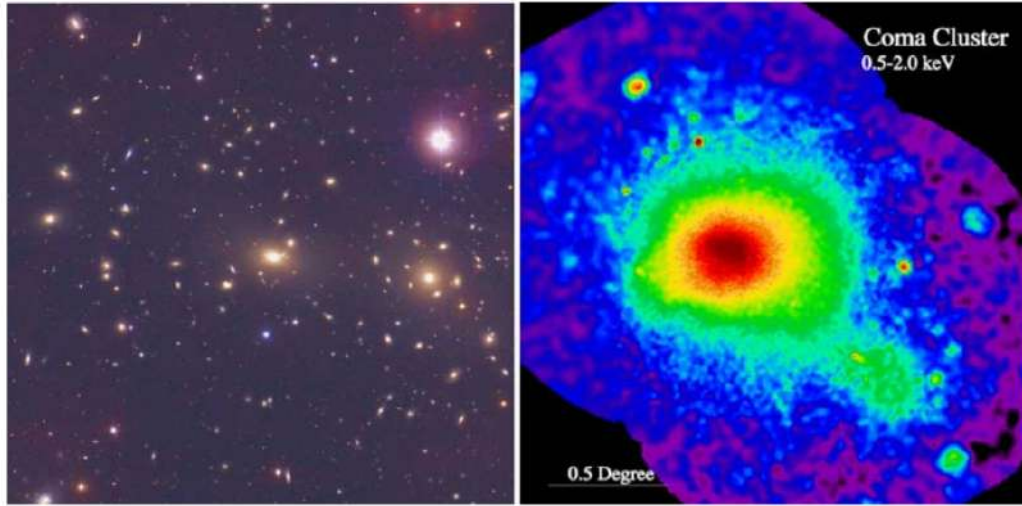


Figura 3.3: Imagem à esquerda: Imagem no óptico da parte central do aglomerado de Coma centrada na galáxia NGC4889; a galáxia brilhante à direita é a NGC4874. Imagem à direita: Imagem de raios-X (ROSAT) de Coma. Fonte: <http://chandra.harvard.edu/photo/2002/0150/more.html>.

negros (galácticos e extragalácticos), o meio interestelar difuso da nossa Galáxia ou de galáxias externas, as partes exteriores de núcleos de galáxias ativas (AGN<sup>2</sup>), o meio intra-aglomerado quente e o meio intra-aglomerado difuso [84].

Os plasmas quentes são regiões emissoras de *Bremsstrahlung* ou emissão livre-livre. Logo, a emissão em raios-X dos aglomerados advém basicamente do gás do MIA através do efeito *Bremsstrahlung* térmico [92]. Uma vez que esse gás possui baixas densidades e altas temperaturas, ele é extremamente rarefeito e opticamente fino. Nestas condições, os elétrons são acelerados durante as colisões com os íons no plasma e emitem radiação, que escapa da nuvem uma vez que a profundidade óptica é baixa.

Para encontrar a massa devido o efeito *Bremsstrahlung*, devemos considerar medidas de luminosidade em raios-X do aglomerado. A expressão para luminosidade total emitida pelo aglomerado é dada por:

$$L_x = \int_V \frac{dL_x}{dV} dV. \quad (3.18)$$

Uma vez que estamos considerando simetria esférica, temos:

$$L_x = 4\pi \int_0^R \frac{dL_x}{dV} r^2 dr. \quad (3.19)$$

---

<sup>2</sup>Do inglês *Active Galactic Nuclei*

Como a detecção do gás intra-aglomerado é principalmente devido o *Bremsstrahlung* térmico, podemos supor que as componentes do gás estão em equilíbrio térmico e considerar uma distribuição de velocidade maxwelliana, de modo que encontramos a seguinte expressão para a densidade de luminosidade bolométrica [92]:

$$\frac{dL_x}{dV} = \left( \frac{2\pi k_B T_G}{3m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2^4 e^6}{3\hbar m_e c^3} n_e \left( \sum_i Z_i^2 n_i g_{Bi} \right), \quad (3.20)$$

onde  $m_e$  é a massa do elétron,  $e$  o módulo da carga do elétron,  $\hbar$  a constante de Planck sobre  $2\pi$ ,  $c$  a velocidade da luz,  $n_e$  a distribuição de elétrons no gás e  $Z_i$  e  $n_i$  são, respectivamente, os números atômicos e a distribuição dos elementos.  $g_{Bi}$  é o fator de Gaunt dos constituintes do gás; ele leva em conta as correções devido os efeitos quânticos e relativísticos da emissão *Bremsstrahlung*<sup>3</sup>.

Substituindo (3.20) em (3.19), obtemos:

$$L_x = 4\pi \int_0^R \left( \frac{2\pi k_B T_G}{3m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2^4 e^6}{3\hbar m_e c^3} n_e \left( \sum_i Z_i^2 n_i g_{Bi} \right) r^2 dr. \quad (3.21)$$

Lembrando que podemos considerar o gás do MIA sendo constituído apenas por hidrogênio e hélio, podemos usar as equações (3.5), (3.6) e (3.7), e então,

$$L_x = \left( \frac{2\pi k_B T_G}{3m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2^4 e^6}{3\hbar m_e c^3} g_B(T_G) \frac{2}{(1+X)} 4\pi n_{e0}^2 \int_0^R \left( 1 + \frac{r^2}{r_c^2} \right)^{-3\beta} r^2 dr. \quad (3.22)$$

Fazendo novamente a mudança de variável,  $x = r/r_c$ , e definindo,

$$I_L(R/r_c, \beta) \equiv \int_0^{R/r_c} (1+x^2)^{-3\beta} x^2 dx, \quad (3.23)$$

obtemos a seguinte relação para a luminosidade bolométrica:

$$L_x = \left( \frac{2\pi k_B T_G}{3m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2^4 e^6}{3\hbar m_e c^3} g_B(T_G) \frac{2}{(1+X)} 4\pi n_{e0}^2 r_c^3 I_L(R/r_c, \beta). \quad (3.24)$$

De posse da equação anterior, podemos obter a densidade de elétrons na região central do aglomerado,  $n_{e0}$ , substituir esse resultado na equação geral para a fração de gás (3.17), e escrever uma expressão para a fração de gás devido a radiação *Bremsstrahlung* como sendo:

$$f_{gas} = \left( \frac{\pi m_e^3 \hbar^2 c^6 m_H^8 \mu^4 G^4}{24 k_B^5 T_G^5 (1+X)^2 e^{12} g_B^2 \beta^4} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{I_M(R/r_c, \beta)}{I_L^{1/2}(R/r_c, \beta)} \left( \frac{r_c^{7/2} + r_c^{3/2} R^2}{R^3} \right) L_x^{\frac{1}{2}}(< R), \quad (3.25)$$

<sup>3</sup>Para um estudo detalhado da emissão *Bremsstrahlung* e dos termos relacionados a ela, podemos citar [92].

com todos os componentes já definidos anteriormente. Como a medida de  $f_{gas}$  obtida via *Bremsstrahlung* é obtida em raios-X, iremos denotá-la simplesmente por  $f_x$ .

Podemos ainda, analisar a expressão (3.24) e perceber que alguns termos dependem dos parâmetros cosmológicos, especificamente,  $r_c$ ,  $R$  e  $L_x$ . Os raios estão relacionados com a dimensão física do aglomerado (região central e o aglomerado como um todo) sendo, portanto, proporcionais à distância de diâmetro angular,

$$r_c \propto D_A \quad (3.26)$$

$$R \propto D_A \quad (3.27)$$

e a luminosidade  $L_x$  que é proporcional ao quadrado da distância de luminosidade,

$$L_x \propto D_L^2. \quad (3.28)$$

Identificando todos os valores independentes dos parâmetros cosmológicos por uma constante  $A$ , temos que a fração de gás obtida em raios-X pode ser escrita como:

$$f_x = AD_A^{1/2} D_L. \quad (3.29)$$

Tomando a relação de dualidade de distância cósmica geral, equação (4.24)<sup>4</sup>, temos:

$$f_x = A\eta D_A^{3/2}. \quad (3.30)$$

Esta é a expressão geral para a fração de gás em raios-X em função da distância de diâmetro angular, sem nenhuma suposição acerca da RDDC. A evidência da dependência da  $f_{gas}$  com a validade da RDDC foi originalmente deduzida por Gonçalves *et al.* (2012).

Vimos anteriormente que, os primeiros trabalhos na literatura utilizavam as medidas de  $f_{gas}$  como discriminador cosmológico e assumiam, direta ou indiretamente,  $\eta = 1$  na RDDC. Assumindo este pressuposto, a equação anterior toma a conhecida forma [80],

$$f_x \propto D_A^{3/2}, \quad (3.31)$$

de maneira que, se as análises que utilizam a expressão (3.31) se restringirem a modelos em acordo com os pressupostos de validade da RDDC<sup>5</sup>, seus resultados são igualmente válidos.

---

<sup>4</sup>Uma dedução completa da equação (4.24) pode ser encontrada na seção 4.1, onde é justificada a presença do fator  $\eta$ .

<sup>5</sup>Veremos pormenorizadamente tais pressupostos no próximo capítulo.

Uma vez que, o objetivo deste trabalho é analisar a RDDC e suas consequências cosmológicas, não consideraremos sua validação, *a priori*, e portanto, utilizaremos a equação para a fração de gás na sua forma completa, (3.30).

### 3.3 Efeito Sunyaev-Zel'dovich

Como vimos, a principal forma de detecção dos aglomerados de galáxias se dá através das observações em raios-X, o que indica que o meio intra-aglomerado é constituído de um gás quente e difuso que emite nessa faixa.

Uma vez que elétrons e fótons coexistam em uma determinada região do MIA, pode acontecer uma distorção do espectro da radiação cósmica de fundo devido o espalhamento dos fótons pelos elétrons. Sendo o tamanho dessa região  $l$ , tal que,  $l \gg \lambda_\nu$ , onde  $\lambda_\nu$  é o livre caminho médio dos fótons em um espalhamento Thomson, então os fótons sofrem mais espalhamentos; se  $l \ll \lambda_\nu$ , ocorre o contrário. Torna-se conveniente, então, definir uma profundidade ótica  $\tau \equiv l/\lambda_e = n_e \sigma_T l$ , de modo que  $\tau \gg 1$  implica forte espalhamento. Na região de baixas frequências ( $h\nu \ll kT_e$ ), a profundidade ótica é dada por:

$$\tau_t = \int \sigma_T n_e dl \quad (3.32)$$

onde  $\sigma_T = (8\pi/3)[(e^2/m_e c^2)]^2$  é a seção de choque para o espalhamento Thomson,  $n_e$  é a densidade de elétrons e  $l$  é o comprimento do aglomerado ao longo da linha de visada. Para aglomerados típicos,  $\tau_t \approx 10^{-2} - 10^{-3}$ , o que implica que apenas uma pequena fração dos fótons de uma fonte de rádio será espalhada ao atravessar o aglomerado [86].

Vimos também que a RCF é uma das principais fontes de radiação em baixa frequência dominante no universo. Ela é bem caracterizada por um espectro planckiano<sup>6</sup> com uma temperatura de  $T_R \approx 2.7K$  e possui pequenas anisotropias, uma parte em 100 mil, que revelam a estrutura do universo no período da recombinação ( $z \approx 1000$ ), quando o universo se torna transparente à radiação. Essas anisotropias são do tipo primárias e são causadas devido o avermelhamento gravitacional dos fótons que se encontravam em regiões mais densas que a média na época do desacoplamento, o que é conhecido por efeito Sachs-Wolf ([94], [27]). Existem ainda anisotropias secundárias, que são as

---

<sup>6</sup>O mesmo que um espectro de radiação de corpo negro.

provocadas pelas interações com a matéria após o desacoplamento. O principal exemplo dessas interações é o espalhamento Compton inverso que os fótons da RCF sofrem ao interagirem com os elétrons energéticos que existem no MIA. A esse efeito dá-se o nome de efeito Sunyaev-Zel'dovich ([5], [95], [96], [97]).

As duas formas mais comuns de se considerar o ESZ são o ESZ térmico e o cinemático. O primeiro ocorre em consequência de uma mudança aparente no brilho da RCF quando esta é observada em aglomerados de galáxias ou qualquer outro reservatório de plasma quente e o segundo surge devido à velocidade peculiar do aglomerado em relação à RCF.

### ESZ térmico

As altas temperaturas do gás do MIA permitem que sua detecção se dê na faixa dos raios-X, como já vimos anteriormente. Assim, quando os elétrons energéticos do meio interagem com os fótons da RCF, por efeito Compton inverso, eles doam energia aos fótons da RCF causando uma pequena distorção no seu espectro planckiano (fig. 3.4).

Podemos entender essa distorção da seguinte forma: devido a aparente homogeneidade e isotropia, o número de fótons da radiação cósmica de fundo permanece aproximadamente constante no MIA, com os fótons de baixa energia se tornando fótons de alta energia após o espalhamento, o que acarreta em uma diminuição na intensidade observada da RCF em baixas frequências e um aumento em altas frequências.

Devido à conservação do número de fótons, podemos quantificar esse desvio no espectro planckiano através da equação de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \vec{a} \cdot f = C, \quad (3.33)$$

onde  $f$  é a função de distribuição dos fótons,  $\vec{a}$  é a aceleração causada por uma força externa e  $C$  é o termo colisional de Boltzmann.

Estamos nos restringindo aos fótons da RCF espalhados pelo efeito Compton inverso. Então devido a homogeneidade do meio e à ausência de forças externas, temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C. \quad (3.34)$$

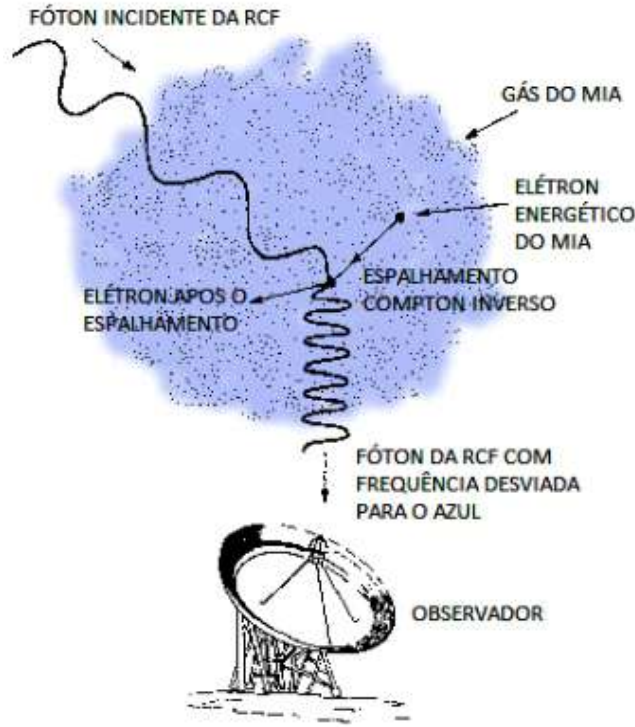


Figura 3.4: Esquema do efeito Sunyaev-Zel'dovich térmico considerando o espalhamento de um fóton da RCF por um elétron do gás de um aglomerado fictício. Retirada de: <http://www.russia-ic.com/people/general/z/141>.

Nesse caso, a função de distribuição dos fótons  $f(\nu)$  é proporcional ao número de ocupação  $n(\nu)$  da seguinte forma:

$$n(\nu) = (2\pi\hbar)^3 f(\nu), \quad (3.35)$$

e, então, a equação de Boltzmann pode ser escrita em termos de  $n$ . Diante disso, o termo colisional  $C$  vai descrever como  $n(\nu)$  muda devido às contribuições de fótons de diferentes frequências  $\nu'$  que migram para a frequência  $\nu$  e a migração de fótons de frequência  $\nu$  para as frequências  $\nu'$  em razão do espalhamento Compton. Dessa forma, a equação de Boltzmann com o termo colisional em termos de  $n$  pode ser escrita como [98]:

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = \int d^3p \int d\Omega \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) c[n(\omega')[1 + n(\omega)]N(E') - n(\omega)[1 + n(\omega')]N(E)], \quad (3.36)$$

com  $(d\sigma/d\Omega)$  sendo a seção de choque do espalhamento,  $\omega = 2\pi\nu$  e  $N(E)$  é a função de distribuição dos elétrons. Os termos  $n(\omega')$  e  $n(\omega)$  representam, respectivamente, os espalhamentos que transformam fótons com frequência  $\omega'$  em  $\omega$  e fótons com frequência  $\omega$  em  $\omega'$ ; já os termos  $1 + n(\omega)$  e  $1 + n(\omega')$  levam em conta os processos de emissão estimulada que aumentam a probabilidade de espalhamento da frequência  $\omega'$  para  $\omega$ .



No limite não-relativístico o processo de espalhamento é substancialmente simplificado e pode ser descrito pela equação de Kompaneets [99]:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} \left[ x_e^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x_e} + n + n^2 \right) \right], \quad (3.37)$$

a qual descreve a mudança no número de ocupação  $n(\nu)$  no processo de difusão. Além disso,  $x_e = h\nu/k_B T_e$ ,  $T_e$  é a temperatura do gás de elétrons, e

$$y = c t n_e \sigma_T \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \quad (3.38)$$

é o parâmetro de Comptonização<sup>7</sup>, onde  $n_e$  é a densidade numérica dos elétrons. Em um campo de radiação passando através de um gás de elétrons, tal parâmetro pode ser reescrito como:

$$y = \int \eta_e \sigma_T \frac{k_B T_E}{m_e c^2} dl, \quad (3.39)$$

onde a integral é efetuada ao longo da linha de visada do aglomerado e  $\sigma_T$  é a seção de choque Thomson.

Vamos utilizar o número de ocupações de um gás de fótons, dado pela estatística de Bose-Einstein [101], tal que,

$$n = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T_{RCF}} - 1} = \frac{1}{e^x - 1}. \quad (3.40)$$

Uma vez que, os elétrons do MIA são mais energéticos do que os fótons da RCF, podemos considerar  $x_e \ll 1$  ( $h\nu \ll k_B T_e$ ) e assim,  $\partial n/\partial x_e \gg n, n^2$ . Dessa forma, a equação (3.37) torna-se:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} \left[ x_e^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x_e} \right) \right]. \quad (3.41)$$

Devido a homogeneidade do lado direito na equação anterior, podemos substituir  $x_e$  por  $x$ , onde  $x$  é definido como  $x = h\nu/k_B T_{RCF}$  [100].

Segue-se, a partir da equação (3.40), que:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} [x \coth(x/2) - 4]. \quad (3.42)$$

---

<sup>7</sup>Grandeza ligada ao ganho total de energia obtido pelos fótons.

Além disso, como a nuvem de elétrons no meio intra-aglomerado é opticamente fina, podemos usar a aproximação  $\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\Delta n}{y}$  e obter uma fórmula simples para a mudança espectral causada pelo processo de espalhamento dada por:

$$\frac{\Delta n}{y} = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} [x \coth(x/2) - 4]. \quad (3.43)$$

Podemos ainda escrever a intensidade de radiação observada em termos do número de ocupação,

$$I(\nu, T) = (2h\nu^3/c^2)n(\nu, T). \quad (3.44)$$

e então,  $\Delta I_{ESZ}/I_{ESZ} = \Delta n/n$ . Portanto,

$$\frac{\Delta I_{ESZ}}{I_{ESZ}} = \frac{e^x}{(e^x - 1)} xy [x \coth(x/2) - 4]. \quad (3.45)$$

Todavia, é mais conveniente medir a intensidade em termos da temperatura de brilho - temperatura de um corpo negro que tenha a mesma intensidade na frequência observada. A intensidade e a temperatura podem ser relacionadas por uma derivada, de forma que podemos obter:

$$\frac{\Delta T_{RCF}}{T_{ESZ}} = y [x \coth(x/2) - 4], \quad (3.46)$$

ou ainda,

$$\Delta T_{ESZ} = T_{RCF} y f(x) = T_{ESZ} f(x) \int \eta_e \sigma_T \frac{k_B T_E}{m_e c^2} dl, \quad (3.47)$$

com

$$f(x) = [x \coth(x/2) - 4]. \quad (3.48)$$

No limite de Rayleigh-Jeans ( $x \rightarrow 0$ ) a equação (3.46) nos fornece  $\Delta T_{ESZ}/T_{RCF} = -2y$ , o que implica em uma diminuição na temperatura de brilho dos fótons da RCF após o espalhamento, quando observado em baixas frequências. Por outro lado, na região de Wien (altas frequências) temos que  $\Delta T_{ESZ}/T_{RCF} > 0$ , o que corresponde a um aumento na temperatura de brilho dos fótons da RCF após o espalhamento. Como há conservação do número de fótons, a conclusão imediata é que o resfriamento na região de baixas frequências e o aquecimento na região de altas frequências ocorre devido a transferência

dos fótons das regiões de baixa para as de alta frequência do espectro de corpo negro da RCF.

Existe ainda uma frequência de transição na qual o ESZ é nulo, ou seja,  $\Delta T_{ESZ} = 0$ , o que fornece  $x = 4$  e  $\nu = 217\text{GHz}$ , de modo que, para  $\nu < 217\text{GHz}$  temos  $\Delta T_{ESZ} < 0$  e para  $\nu > 217\text{GHz}$  temos  $\Delta T_{ESZ} > 0$  [102]. Esta análise também pode ser feita em função da intensidade da radiação observada, como mostrado na figura (3.5).

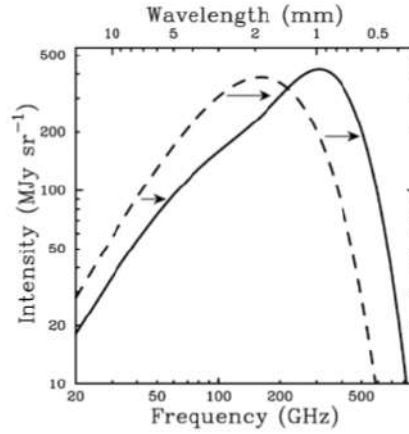


Figura 3.5: Distorção observada no espectro da RCF devido ao efeito Sunyaev-Zel'dovich. A linha tracejada mostra o espectro original e a linha contínua mostra o espectro distorcido devido à interação (Carlstrom *et al.*, 2002).

Devemos notar ainda que as expressões apresentadas até aqui descrevem apenas uma distribuição térmica não relativística de elétrons, de modo que, para obter expressões mais gerais, devemos utilizar as correções relativísticas necessárias. Assim, a equação para a mudança espectral da RCF, em termos de uma mudança na temperatura, incluindo as correções, torna-se:

$$\Delta T_{ESZ} = T_{RCF} \Psi(x, T_e) = T_{ESZ} \Psi(x, T_e) \int \eta_e \sigma_T \frac{k_B T_e}{m_e c^2} dl, \quad (3.49)$$

onde  $\Psi(x, T_e)$  é uma função que depende da frequência e das correções relativísticas  $\delta(ESZ)$ , tal que,

$$\Psi(x, T_e) = f(x)[1 + \delta(ESZ)]. \quad (3.50)$$

## ESZ cinemático

Outra forma de observar o ESZ é devido à velocidade peculiar do aglomerado em relação à RCF, o que produz uma distorção no espectro observado da RCF. Essa distorção é denominada ESZ cinemático, que no limite não-relativístico pode ser expressa como:

$$\frac{\Delta T_{ESZ}}{T_{RCF}} = -\tau_e \left( \frac{v_{pec}}{c} \right), \quad (3.51)$$

onde  $v_{pec}$  é a velocidade peculiar do aglomerado projetada na linha de visada e  $\tau_e$  é a profundidade óptica do MIA.

O primeiro trabalho a citar a diminuição de temperatura da radiação devido o efeito cinemático foi o de Sunyaev & Zel-dovich (1972). Porém, a dedução completa do espectro do ESZ cinemático somente foi publicada em 1995 por Phillips (1995). Uma maneira alternativa de deduzir esse efeito pode ser encontrada em Birkinshaw (1999), onde são utilizadas diferentes convenções e uma equação de transferência radiativa ao invés da equação de Boltzmann. Tal dedução nos conduz às seguintes expressões para as mudanças de intensidade e temperatura de brilho:

$$\frac{\Delta I_{ESZ}}{I_{RCF}} = -\alpha \tau_e \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (3.52)$$

$$\frac{\Delta T_{ESZ}}{T_{RCF}} = -\alpha \tau_e \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad (3.53)$$

onde  $\alpha = v_{pec}/c$  e o sinal negativo no lado direito das equações indicam o sentido da velocidade, por exemplo, quando  $v_{pec} > 0$  (velocidade de recessão) temos o sinal negativo. Além do mais, essa forma espectral corresponde a um simples decréscimo na temperatura, como afirmou Sunyaev & Zel-dovich (1972).

Outra característica importante é que o ESZ cinemático é muito difícil de ser medido na presença do efeito térmico. Temos por exemplo que, a razão entre as distorções na temperatura causada pelos dois efeitos é [100],

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_{ESZ}(C)}{\Delta T_{ESZ}(T)} &= \frac{1}{2} \frac{v_{pec}}{c} \left( \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \right)^{-1} \\ &= 0.085 (v_{pec}/1000 km.s^{-1}) (k_B T_e/10 keV)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

que é algo pequeno quando comparado as velocidades esperadas para os aglomerados (da ordem de centenas de  $km.s^{-1}$ ) e de suas temperaturas (da ordem de poucos  $keV$ ). Todavia, é possível estudar esses efeitos separadamente usando seus diferentes espectros.

Podemos notar, da figura (3.6), que o ESZ cinemático produz uma distorção máxima na temperatura na frequência em que o ESZ térmico é nulo, ou seja,  $\nu = 217\text{GHz}$ . Isto proporciona que as observações em frequências próximas a 217GHz sejam mais sensíveis ao ESZ cinemático do que ao ESZ térmico.

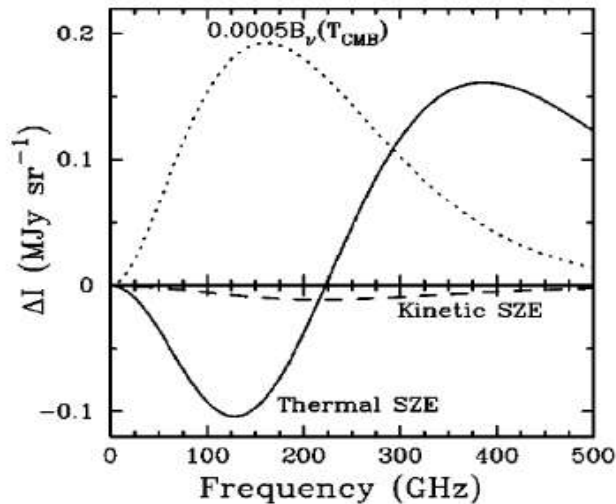


Figura 3.6: A linha contínua representa o ESZ térmico, a linha tracejada o ESZ cinético, e a linha pontilhada representa o espectro de corpo negro da RCF multiplicada por um fator de 0.0005 (Carlstrom *et al.*, 2002).

Por fim, mas não menos importante, um aspecto bastante interessante do ESZ cinemático é que ele fornece um método para medir as velocidades peculiares de objetos, mesmo que estejam a grandes distâncias. Basta que tenhamos calculado a profundidade ótica do aglomerado e feito as medições das distorções no espectro [104].

### 3.3.1 Cálculo de $D_A$ de Aglomerados de Galáxias

Nosso próximo passo é determinar a distância de diâmetro angular dos aglomerados de galáxias através de uma técnica que combina o ESZ e o brilho superficial em raios-X ( $S_x$ ), que consiste da imagem em raios-X do aglomerado projetada no plano do céu. Estas duas quantidades podem ser escritas como integrais ao longo da linha de visada do aglomerado e apresentam diferentes dependências com a densidade eletrônica do aglomerado,  $n_e$ , e com a temperatura dos elétrons do MIA,  $T_e$ , tal que,

$$S_x = \frac{1}{4\pi(1+z)^4} \int n_e^2 \Lambda_e(E, T_e) dl \quad (3.55)$$

e

$$\Delta T_{ESZ} = \Psi(x, T_e) T_{RCF} \int n_e \sigma_T \frac{k_B T_e}{m_e c^2} dl, \quad (3.56)$$

onde  $z$  é o *redshift* do aglomerado,  $\Lambda_e(E, T_e)$  é a função de resfriamento em raios-X do MIA, que depende da energia emitida em raios-X ( $E$ ) e da temperatura dos elétrons ( $T_e$ ) e  $\Psi(x, T_e)$  é a função que considera a dependência do ESZ com a frequência e as correções relativísticas, dada pela equação (3.50).

Para resolver as integrais anteriores é necessário utilizar um modelo para a distribuição do gás de elétrons do MIA e sua densidade. Por praticidade, vamos adotar o modelo  $\beta$  esférico e isotérmico, cuja densidade eletrônica é constante sobre camadas esféricas do gás do MIA, dependendo apenas da distância da camada até o centro do aglomerado [105]. Neste caso temos que,

$$n_e(r) = n_{e0} \left(1 + \frac{r^2}{r_c^2}\right)^{-\frac{3\beta}{2}}, \quad (3.57)$$

onde  $n_{e0}$  é a densidade de elétrons na região central do aglomerado,  $r_c$  é o raio do “caroço” central e  $\beta$  é o parâmetro que determina a taxa de decréscimo da densidade.

De maneira análoga à densidade, a temperatura e a função de resfriamento são escritas em termos de suas quantidades na região central e multiplicadas por fatores adimensionais. Todavia, ao adotarmos o modelo  $\beta$  esférico e isotérmico, como a temperatura é considerada constante, teremos  $T_e = T_{e0}$  e  $\Lambda_e \equiv \Lambda_{e0}$ . Ademais, na equação (3.57) temos  $r^2 = x^2 + y^2 + \kappa^2$ , com a coordenada  $\kappa$  ao longo da linha de visada, e podemos considerar um raio projetado no plano do aglomerado como sendo  $R^2 = x^2 + y^2$ , de forma que a equação (3.55) torne-se:

$$S_x = \frac{\Lambda_{e0} n_{e0}^2}{4\pi(1+z)^4} \int \left(1 + \frac{R^2}{r_c^2} + \frac{\kappa^2}{r_c^2}\right)^{-3\beta} dl. \quad (3.58)$$

Por cálculos diretos e fazendo algumas mudanças de variáveis, encontramos o seguinte resultado para o brilho superficial em raios-X dos aglomerados:

$$S_x = S_{x0} \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)^{\frac{(1-6\beta)}{2}}, \quad (3.59)$$

com

$$S_{x0} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}(1+z)^4} \Lambda_{e0} n_{e0}^2 r_c \frac{\Gamma(3\beta - 1/2)}{\Gamma(3\beta)}, \quad (3.60)$$

e onde  $\theta = R/D_A$  e  $\theta_c = r_c/D_A$ .

Seguindo passos semelhantes podemos calcular o decremento na temperatura da RCF devido ao ESZ e encontrar:

$$\Delta T_{ESZ} = \Delta T_0 \left( 1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)^{\frac{(1-3\beta)}{2}}, \quad (3.61)$$

onde

$$\Delta T_0 = \Psi(x, T_e) T_{RCF} \frac{k_B T_{e0}}{m_e c^2} \sigma_T n_{e0} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(3/2\beta - 1/2)}{\Gamma(3/2\beta)} r_c. \quad (3.62)$$

Os termos  $S_{x0}$  e  $\Delta T_0$  são conhecidos como termos de normalização e incluem as informações físicas e geométricas resultantes da integração do modelo- $\beta$  ao longo da linha de visada e os termos  $\theta_c$  e  $\beta$  podem ser obtidos a partir de uma análise dos dados de raios-X e ESZ.

De posse das equações (3.60) e (3.62), podemos fazer  $(\Delta T_0)^2/S_{x0}$  e encontrar o raio do caroço central, e assim determinar uma relação para a distância de diâmetro angular,  $D_A = r_c/\theta_c$ , como sendo:

$$D_A = \frac{(\Delta T_0)^2}{\theta_c S_{x0} (1+z)^4} \left( \frac{m_e c^2}{k_B T_{e0}} \right)^2 \frac{\Lambda_{e0}}{4\pi^{3/2} \Psi^2(x, T_{e0}) T_{RCF}^2 \sigma_T^2} \times \left[ \frac{\Gamma(3/2\beta)}{\Gamma(3/2\beta - 1/2)} \right]^2 \left[ \frac{\Gamma(3\beta - 1/2)}{\Gamma(3\beta)} \right]. \quad (3.63)$$

O método descrito anteriormente para medir a distância até um aglomerado de galáxias é direto e pode ser aplicado mesmo à grandes distâncias cosmológicas sem que seja preciso fazer uso de alguma cadeia intermediária de estimadores de distância, como por exemplo a escala de distância cósmica. O problema surge quando o aglomerado possui alguma assimetria ou devido as propriedades que surgem em decorrência da projeção destes no plano celeste, quando então o modelo  $\beta$  esférico e isotérmico utilizado para deduzir  $D_A$  é claramente inválido ([106], [107]). Neste caso, se o aglomerado está alongado por um fator  $\xi$  na linha de visada, ou seja, se o raio do núcleo da distribuição do gás com a linha de visada (coordenada  $\kappa$ ) é maior por um fator  $\xi$  se comparado com os outros dois eixos, então a função de distribuição do gás deve ser modificada para [100]

$$f_n = \left[ 1 + \frac{R^2 + (\kappa^2/\xi^2)}{r_c^2} \right]^{-\frac{3}{2}\beta}, \quad (3.64)$$

o que faz com que os termos  $S_{x0}$  e  $\Delta T_0$  aumentem por um fator  $\xi$ . Uma vez que para determinarmos a distância de diâmetro angular fizemos  $(\Delta T_0)^2/S_{x0}$ , o valor estimado corrigido para  $D_A$  é

$$D_A(\text{verdadeiro}) = \frac{D_A(\text{estimado})}{\xi}. \quad (3.65)$$

Podemos ainda estipular uma expressão para  $D_A$  onde consideramos a relação de dualidade de distância cósmica em sua forma geral<sup>8</sup>. Para isto, vamos supor o brilho superficial em raios-X na forma

$$S_x = \frac{D_A^2}{4\pi D_L^2} \int n_e^2 \Lambda_e(E, T_e) dl, \quad (3.66)$$

de modo que, utilizando o modelo  $\beta$  esférico e isotérmico, obtemos:

$$S_x = S_{x0} \left( 1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)^{\frac{(1-6\beta)}{2}}, \quad (3.67)$$

onde

$$S_{x0} \equiv \frac{D_A^2}{4\sqrt{\pi} D_L^2} \Lambda_{eH} \frac{\mu_e}{\mu_H} n_{e0}^2 r_c \frac{\Gamma(3\beta - 1/2)}{\Gamma(3\beta)}. \quad (3.68)$$

Por meio de procedimentos análogos, fazendo  $(\Delta T_0)^2/S_{x0}$ , e utilizando a expressão geral para a RDCC (4.24), obtemos a nova expressão para a distância de diâmetro angular, em termos de um parâmetro  $\eta$ , dada por:

$$\begin{aligned} D_A &= \frac{(\Delta T_0)^2}{\theta_c S_{x0} (1+z)^4} \left( \frac{m_e c^2}{k_B T_{e0}} \right)^2 \frac{\Lambda_{eH0} \mu_e / \mu_H}{4\pi^{3/2} \Psi^2(x, T_{e0}) T_{RCF}^2 \sigma_T^2} \\ &\times \left[ \frac{\Gamma(3/2\beta)}{\Gamma(3/2\beta - 1/2)} \right]^2 \left[ \frac{\Gamma(3\beta - 1/2)}{\Gamma(3\beta)} \right] \frac{1}{\eta^2(z)} = D_A^{obs} \eta^{-2}(z), \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde  $D_A^{obs}$  é a distância de diâmetro angular obtida diretamente das observações.

### 3.4 Medidas da Taxa de Expansão do Universo

O conceito de que o Universo está passando por uma fase de expansão acelerada têm sido fortemente provado e isso faz com que um dos objetivos fundamentais da cosmologia moderna seja encontrar com qual taxa o universo expande e qual é sua dependência

<sup>8</sup>A dedução desta relação pode ser encontrada no capítulo 4, seção 4.1



com o *redshift*. As medições da história da expansão podem ser descritas pela evolução do parâmetro de Hubble,  $H(z) = \dot{a}/a$ , e fornecem um dos mais importantes testes observacionais de modelos cosmológicos, os quais caracterizam as diferentes componentes do Universo e sua evolução com o tempo [108].

Visto a importância de sabermos qual é o parâmetro de Hubble e, assim, entender a história de expansão do Universo, existem atualmente na literatura dois métodos para medir  $H(z)$ : um baseado na diferença de idade entre galáxias e outro através das oscilações acústica de bárions na direção radial. O primeiro método foi inicialmente apresentado por Jimenez & Loeb (2002), que baseados nas medidas de diferença de idade ( $\Delta t$ ) entre duas galáxias que foram formadas ao mesmo tempo mas estão separadas por um pequeno intervalo de *redshift* ( $\Delta z$ ), puderam inferir as medidas da taxa de expansão a partir da seguinte expressão,

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}, \quad (3.70)$$

sendo esta equação facilmente deduzida a partir da definição de  $H(z)$ . O método da diferença de idade faz uso das galáxias luminosas vermelhas (LRG's<sup>9</sup>), pois estas são galáxias massivas e cujas populações de estrelas constituintes são bastante homogêneas. De modo que, além de servir como “galáxias relógio”, também são ótimos estimadores da distribuição de matéria do universo, além do que a identificação e as observações espectroscópicas dessas galáxias conduzem à determinações diretas de  $H(z)$  em *redshifts* baixos e intermediários [110].

Ao fazer a aproximação,

$$H(z) \approx -\frac{1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad (3.71)$$

onde  $\Delta z$  é a diferença de *redshift* entre duas galáxias e  $\Delta t$  a diferença entre suas idades, são obtidas medidas de  $H(z)$ , em  $z \neq 0$ , que são independentes de modelo cosmológico.

Ao longo dos anos mais medidas de  $H(z)$  foram realizadas utilizando tanto o método da diferença de idade ([111],[112], [113], [114]) quanto BAO ([108], [115], [116]), o que proporcionou um aumento no conjunto de dados. A maior compilação de dados de  $H(z)$  tem, atualmente, 28 dados numa faixa de *redshift* de  $0.07 \leq z \leq 2.3$  que pode ser encontrada na tabela 1 da referência [117] e vista na figura (3.7), retirada de [118]. Existe,

---

<sup>9</sup>Do inglês *Luminous Red Galaxies*.

contudo, uma limitação nos métodos citados anteriormente. Eles fornecem medidas de  $H(z)$  apenas até um *redshift* máximo de  $z = 2.3$ . Para contornar isto, Corasaniti *et al.* (2007) propuseram um método, através da espectroscopia de quasares e utilizando medidas da variação temporal de velocidade das fontes, capaz de determinar a taxa de expansão de acordo com a expressão

$$\frac{\Delta v}{c} = H_0 \Delta t_0 \left( 1 - \frac{H(z)}{H_0(1+z)} \right). \quad (3.72)$$

A principal vantagem deste novo método é que os dados de  $H(z)$  são estendidos até o “deserto de *redshift*” ( $2 < z < 5$ ) e assim podem melhorar as restrições dos parâmetros cosmológicos.

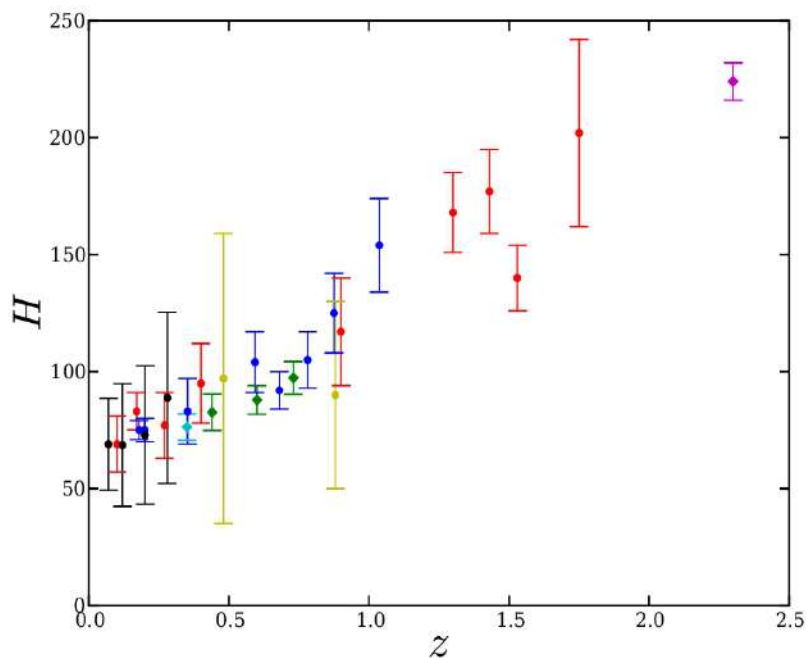


Figura 3.7: Dados atuais de  $H(z)$ . Os círculos vermelho, amarelo, azul escuro e preto são as medidas realizadas pelo método da diferença de idade, e os losangos verde, azul claro e rosa são as medidas feitas através de BAO (Ferreira, 2014).

Como teste cosmológico, as medidas de  $H(z)$  foram utilizadas em diversos contextos: para restringir o parâmetro da equação de estado da energia escura [120]; através do método de diferença de idade para restringir a variabilidade de *redshift* de um potencial de campo escalar de baixo rolamento da energia escura [112]; e utilizadas também no estudo do universo  $\Lambda$ CDM, no que diz respeito à massa dos neutrinos  $m_\nu$ , ao número efetivo

de espécies relativísticas de neutrinos  $N_{rel}$ , a curvatura espacial  $\Omega_k$  e ao parâmetro  $\omega$  da equação de estado da energia escura [121], dentre outros.

### 3.4.1 Cálculo da Distância de Diâmetro Angular utilizando $H(z)$

Para transformar as medidas de  $H(z)$  em estimativas de distância, vamos recorrer à integração numérica que consiste de um método aproximativo para resolver integrais do tipo,

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad (3.73)$$

com  $a$  e  $b$  finitos, utilizando as chamadas fórmulas de quadratura numérica. Tal método é geralmente usado quando o integrando,  $f(x)$ , é difícil ou praticamente impossível de se resolver analiticamente ou no caso da função integranda ser conhecida através de uma tabela de valores, e baseia-se na aproximação da função  $f(x)$  por outra função cujo integral seja mais fácil de resolver, como por exemplo, polinômios interpoladores [122].

Uma vez que temos uma tabela com os valores de  $H(z)$ , nosso trabalho se restringirá à resolver numericamente a integral da distância comóvel,  $D_C$ , escrita em função de  $H(z)$  como,

$$D_C = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (3.74)$$

onde estamos utilizando o modelo plano com  $\Omega_k = 0$  e  $c$  é a velocidade da luz. Utilizando a regra trapezoidal simples [123],

$$I(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)], \quad (3.75)$$

a equação (3.74) torna-se:

$$D_C \approx \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N (z_{i+1} - z_i) \left[ \frac{1}{H(z_{i+1})} + \frac{1}{H(z_i)} \right], \quad (3.76)$$

com o erro associado à  $i$ -ésima medida sendo obtido através da técnica de propagação de erros [124],

$$s_i = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N (z_{i+1} - z_i) \left( \frac{\sigma_{H_{i+1}}^2}{H_{i+1}^4} + \frac{\sigma_{H_i}^2}{H_i^4} \right)^{1/2}, \quad (3.77)$$

e o erro total da equação (3.76) no intervalo  $z = 0 - z_n$  sendo  $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^N s_i$ .

Por fim, para obter a distância de diâmetro angular, utilizamos a expressão (2.58) para o caso plano e obtemos:

$$D_A(z) = \frac{D_c(z)}{(1+z)}. \quad (3.78)$$

Todavia, este método nos fornece medidas de  $D_A$  apenas no *redshift* das medidas de  $H(z)$ . Uma maneira de estimar  $D_A$  em qualquer *redshift*, a partir das medidas de  $H(z)$ , é obter inicialmente medidas de  $D_c$  através da equação (3.74) e, com a ajuda de um *software*, ajustar uma função polinomial que nos dê a distância comóvel em função do *redshift*. De posse dessa expressão, para estimar  $D_A$  basta utilizar a equação (3.78) e obter as medidas de distância em qualquer *redshift*.

Em particular, a partir do ajuste polinomial da distância comóvel, encontramos 38 medidas de  $D_A$  considerando os mesmos *redshifts* das amostras utilizadas nos testes com  $f_{gas}$  e  $D_A$  via ESZ+Raios-X. Nas figuras (3.8) e (3.9) podemos ver, respectivamente, a distância comóvel obtida via integração numérica e da qual extraímos a função polinomial para obter  $D_A$  (linha sólida verde), e as distâncias de diâmetro angular obtidas a partir do ajuste polinomial considerando os *redshifts* da amostra de Bonamente *et al.* (2006). Uma vez que os *redshifts* da amostra de La Roque *et al.* (2006) usadas no teste com  $f_{gas}$  são os mesmos da amostra de Bonamente, torna-se desnecessário esse gráfico.

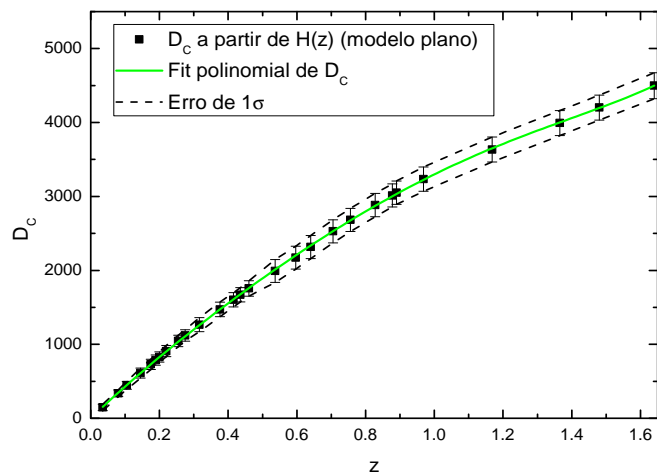


Figura 3.8:  $D_c$  obtidas a partir das medidas da taxa de expansão. A curva sólida representa o ajuste polinomial de 5 ordem para os pontos de  $D_c$  e as curvas pontilhadas os erros de  $1\sigma$ .

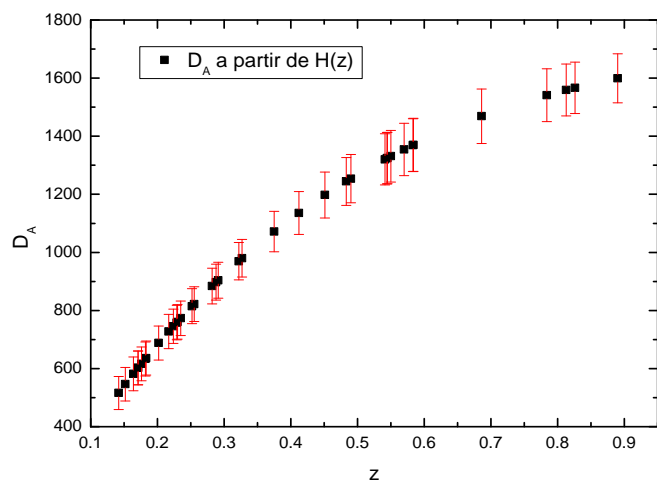


Figura 3.9:  $D_A(z)$  obtidas a partir do ajuste polinomial da distância comóvel, considerando os mesmos *redshifts* da amostra de Bonamente *et al.* (2006).

# Capítulo 4

## Relação de Dualidade de Distância Cósmica

Iniciaremos nossa análise observacional acerca da RDDC abordando o arcabouço teórico que sustenta tal relação. Como faremos uso de comparações de distâncias cosmológicas, é necessário, de antemão, dispor de alguns conceitos importantes de geometria diferencial, que serão úteis na dedução da relação de dualidade. Estes conceitos podem ser encontrados no apêndice [A](#). Uma vez que tenhamos tais ferramentas tensoriais, podemos partir para a dedução da expressão relativa à relação de dualidade de distância cósmica.

### 4.1 Dedução da RDDC

Para deduzirmos a RDDC, faremos inicialmente a dedução do teorema de reciprocidade de Etherington. Desta feita, relacionaremos as distâncias envolvidas neste teorema com as distâncias de luminosidade e de diâmetro angular, para de fato encontrar a RDDC.

Seguindo o procedimento de Ellis (1971), tomemos dois feixes de fótons seguindo geodésicas nulas, com o primeiro feixe representado pela convergência de fótons provindos de uma fonte e o segundo feixe representado pela divergência de fótons emitidos de uma fonte. A figura [4.1](#) exemplifica esse esquema, sendo  $O$  o ponto para onde o primeiro feixe converge e  $G$  o ponto de onde o segundo feixe diverge.

A partir da razão entre a área e o ângulo sólido, subentendido por cada feixe,

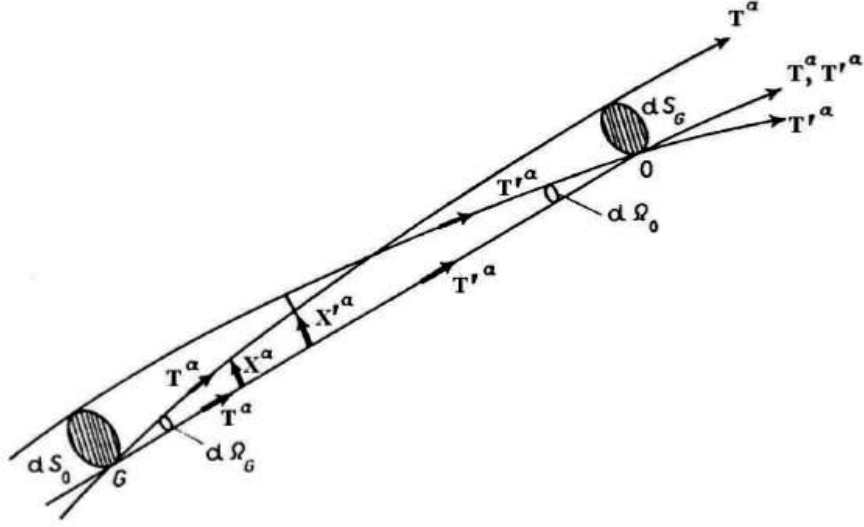


Figura 4.1: Trajetória de raios provenientes de uma fonte  $G$  e alcançando um observador  $O$ , estando ambos em afastamento (Ellis, 1971).

podemos encontrar uma relação para as distâncias obtidas no teorema de Etherington. Isto é, através da razão entre as grandezas  $dS_O(dS_G)$  e  $d\Omega_O(d\Omega_G)$ .

Como visto na figura 4.1, o feixe de geodésicas divergentes a partir do ponto  $G$  possui vetores tangentes dados por  $T^a$ , com parâmetro afim dado por  $\lambda$  e vetores de desvio dados por  $X^a$ . Enquanto que o feixe de geodésicas convergentes em  $O$  possui seus vetores tangentes dados por  $T'^a$  e, de modo semelhante ao procedimento anterior,  $\lambda'$  é o parâmetro afim e  $X'$  os vetores de desvio das geodésicas percorridas por  $T'^a$ .

Como sabemos, a variação dos vetores de desvio de uma geodésica é descrita pela equação de desvio da geodésica (A.28). Supondo que as geodésicas anteriores estão imersas em uma variedade Riemanniana, podemos reescrever as EDGs correspondentes aos feixes convergentes e divergentes, respectivamente, como,

$$\frac{D^2 X^a}{D\lambda^2} = -R^a_{bcd} T^b X^c T^d \quad (4.1)$$

e

$$\frac{D^2 X'^a}{D\lambda'^2} = -R^a_{bcd} T'^b X'^c T'^d \quad (4.2)$$

Vamos considerar agora a trajetória comum aos dois feixes, ou seja, a trajetória  $OG$ . Note que, neste caso, os vetores tangentes são os mesmos,  $T^a = T'^a$ , e portanto,

os parâmetros afins são os mesmos também,  $\lambda = \lambda'$ . Então, multiplicando por  $X'^a$  a eq. (4.1) e por  $X^a$  a eq. (4.2), conseguimos:

$$X'^a \frac{D^2 X_a}{D\lambda^2} = -R_{abcd} X'^a T^b X^c T^d, \quad (4.3)$$

e

$$X^a \frac{D^2 X'_a}{D\lambda^2} = -R_{abcd} X^a T^b X'^c T^d, \quad (4.4)$$

onde utilizamos a condição de metricidade nula ( $Dg_{ij}/D\lambda = 0$ ) para baixar o índice da derivada segunda no lado esquerdo das equações.

Renomeando os índices do lado direito da equação (4.4),  $a \Leftrightarrow c$  e  $b \Leftrightarrow d$ , podemos reescrevê-la como:

$$X^a \frac{D^2 X'_a}{D\lambda^2} = -R_{cdab} X^c T^d X'^a T^b, \quad (4.5)$$

E usando a propriedade de simetria do tensor de Riemann,  $R_{abcd} = R_{cdab}$ , temos:

$$X^a \frac{D^2 X'_a}{D\lambda^2} = -R_{abcd} X'^a T^b X^c T^d. \quad (4.6)$$

Assim, subtraindo as eqs. (4.3) e (4.6), obtemos, ao longo da trajetória  $OG$ :

$$X'^a \frac{D^2 X_a}{D\lambda^2} - X^a \frac{D^2 X'_a}{D\lambda^2} = 0, \quad (4.7)$$

de onde concluímos que:

$$X'^a \frac{DX_a}{D\lambda} - X^a \frac{DX'_a}{D\lambda} = cte. \quad (4.8)$$

Tomando a equação anterior no ponto  $O$ , onde  $X'^a = 0$ , e no ponto  $G$ , onde  $X^a = 0$ , obtemos:

$$X^a|_O \frac{dX'_a}{d\lambda}|_O = -X'_a|_G \frac{dX_a}{d\lambda}|_G. \quad (4.9)$$

Para determinar completamente o conjunto de vetores de conexão que consideramos, especificamos que  $X^a$  será ortogonal às quadri-velocidades dos observadores em  $O$  e  $X'^a$  será ortogonal às quadri-velocidades das galáxias (fontes) em  $G$ . Em seguida, precisamos determinar o conjunto de vetores de conexão que satisfazem estas condições em um espaço 2-dimensional em cada ponto em  $OG$  [13].



Então, para podermos utilizar a equação (4.9) e relacionar as áreas  $dS_O$ ,  $dS_G$  das curvas geodésicas em  $G$ ,  $O$ , respectivamente, vamos escolher, a partir dos vetores de desvio  $X$ , um par de vetores  $X_1$  e  $X_2$ , tal que,

$$\frac{dX_1^a}{d\lambda}|_G \frac{dX_{2a}}{d\lambda}|_G = 0 \quad \text{e} \quad X_1^a|_O X_{2a}|_O = 0. \quad (4.10)$$

Este par de vetores não será necessariamente ortogonal sempre, mas podemos encontrar um par particular de vetores de conexão que satisfaça esta condição.

Por outro lado, podemos escolher, também a partir dos vetores de desvio  $X'$ , um par de vetores  $X'_1$  e  $X'_2$ , tais que sejam válidas as condições:

$$X'_{1a}|_G \frac{dX_{2a}}{d\lambda}|_G = 0 \quad \text{e} \quad X'_{2a}|_G \frac{dX_{1a}}{d\lambda}|_G = 0. \quad (4.11)$$

A partir da eq. (4.9), podemos mostrar que:

$$X_1^a|_O \frac{dX'_{2a}}{d\lambda}|_O = 0 \quad \text{e} \quad X_2^a|_O \frac{dX'_{1a}}{d\lambda}|_O = 0. \quad (4.12)$$

Então, devido as eqs. (4.10), (4.11) e (4.12), temos as seguintes condições igualmente válidas:

$$\frac{dX_1'^a}{d\lambda}|_G \frac{dX_{2a}'}{d\lambda}|_G = 0 \quad \text{e} \quad X_1'^a|_O X'_{2a}|_O = 0. \quad (4.13)$$

Com estas escolhas de vetores de conexão, temos que:

$$\begin{aligned} dS_G &= X_1|_O X_2|_O & dS_O &= X_1|_G X_2|_G \\ d\Omega_O &= \frac{dX_1'}{dl}|_O \frac{dX_2'}{dl}|_O & d\Omega_G &= \frac{dX_1}{dl}|_G \frac{dX_2}{dl}|_G \end{aligned} \quad (4.14)$$

Novamente, utilizando a eq. (4.9), temos que:

$$(X_1 X_2)|_O \left[ \left( \frac{dX_1'}{dl} \frac{dl}{d\lambda} \right) \left( \frac{dX_2'}{dl} \frac{dl}{d\lambda} \right) \right] |_O = (X'_1 X'_2)|_G \left[ \left( \frac{dX_1}{dl} \frac{dl}{d\lambda} \right) \left( \frac{dX_2}{dl} \frac{dl}{d\lambda} \right) \right] |_G \quad (4.15)$$

Usando o fato de que  $(dl/d\lambda) = -T^a u_a$  (sendo  $u_a$  a quadri-velocidade e  $T^a$  o vetor tangente à geodésica nula), e lembrando também que [12]:

$$\frac{(u_a T^a)_{emitter}}{(u_a T^a)_{observer}} = (1 + z), \quad (4.16)$$

podemos combinar a eq. (4.15) com as eqs. (4.14), para obter:

$$dS_G d\Omega_O = dS_O d\Omega_G (1+z)^2.$$

Por fim, definindo as distâncias  $r_G^2 = dS_G/d\Omega_G$  assim como  $r_O^2 = dS_O/d\Omega_O$ , obtemos:

$$r_G = r_O(1+z), \quad (4.17)$$

que é o procurado teorema de reciprocidade de Etherington.

Precisamos agora relacionar as medidas teóricas de distância, mostradas na eq. (4.17), com as medidas observacionais cosmológicas. Para tanto temos que definir quais grandezas são mensuráveis e quais precisam ser redefinidas.

As grandezas que podem ser obtidas, nesse caso, são a área  $dS_O$  e o ângulo  $d\Omega_O$ , e portanto, conseguimos medidas de  $r_O$ , a qual em termos de medidas cosmológicas é denominada distância de diâmetro angular,

$$D_A = r_O \quad (4.18)$$

No entanto, as medidas relativas ao ângulo  $d\Omega_G$  não são passíveis de serem obtidas, de modo que precisamos de uma medida alternativa para  $r_G$ . Assim, faremos uso da chamada distância de luminosidade,  $D_L$ , definida como se segue.

Em um universo euclidiano, a luminosidade intrínseca de uma estrela e o fluxo medido estão relacionados por:

$$F = \frac{L}{4\pi r_G^2} \quad (4.19)$$

onde  $L$  é a luminosidade intrínseca da estrela,  $F$  o fluxo medido e  $r_G$  a distância coordenada até a estrela.

Contudo, devemos considerar que, para medidas de distâncias em altos *redshifts*, isto é,  $z > 0.1$ , os efeitos da expansão cosmológica na sua determinação não podem ser desprezados. Logo, essa relação precisa de modificações por três razões [28]:

- No tempo  $t_0$  em que a luz alcança a Terra, a área própria de uma esfera em torno de um objeto luminoso e que passa através da Terra é, em termos da métrica de FLRW

(2.11),  $A = 4\pi r_G^2 a^2(t_0)$ , sendo  $r_G$  a distância coordenada da terra até a fonte e  $a(t_0)$  é o fator de escala atual. A fração de luz recebida em um telescópio de abertura  $A'$  é portanto,  $A'/4\pi r_G^2 a^2(t_0)$ . Assim, o fator  $1/r_G^2$  na eq. (4.19) deve ser substituído por  $1/r_G^2 a^2(t_0)$ ;

- A taxa de chegada de fótons individuais é menor do que a taxa com que eles são emitidos por um fator  $a(t_G)/a(t_0) = 1/(1+z)$ ;
- A energia  $h\nu_O$  dos fótons individuais que chegam na terra é menor do que a energia  $h\nu_G$  com que eles foram emitidos pelo mesmo fator  $1/(1+z)$ .

Desta forma, colocando tudo isto em conjunto, o fluxo observado para um universo em expansão, pode ser escrito como:

$$F = \frac{L}{4\pi r_G^2 (1+z)^2}. \quad (4.20)$$

Para manter a mesma estrutura funcional da relação entre fluxo e luminosidade vista na eq. (4.19), vamos fazer a seguinte definição:

$$D_L = r_G(1+z) \quad (4.21)$$

Logo,

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad (4.22)$$

De posse das definições (4.17), (4.18) e (4.21), podemos reescrever o teorema de reciprocidade de Etherington sob a luz de distâncias relacionadas à observáveis cosmológicos, obtendo a almejada relação de dualidade de distância cósmica:

$$\frac{D_L}{D_A(1+z)^2} = 1 \quad (4.23)$$

Devemos frisar aqui que, a relação de reciprocidade foi obtida segundo os pressupostos de que os fótons seguem geodésicas nulas e únicas em uma variedade Riemanniana, e conseqüentemente, a RDDC foi obtida considerando-se a conservação do número de fótons. Vale salientar ainda que, nenhuma suposição sobre o conteúdo material do universo ou sobre a validade do princípio cosmológico foi feita, de modo que, a RDDC independe das componentes do modelo adotado, bem como, independe da homogeneidade e isotropia do universo.

E isso é importante porque justifica a motivação desse trabalho, que objetiva investigar as consequências físicas de uma validação (ou não) da RDDC a partir de dados observacionais disponíveis. Desta forma, ao invés de considerar válida a eq. (4.23) vamos relaxar sua igualdade usando um parâmetro,  $\eta$ , da seguinte forma:

$$\frac{D_L}{D_A(1+z)^2} = \eta \quad (4.24)$$

Esse parâmetro será restringido pelas observações e caso indique uma não validade da RDDC, isto é,  $\eta \neq 1$ , devemos buscar as causas desta não-validação e também uma revisão de conceitos fundamentais aceitos em cosmologia. A próxima seção apresenta alguns testes da RDDC presentes na literatura que fazem uso de diferentes observáveis cosmológicos para restrição do parâmetro  $\eta$ .

## 4.2 Testes da RDDC

Como vimos na seção anterior, o teorema de reciprocidade de Etherington pode ser apresentado de várias formas, tanto em termos de ângulos sólidos (4.17) quanto relacionando distâncias astronômicas (4.23). Além disso, essa relação é válida para todos os modelos cosmológicos baseados em uma geometria Riemanniana e é independente da natureza do conteúdo matéria-energia e das equações de campo de Einstein [12].

A RDDC tem um papel essencial na cosmologia moderna, desde os estudos de lentes gravitacionais [129], até análises de distribuição de galáxias e observações de aglomerados de galáxias ([3], [4], [130], [131]), assim como na grande quantidade de consequências cósmicas das observações das anisotropias primárias e secundárias da temperatura da radiação cósmica de fundo em microondas [3].

Dessa forma, qualquer desvio observacional consistente da RDDC daria origem a uma crise cosmológica com a clara evidência de uma nova física, a qual poderia ter origem em diferentes mecanismos físicos [14]. Como exemplos, podemos citar: uma possível variação de constantes fundamentais [132], birrefringência de fótons [133], teorias de gravidade não-métricas e absorção de fótons por poeira [16], variação do espectro de temperatura da RCF ([18] e referências lá citadas), entre outros (ver, por exemplo, [134], [135] e referências lá citadas).

Em princípio, o teste ideal da RDDC seria a partir das observações de fontes cosmológicas, desde que conhecessemos seus tamanhos e luminosidades intrínsecas. Assim, depois de medir o *redshift* da fonte, poderíamos determinar as distâncias de luminosidade e de diâmetro angular para testar diretamente a RDDC. Contudo, este é um método difícil de realizar na prática, principalmente devido as limitações do nosso entendimento atual da evolução das galáxias [15].

### 4.2.1 Testes Dependente de Modelo Cosmológico

Uma outra possibilidade é assumir um modelo cosmológico de fundo sugerido por um conjunto de observações e aplicar no contexto de algum efeito astrofísico, na tentativa de ver se a relação permanece válida. Como exemplo dessa abordagem podemos citar Basset & Kunz (2004), que utilizaram dados de SNe Ia como medidas de distância de luminosidade e estimativas de  $D_A$  a partir de rádio galáxias FR IIb [136] e de observações de fontes de rádio ultra compactas ([77], [137]) para testar a possibilidade de uma nova física assumindo o cenário “quase”  $\Lambda$ CDM. Eles encontraram uma violação em  $2\sigma$  causada por um excesso de brilho de SNe Ia em  $z > 0.5$ , talvez devido a uma tendência de ampliação das lentes [138].

Ainda nessa linha, Uzan *et al.* (2004) mostraram que observações do efeito Sunyaev-Zeldovich e do brilho superficial em raios-X de aglomerados de galáxias ofereciam um teste de validade para a RDDC. O que eles argumentaram foi que a técnica ESZ+Raios-X para medidas de distância de diâmetro angular é fortemente dependente da validade dessa relação ([5], [139]). Quando a relação não é considerada válida, as distâncias de diâmetro angular determinadas a partir das observações tornam-se:  $D_A^{obs}(z) = D_A(z)\eta^2$ . Então, assumindo o modelo de fundo  $\Lambda$ CDM e usando distâncias de diâmetro angular de 18 aglomerados de galáxias da amostra de Reese *et al.* (2002), que considera uma geometria esférica para os aglomerados, eles encontraram  $\eta = 0.91_{-0.04}^{+0.04}$  ( $1\sigma$ ), resultado esse, apenas marginalmente consistente com o valor padrão ( $\eta = 1$ ).

Em uma abordagem diferente, Avgoustidis *et al.* (2010) exploraram a consistência entre diferentes medidas de distância considerando uma possível violação da conservação cosmológica de fótons como única fonte de violação da RDDC. O que os autores fizeram foi adotar uma extensão da relação de dualidade,  $D_L = D_A(1+z)^{2+\epsilon}$ , no contexto do modelo

$\Lambda$ CDM plano para restringir a opacidade cósmica. Para isso, utilizaram a compilação de dados recentes de SNe Ia [141] combinada com as últimas medidas da taxa de expansão de Hubble numa faixa de *redshift* de  $0 < z < 2$  [111].

A ideia principal por trás do teste é que, enquanto as observações de SNe Ia são afetadas por pelo menos quatro fontes diferentes de opacidade (Via Láctea, a galáxia hospedeira, galáxias intermediárias e o meio intergalático), as medidas atuais de  $H(z)$  são obtidas a partir de estimativas de idade de galáxias evoluindo passivamente, as quais dependem apenas da forma do espectro da galáxia e não de sua luminosidade. Assim, diferentemente das medidas de  $D_L$  a partir de SNe Ia, as observações de  $H(z)$  não são afetadas pela opacidade cósmica  $\tau(z)$  [142]. Fazendo uma relação direta entre o parâmetro  $\epsilon$  da RDDC e  $\tau(z)$ , eles encontraram  $\epsilon = -0.04^{+0.08}_{-0.07}$ .

Seguindo outro caminho, Holanda *et al.* (2011) tomaram a validade da RDDC como certa para ter acesso a morfologia de aglomerados de galáxias. Eles utilizaram medidas de  $D_A(z)$  obtidas a partir do WMAP (7 anos) fixando o modelo  $\Lambda$ CDM convencional plano, enquanto que as medidas observacionais de distância de diâmetro angular dos aglomerados de galáxias,  $D_A^{obs}(z)$ , foram obtidas via ESZ + técnicas de raios-X.

Considerando duas formas distintas para a função parametrizada  $\eta(z)$ ,  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z$  e  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z / (1 + z)$ , eles compararam as amostras de De Filippis *et al.* (2005, modelo  $\beta$  elíptico) e Bonamente *et al.* (2006, modelo  $\beta$  esférico) e suas análises estatísticas forneceram evidências de que a geometria verdadeira dos aglomerados tem a forma elíptica.

## 4.2.2 Testes Independente de Modelo Cosmológico

Alguns testes de validade da RDDC, que são discutidos na literatura, utilizam medidas de distância de diâmetro angular de aglomerados de galáxias obtidas a partir de seu brilho superficial em raios-X mais observações do efeito Sunyaev-Zeldovich, e distâncias de luminosidade de supernovas do tipo Ia ([15], [143], [144], [145], [146]). Essas análises consideram subamostras de aglomerados de galáxias e de SNe Ia construídas de modo que a diferença no *redshift* entre os objetos em cada amostra seja da ordem de  $10^{-3}$  e parametrizam  $\eta$  através de duas funções distintas  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z$  e  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z / (1 + z)$ ,

de forma que os parâmetros envolvidos são restringidos a partir do teste estatístico do  $\chi^2$ .

Meng *et al.* (2012) também reinvestigaram um teste independente de modelo cosmológico utilizando dados de  $D_A$  de aglomerados e  $D_L$  de SNe Ia. Estes autores compararam dois métodos diferentes para extrair as distâncias de luminosidade de SNe Ia do conjunto de dados Union2: o primeiro que ajusta os dados de SNe Ia do Union2 e interpola  $D_L$  no *redshift* de cada aglomerado, e o segundo que utiliza o critério de diferença de *redshift* como sendo  $|z_{cluster} - z_{SNeIa}| < 0.0005$ . Além disso, utilizaram duas formas distintas para parametrizar  $\eta$ ,  $\eta(z)$ ,  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z$  e  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z / (1 + z)$ , e a partir do teste estatístico do  $\chi^2$  encontraram resultados em acordo com o obtido por Holanda *et al.* (2011), de que um modelo tri-axial elipsoidal é mais consistente com a validade da RDDC em  $1\sigma$  enquanto que o modelo  $\beta$  esférico só pode ser acomodado no nível de confiança de  $3\sigma$ .

Por outro lado, Liang *et al.* (2013) utilizaram dados de  $D_A$  de Bonamente *et al.* (2006), mediante a suposição de um modelo esférico para os aglomerados, e distâncias de luminosidade do conjunto Union2 corrigidas, utilizando o método de interpolação para aliviar o viés sistemático devido a diferença de *redshift*, e encontraram resultados que indicam a consistência da RDDC com o modelo esférico no nível de confiança de  $1\sigma$ . Além disso, várias parametrizações de  $\eta(z)$  são confrontadas para os dados atuais de SNe Ia e a amostra de 38 dados de Bonamente, sendo satisfeitas no intervalo de  $2\sigma$ . Contudo, ao confrontar os 25 aglomerados de galáxias da amostra de De Filippis *et al.* (2005), sob a premissa de um modelo elíptico, e o conjunto Union2 com as distâncias de luminosidade corrigidas, o resultado encontrado por eles foi  $\eta(z) = 1$  em  $1\sigma$ , o que é consistente com os resultados anteriores ([143], [145]). Portanto, os resultados dos testes da RDDC mostram ainda depender da escolha dos pressupostos sobre a geometria dos aglomerados.

Seguindo uma linha similar, Gonçalves *et al.* (2015) testaram a RDDC utilizando medidas de fração de massa do gás reportadas pela pesquisa ACT, juntamente com observações de SNe Ia da compilação Union2.1, para obter resultados em acordo com as hipóteses padrão, muito embora a combinação desses dados tenha favorecido valores negativos de  $\eta$ . Os autores apontam que esses resultados devem estar associados a algum processo físico que aumente o número de fótons, modificando a RDDC,  $D_L < (1 + z)^2 D_A$ . Holanda *et al.* (2012), por sua vez, realizaram um teste independente de modelo cosmoló-

gico envolvendo somente medidas de fração de massa do gás de aglomerados de galáxias a partir de observações do ESZ e do brilho superficial em raios-X, e o resultado obtido por eles não apontou nenhuma violação significativa da RDDC.

Por outro lado, Hees *et al.* (2014) consideram que a evolução cosmológica da temperatura da RCF seria afetada pelo acoplamento entre um campo escalar e um campo de matéria, de modo que a distorção na RCF seria parametrizada por um potencial químico  $\mu$ . Os autores partem do pressuposto de que a não conservação do número de fótons modifica a expressão para a distância de luminosidade e, utilizando observações de variações da constante de estrutura fina, que está relacionada com o potencial químico  $\mu$ , eles estimaram parâmetros de violação da RDDC e da evolução da temperatura da RCF, cujos resultados são em 5 ordens de grandeza melhores que os resultados presentes na literatura. Contudo, os resultados obtidos por eles são válidos apenas para teorias com o acoplamento multiplicativo entre o campo escalar e a lagrangiana eletromagnética [150].

Alguns outros autores tem proposto fontes astrofísicas diversas no contexto da violação da RDDC, cuja única fonte de violação seja a não conservação do número de fótons com o objetivo de restringir a opacidade cósmica. Nair *et al.* (2012) e Chen *et al.* (2012), por exemplo, utilizaram dados de SNe Ia e oscilações acústicas dos bárions; Li *et al.* (2013) propõem um método independente de modelo cosmológico utilizando SNe Ia e técnicas de raios-X e ESZ; e Liao *et al.* (2013) fizeram uso dos dados atuais do parâmetro de Hubble e observações de SNe Ia.



# Capítulo 5

## Testando a RDDC com aglomerados de galáxias e $H(z)$

Como vimos no capítulo anterior existem na literatura diversos testes da RDDC. Contudo, na maioria deles são utilizados dados de diferentes fontes astrofísicas, como por exemplo, medidas de distância de luminosidade de SNe Ia e distâncias angulares de aglomerados de galáxias [15], ou medidas de distância de luminosidade de SNe Ia e medidas de fração da massa do gás de aglomerados [93]. Usar fontes distintas significa utilizar dados com diferença de *redshift*, que, embora sejam pequenas, levantam questões sobre a robustez dos resultados, uma vez que as estimativas do parâmetro  $\eta(z)$  poderiam estar contaminadas por diferentes fontes de erros sistemáticos. Na tentativa de burlar tais erros, Holanda *et al.* (2012) propuseram um método independente de modelo cosmológico que utiliza uma única fonte astrofísica para obter o valor observacional de  $\eta$ . Estes autores utilizaram medidas de  $f_{gas}$ , obtidas em raios-X e via ESZ, dos mesmos aglomerados de galáxias, para inferir um valor observacional para  $\eta$  e, assim, testar a validade da RDDC.

O objetivo deste trabalho é investigar a dependência do valor de  $\eta$  com relação ao observável usado de uma mesma amostra de objetos astrofísicos, no caso, os aglomerados de galáxias, dos quais podem ser extraídas medidas de distância de diâmetro angular e medidas de fração da massa do gás. Esta investigação ainda não foi realizada na literatura e consiste de uma contribuição original deste trabalho. As abordagens utilizadas nesta análise foram as seguintes:

- A primeira utilizando medidas de distância de diâmetro angular de aglomerados de galáxias, obtidas tanto via ESZ/raios-X quanto a partir de medidas de  $H(z)$ , para inferir o valor observacional do parâmetro  $\eta$ , e assim, testar a validade da RDDC fazendo uso do teste estatístico do  $\chi^2$ ;
- E a segunda, utilizando medidas de fração da massa do gás dos mesmos aglomerados considerados para obter  $D_A$  via ESZ/raios-X, combinadas com medidas de distância de diâmetro angular obtidas a partir de  $H(z)$  para obter o valor observacional para o parâmetro  $\eta$ , de modo que pudessemos testar a validade da RDDC utilizando, novamente, o teste estatístico do  $\chi^2$ .

No contexto da primeira abordagem realizamos dois testes com diferentes amostras de  $D_A$ , compiladas por Bonamente *et al.* (2006) e De Filippis *et al.* (2005) que adotaram geometrias distintas para descrever os aglomerados, com o intuito de verificar sua influência na validade estrita da relação de dualidade de distância cósmica. Nas seções seguintes analisaremos cada uma das abordagens citadas acima e no apêndice B encontra-se uma breve descrição sobre o teste de  $\chi^2$  utilizado em nossas análises.

## 5.1 Análises utilizando $D_A$ de aglomerados $\times D_A$ de $H(z)$

Nesta seção apresentamos um método independente de modelo cosmológico para testar diretamente a relação de dualidade de distância cósmica. Para inferir um valor observacional para  $\eta$ , utilizamos dados de medidas de distância de diâmetro angular obtidas pela técnica ESZ/raios-X e através de medidas da taxa de expansão do universo.

### 5.1.1 $D_A$ via ESZ/raios-X

Como vimos no capítulo 3, as medidas de distância de diâmetro angular obtidas via ESZ/raios-X são estimadas de acordo com a equação (3.69), e como argumentado por Uzan *et al.* (2004), se a RDDC não for válida, teremos na verdade

$$D_A^{obs} = D_A \eta^2, \quad (5.1)$$

que apenas fornece  $D_A$  quando  $\eta = 1$ .

As medidas de  $D_A$  que utilizamos neste trabalho foram obtidas da amostra compilada por Bonamente *et al.* (2006), que é constituída por 38 aglomerados de galáxias numa faixa de *redshift* entre  $0.14 \leq z \leq 0.89$ . Os autores usaram a técnica de espectroscopia de imageamento combinando dados do ESZ, obtidos das observações do OVRO<sup>1</sup> e BIMA<sup>2</sup>, mais dados de raios-X, obtidos do satélite espacial *Chandra*, para estipular os parâmetros que descrevem os aglomerados. Além disso, eles analisaram os aglomerados usando um modelo de equilíbrio hidrostático (modelo duplo- $\beta$  não-isotérmico) com simetria esférica, que leva em consideração variações na densidade, temperatura e abundância, e considerando também os erros sistemáticos e estatísticos associados ao método. Na tabela 5.1 estão as distâncias angulares obtidas por Bonamente *et al.* (2006).

### 5.1.2 Metodologia

Tomando a expressão (5.1), podemos explicitar uma equação para o parâmetro da RDDC, tal que

$$\eta_{obs}^2(z) = \left( \frac{D_A^{obs}}{D_A(z)} \right)^2. \quad (5.2)$$

onde  $D_A^{obs}$  são os dados obtidos da amostra de Bonamente *et al.* (2006). Por outro lado, as medidas de  $D_A(z)$  foram obtidas a partir dos dados de  $H(z)$  ([117]), de acordo com o método de ajuste polinomial da distância comóvel, conforme apresentado na seção 3.4.1, tal que os *redshifts* usados no cálculo da distância foram os mesmos da amostra de Bonamente *et al.* (2006).

Uma vez que já sabemos como estipular  $\eta^{obs}$ , precisamos definir a parte teórica da análise. Para tanto vamos adotar duas funções parametrizadas para  $\eta$  que envolvam o parâmetro a ser restrito pelas observações,

$$\eta(z) = \begin{cases} 1 + \eta_0 z, & \text{(P1)} \\ 1 + \eta_0 \frac{z}{(1+z)}, & \text{(P2)} \end{cases}$$

A primeira expressão é uma expansão linear contínua e suave com um único parâmetro, enquanto que a segunda é uma extensão da primeira com a vantagem de que contorna o

---

<sup>1</sup>Do inglês *Owens Valley Radio Observatory*

<sup>2</sup>Do inglês *Berkeley-Illinois-Maryland Association Observatory*

Aglomerado	$z$	$D_A$ (Gpc)	$\Delta_+$	$\Delta_-$
CL 0016+1609	0.541	1.38	0.22	0.22
Abell 0068	0.255	0.63	0.16	0.19
Abell 0267	0.230	0.60	0.11	0.09
Abell 0370	0.375	1.08	0.19	0.20
MS 0451.6-0305	0.550	1.42	0.26	0.23
MACS J0647.7+7015	0.171	0.52	0.15	0.12
Abell 0586	0.686	1.68	0.48	0.38
MACS J0744.8+3927	0.288	0.78	0.18	0.18
Abell 0611	0.182	0.66	0.09	0.10
Abell 0665	0.282	0.88	0.30	0.23
Abell 0697	0.217	0.98	0.17	0.14
Abell 0773	0.291	0.83	0.02	0.02
ZW 3146	0.826	1.33	0.28	0.26
MS 1054-0321	0.142	0.78	0.18	0.13
MS 1137.5+6625	0.890	1.08	0.42	0.28
MACS J1149.5+2223	0.490	1.38	0.47	0.37
Abell 1413	0.183	0.65	0.09	0.09
CL J1226.9+3332	0.451	0.96	0.06	0.08
MACS J1311.0-0310	0.327	1.13	0.09	0.10
Abell 1689	0.252	1.07	0.02	0.08
RX J1347.5-1145	0.545	1.49	0.06	0.03
MS 1358.4+6245	0.171	0.44	0.04	0.05
Abell 1835	0.322	1.19	0.15	0.14
MACS J1423.8+2504	0.229	0.64	0.20	0.17
Abell 1914	0.202	0.52	0.04	0.05
Abell 1995	0.152	0.61	0.06	0.07
Abell 2111	0.176	0.66	0.14	0.11
Abell 2163	0.813	1.04	0.51	0.43
Abell 2204	0.164	0.58	0.29	0.25
Abell 2218	0.224	0.73	0.20	0.13
RX J1716.4+6708	0.570	1.33	0.37	0.28
Abell 2259	0.235	0.46	0.11	0.08
Abell 2261	0.483	1.44	0.27	0.23
MS 2053.7-0449	0.412	1.22	0.24	0.23
MACS J2129.4-0741	0.584	0.77	0.21	0.18
RX J2129.7+0005	0.544	0.80	0.19	0.16
MACS J2214.9-1359	0.784	2.85	0.52	0.63
MACS J2228.5+2036	0.583	2.48	0.41	0.44

Tabela 5.1: Dados de medidas de distância de diâmetro angular da amostra de Bonamente *et al.* (2006). Adaptado de Bonamente *et al.* (2006).

problema da divergência em altos *redshifts*, sendo válida para qualquer valor de  $z$ . Existem outras parametrizações possíveis, no entanto estas são as mais utilizadas na literatura.

Posto que já temos a medida de  $\eta^{obs}$ , tal como as parametrizações teóricas para  $\eta_{teo}(z)$ , podemos partir para a análise estatística do presente trabalho. Como dito no início do capítulo, o teste de validade da RDDC será feito através do teste estatístico do  $\chi^2$ , que limitará o parâmetro  $\eta_0$  através do melhor ajuste entre observação e teoria, obtido pela minimização do valor

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\eta_{obs}^2(z) - \eta_{teo}^2(\eta_0)]^2}{\sigma_{obs}^2}. \quad (5.3)$$

onde  $\sigma_{obs}^2$  é o erro relacionado a  $\eta_{obs}^2(z)$  e leva em consideração a técnica de propagação de erros. No caso particular de uma função cujas variáveis são independentes entre si,  $\eta^{obs}(D_A^{obs}, D_A)$ , temos a seguinte expressão [124]:

$$\sigma_{obs}^2 = \left[ \frac{\partial \eta^{obs}}{\partial D_A^{obs}} \right]^2 \sigma_T^2 + \left[ \frac{\partial \eta^{obs}}{\partial D_A^{H(z)}(z)} \right]^2 \sigma_{H(z)}^2, \quad (5.4)$$

que nos leva a,

$$\sigma_{obs}^2 = \left[ \frac{1}{D_A^{H(z)}(z)} \right]^2 \sigma_T^2 + \left[ \frac{D_A^{obs}}{(D_A^{H(z)}(z))^2} \right]^2 \sigma_{H(z)}^2 \quad (5.5)$$

onde  $\sigma_T$  é o erro associado à amostra simetrizada de Bonamente *et al.* (2006). Como os dados apresentam incertezas assimétricas, simetizamos a amostra utilizando o método de D'Agostini [154], ou seja,

$$D_A^{obs} = \tilde{D}_A + \Delta_+ - \Delta_- \quad (5.6)$$

e

$$\sigma_{sim} = \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2}. \quad (5.7)$$

sendo  $\tilde{D}_A$  a medida da distância de diâmetro angular da amostra e  $\Delta_+$  e  $\Delta_-$  os erros superior e inferior, respectivamente.

Além disso, para o cálculo do erro total devemos considerar a seguinte expressão:

$$\sigma_T^2 = \sigma_{sim}^2 + \sigma_{est}^2 + \sigma_{sist}^2 \quad (5.8)$$

onde  $\sigma_{est}$  e  $\sigma_{sist}$  são os erros estatísticos e sistemáticos, respectivamente, obtidos em quadratura para os aglomerados de galáxias<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> $\sigma_{est} = 19\%$  e  $\sigma_{sist} = 12\%$  (Bonamente *et al.*, 2006).

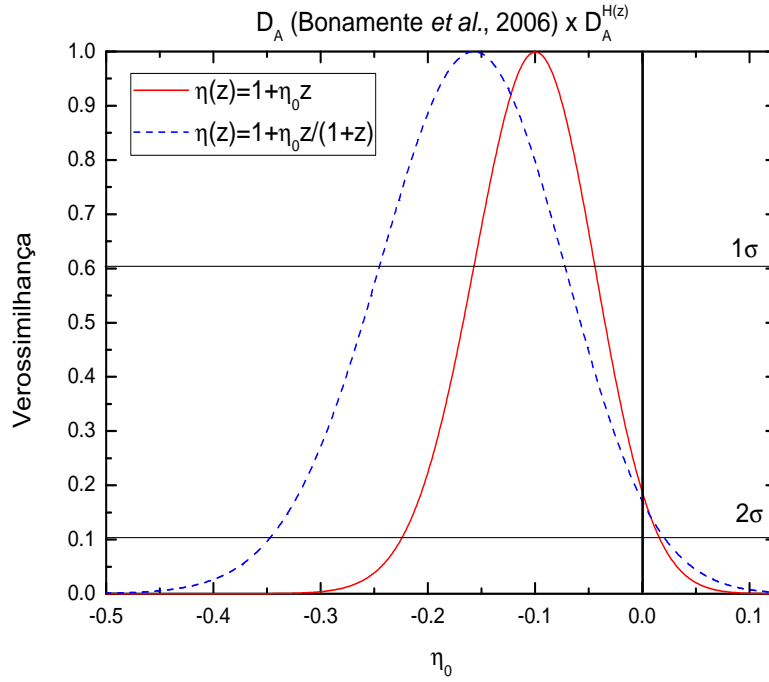


Figura 5.1: Função de distribuição de probabilidade (verossimilhança) do parâmetro  $\eta_0$  utilizando dados de  $D_A$  via ESZ/raios-X e  $H(z)$  para as parametrizações P1 e P2.

### 5.1.3 Resultados

Na figura (5.1) estão graficadas as funções de distribuição de probabilidade (verossimilhança) do parâmetro  $\eta_0$  em cada parametrização. Podemos ver que, a forma da função de distribuição de probabilidade é a mesma para as duas parametrizações, todavia elas diferem quando analisamos seu deslocamento horizontal, o melhor ajuste de P1 (curva sólida vermelha) é mais próximo do valor  $\eta_0 = 0$ , e o de P2 (curva tracejada azul) mais distante; e a largura das curvas, para a parametrização P2 temos uma curva mais larga enquanto que para a parametrização P1 temos uma curva mais estreita. Essas características indicam que o confronto entre as distâncias angulares a partir da amostra de Bonamente *et al.* (2006) com as distâncias angulares obtidas via  $H(z)$  discordam moderadamente da relação de dualidade, em ambas as parametrizações (a RDDC é apenas marginalmente satisfeita,  $\eta = 1$ , para um nível de confiança de  $2\sigma$ ).

Com relação aos valores numéricos, podemos ver os resultados obtidos para  $\eta_0$  com suas incertezas na tabela 5.2, para um nível de confiança de 95,4% ( $2\sigma$ ). Na próxima seção seguiremos com a análise da RDDC, mas dessa vez o parâmetro  $\eta$  será obtido através de

$D_A$ (Bonamente <i>et al.</i> , 2006) $\times D_A^{H(z)}$	$\chi^2/d.o.f$
$\eta_0(P1) = -0.099_{-0.126}^{+0.119} (2\sigma)$	0.72
$\eta_0(P2) = -0.157_{-0.193}^{+0.177} (2\sigma)$	0.72

Tabela 5.2: Resultados obtidos para o teste de validade da RDDC utilizando  $D_A$  (Bonamente *et al.*, 2006)  $\times D_A^{H(z)}$  para um nível de confiança de 95,4%.

uma função modelo para a fração de massa do gás dos aglomerados.

## 5.2 Análises utilizando $f_{gas}$ de aglomerados $\times D_A$ de $H(z)$

Na análise anterior utilizamos medidas de  $D_A$  via ESZ/raios-X e via  $H(z)$  para estimar um valor observacional para  $\eta^{obs}$ . O que faremos agora será obter um valor para  $\eta^{obs}$  utilizando medidas de fração de massa do gás de aglomerados de galáxias via raios-X (*Bremsstrahlung* térmico) e, novamente, medidas de  $D_A$  via  $H(z)$ . O método desenvolvido é descrito a seguir.

### 5.2.1 Metodologia

No capítulo 3 vimos que a fração de massa do gás em raios-X em sua forma geral é dada pela equação (3.29):

$$f_x \propto D_L D_A^{1/2}. \quad (5.9)$$

Seguindo a abordagem proposta por Gonçalves *et al.* (2012), vamos definir uma função modelo para a  $f_{gas}$ , tal que

$$f_{gas} = N \left[ \frac{D_L^* D_A^{*1/2}}{D_L D_A^{1/2}} \right], \quad (5.10)$$

onde  $N$  é o fator de normalização que traz todas as informações sobre o conteúdo de matéria do aglomerado, tal como fração de massa estelar, pressão não-térmica e o parâmetro de depleção  $b$ , que indica a quantidade de bárions que são termalizadas dentro do aglomerado<sup>4</sup>, e as quantidades com \* correspondem ao modelo fiducial usado nas observações.

<sup>4</sup>Mais detalhes podem ser encontrados em [155]

Utilizando a relação de dualidade em sua forma geral,

$$\frac{D_L}{D_A(1+z)^2} = \eta(z),$$

e adotando como modelo fiducial o  $\Lambda$ CDM plano ( $\eta = 1$ ,  $\Omega_k = 0$ ), podemos reescrever a equação (5.10) como:

$$f_{gas}(z) = N \left[ \frac{D_A^{*3/2}}{D_A^{3/2} \eta(z)} \right], \quad (5.11)$$

de tal forma que o valor observacional de  $\eta^{obs}$  que será usado na análise estatística é dado por:

$$\eta^{obs}(z) = N \left[ \frac{D_A^{*3/2}}{D_A^{3/2}(z) f_{gas}(z)} \right], \quad (5.12)$$

onde as medidas de  $D_A(z)$  foram obtidas a partir de  $H(z)$ , pelo método descrito na seção 3.4.1, considerando os *redshifts* dos aglomerados de galáxias dos quais serão obtidas as medidas de  $f_{gas}$ , e a quantidade  $D_A^*$  é obtida utilizando o modelo fiducial  $\Lambda$ CDM plano a partir da seguinte equação:

$$D_A^* = \frac{cH_0^{-1}}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{M,0}(1+z')^3 + \Omega_{\Lambda,0}}} Mpc, \quad (5.13)$$

com  $\Omega_{M,0} = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$  e  $H_0 = 70 km s^{-1} Mpc^{-1}$ .

Por outro lado, as medidas de  $f_{gas}$  foram obtidas da amostra compilada por La Roque *et al.* (2006). Esta amostra é composta pelos mesmos 38 aglomerados de galáxias da amostra de Bonamente *et al.* (2006) e estão numa faixa de *redshift* entre  $0.14 \leq z \leq 0.89$ . Os dados de  $f_{gas}$  foram obtidos a partir das medidas de raios-X do Chandra e das medidas de interferometria do ESZ pelo OVRO/BIMA. Além disso, os autores consideraram um modelo de equilíbrio hidrostático (modelo duplo- $\beta$  não-isotérmico) com simetria esférica, que leva em consideração variações na densidade, temperatura e abundância, para descrever os aglomerados. Na tabela 5.3 estão as medidas de  $f_{gas}$  obtidas por La Roque *et al.* (2006).

Dotados da parte observacional da análise, nos resta determinar a parte teórica. Por fim de consistência exploramos os dados a partir das mesmas expressões teóricas para  $\eta(z)$  utilizadas na seção anterior, isto é, P1 e P2. E de maneira análoga, utilizamos o teste



Aglomerado	$z$	$f_{gas}$	$\Delta_+$	$\Delta_-$
CL 0016+1609	0.541	0.16	+0.014	-0.011
Abell 0068	0.255	0.107	+0.016	-0.013
Abell 0267	0.230	0.12	+0.013	-0.011
Abell 0370	0.375	0.12	+0.005	-0.005
MS 0451.6-0305	0.550	0.147	+0.012	-0.010
MACS J0647.7+7015	0.584	0.079	+0.008	-0.007
Abell 586	0.171	0.098	+0.01	-0.009
MACS J0744.8+3927	0.686	0.158	+0.013	-0.012
Abell 611	0.288	0.122	+0.007	-0.007
Abell 665	0.182	0.122	+0.007	-0.007
Abell 697	0.282	0.119	+0.005	-0.005
Abell 773	0.217	0.131	+0.01	-0.008
Zw 3146	0.291	0.144	+0.008	-0.007
MS 1054.5-0321	0.826	0.122	+0.004	-0.004
MS 1137.5+6625	0.784	0.109	+0.014	-0.012
MACS J1149.5+2223	0.544	0.107	+0.007	-0.005
Abell 1413	0.142	0.106	+0.009	-0.01
CL J1226.9+3332	0.890	0.109	+0.014	-0.012
MACS J1311.0-0310	0.490	0.111	+0.018	-0.012
Abell 1689	0.183	0.124	+0.004	-0.004
RX J1347.5Å1145	0.451	0.120	+0.008	-0.004
MS 1358.4+6245	0.327	0.09	+0.007	-0.006
Abell 1835	0.252	0.112	+0.018	-0.019
MACS J1423.8+2404	0.545	0.123	+0.005	-0.006
Abell 1914	0.171	0.104	+0.005	-0.006
Abell 1995	0.322	0.086	+0.007	-0.007
Abell 2111	0.229	0.099	+0.013	-0.01
Abell 2163	0.202	0.16	+0.007	-0.006
Abell 2204	0.152	0.086	+0.007	-0.008
Abell 2218	0.176	0.103	+0.005	-0.005
RX J1716.4+6708	0.813	0.095	+0.026	-0.014
Abell 2259	0.164	0.126	+0.009	-0.008
Abell 2261	0.224	0.131	+0.013	-0.011
MS 2053.7-0449	0.583	0.117	+0.035	-0.021
MACS J2129.4-0741	0.570	0.15	+0.012	-0.01
RX J2129.7+0005	0.235	0.122	+0.011	-0.008
MACS J2214.9-1359	0.483	0.119	+0.015	-0.011
MACS J2228.5+2036	0.412	0.136	+0.018	-0.012

Tabela 5.3: Dados de medidas de fração de massa do gás da amostra de La Roque *et al.* (2006). Adaptado de La Roque *et al.* (2006).

$f_{gas}$ (La Roque <i>et al.</i> , 2006) $\times D_A^{H(z)}$	$\tilde{\chi}^2/d.o.f$
$\eta_0(P1) = -0.061_{-0.149}^{+0.171} (1\sigma)$	0.78
$\eta_0(P2) = -0.164_{-0.276}^{+0.339} (1\sigma)$	0.78

Tabela 5.4: Resultados obtidos para o teste de validade da RDDC utilizando  $f_{gas}$  (La Roque *et al.*, 2006)  $\times D_A^{H(z)}$  para um nível de confiança de 68,3%.

estatístico do  $\chi^2$  como método de análise de validade da RDDC, para obter quais valores teóricos de  $\eta^{teo}$  melhor se ajustam aos valores de  $\eta^{obs}$ , ou seja,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{[\eta_{obs}(z, \mathbf{N}) - \eta_{teo}(z, \eta_0)]^2}{\sigma_{obs}^2}. \quad (5.14)$$

onde  $M$  é o número de aglomerados e  $\sigma_{obs}^2$  é o erro obtido através da propagação dos erros associados as medidas de  $\eta^{obs}$ , tal que

$$\sigma_{obs}^2 = \frac{N^2 D_A^{*3}}{f_{gas}^4 D_A^3} \sigma_{tot}^2 + \frac{9}{4} \frac{N^2 D_A^{*3}}{f_{gas}^2 D_A^5} \sigma_{D_A}^2 \quad (5.15)$$

onde  $\sigma_{tot}$  é o erro total associado a amostra de La Roque *et al.* (2006). Esses dados também apresentam incertezas assimétricas, e uma forma de simetrizá-la é considerar apenas o erro superior. Além do mais, para o cálculo do erro total devemos considerar a expressão  $\sigma_{tot} = \sigma_{f_{gas}} + \sigma_{sist}$ , onde  $\sigma_{sist}$  são os erros sistemáticos considerados para a amostra<sup>5</sup>.

## 5.2.2 Resultados

Os resultados da nossa análise estatística são mostrados na figura (5.2) para as parametrizações P1 (curva sólida vermelha) e P2 (curva tracejada azul). Podemos perceber que o melhor ajuste da parametrização P1 é ligeiramente mais próximo do valor  $\eta_0 = 0$  do que o melhor ajuste da parametrização P2. Por outro lado, quando analisamos a largura da gaussiana concernente à probabilidade, vemos que a primeira parametrização tem uma gaussiana ligeiramente mais estreita do que a parametrização P2.

Em termos numéricos, os resultados obtidos para  $\eta_0$  com suas incertezas são apresentados na tabela 5.4, para um nível de confiança de 68,3% ( $1\sigma$ ).

<sup>5</sup> $\sigma_{sist} = 12\%$  (La Roque *et al.*, 2006).

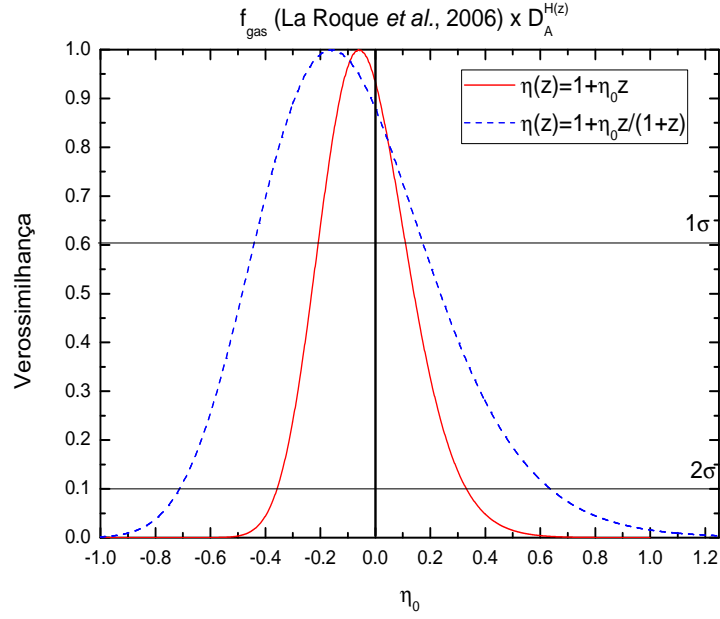


Figura 5.2: Função de distribuição de probabilidade (verossimilhança) utilizando dados de  $f_{gas}$  via raios-X e dados de  $D_A$  a partir de  $H(z)$ , para as parametrizações P1 e P2.

Para uma melhor comparação dos dados, plotamos os resultados de ambos os testes nas figuras (5.3) e (5.4) para as parametrizações P1 e P2, respectivamente. Constatamos que mesmo considerando os mesmos aglomerados de galáxias, apenas utilizando quantidades diferentes, a relação de dualidade de distância foi validada (teste de  $f_{gas}$ ) ou violada moderadamente (teste com  $D_A$ ).

Na figura (5.3) vemos que, mesmo considerando os erros sistemáticos, o teste utilizando  $D_A$  de aglomerados exclui em  $2\sigma$  a validade da RDDC, a gaussiana é mais estreita e o melhor ajuste para  $\eta_0$  é mais distante do pico  $\eta_0 = 0$ ; enquanto que os mesmos aglomerados validam a relação ainda em  $1\sigma$  quando fazemos o teste utilizando medidas de  $f_{gas}$ , a gaussiana é mais larga e o melhor ajuste para  $\eta_0$  é ligeiramente mais próximo do valor ideal ( $\eta_0 = 0$ ).

Para a parametrização P2 (figura 5.4) acontece algo semelhante: a RDDC é apenas marginalmente compatível em  $2\sigma$  quando consideramos medidas de  $D_A$  de aglomerados, a gaussiana é mais estreita e com o melhor ajuste mais distante do valor  $\eta_0 = 0$ ; enquanto que o teste utilizando fração de massa do gás valida a relação em  $1\sigma$ , largura e melhor ajuste da curva compatíveis com o valor  $\eta_0 = 0$ .

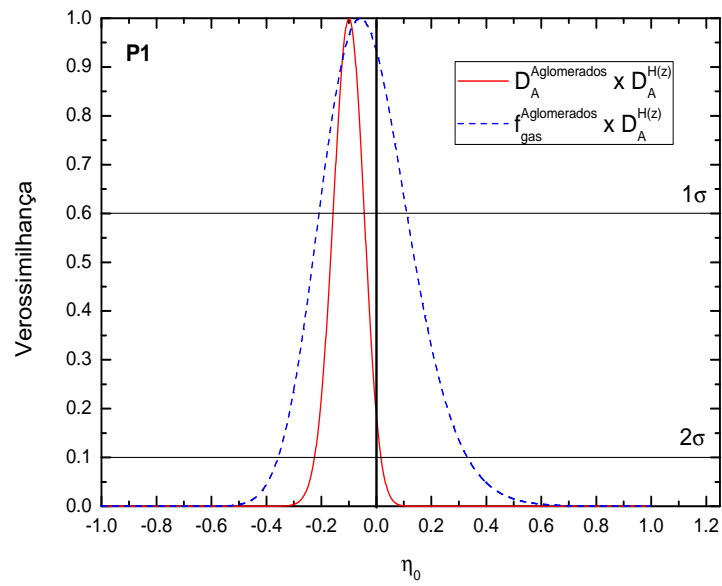


Figura 5.3: Função de distribuição de probabilidade utilizando dados de  $f_{gas}$  via raios-X e dados de  $D_A$  via ESZ/raios-X, para a parametrização P1.

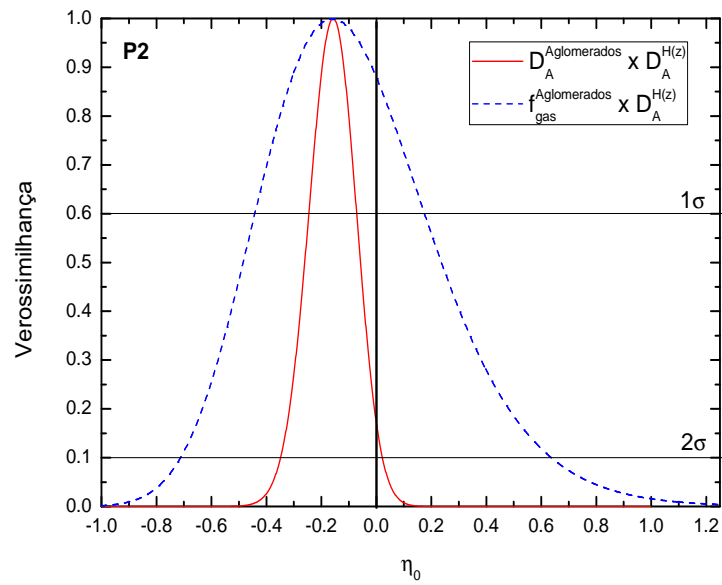


Figura 5.4: Função de distribuição de probabilidade utilizando dados de  $f_{gas}$  via raios-X e dados de  $D_A$  via ESZ/raios-X, para a parametrização P2.

	$D_A$		
	$1\sigma$	$2\sigma$	$\chi^2/d.o.f$
P1	$\eta_0 = -0.099_{-0.056}^{+0.054}$	$\eta_0 = -0.099_{-0.126}^{+0.119}$	0.72
P2	$\eta_0 = -0.157_{-0.093}^{+0.082}$	$\eta_0 = -0.157_{-0.193}^{+0.177}$	0.72

Tabela 5.5: Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando  $D_A$  (Bonamente *et al.*, 2006) e  $D_A^{H(z)}$  para os níveis de confiança de 68, 3% e 95, 4%, respectivamente, em ambas as parametrizações.

	$f_{gas}$		
	$1\sigma$	$2\sigma$	$\chi^2/d.o.f$
P1	$\eta_0 = -0.061_{-0.149}^{+0.171}$	$\eta_0 = -0.061_{-0.299}^{+0.391}$	0.78
P2	$\eta_0 = -0.164_{-0.276}^{+0.339}$	$\eta_0 = -0.164_{-0.546}^{+0.794}$	0.78

Tabela 5.6: Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando  $f_{gas}$  (La Roque *et al.*, 2006) e  $D_A^{H(z)}$  para os níveis de confiança de 68, 3% e 95, 4%, em ambas as parametrizações.

Verificamos ainda que os valores do parâmetro  $\eta_0$  foram preferencialmente negativos, o que pode indicar a existência de uma física exótica envolvendo o acoplamento de fótons com partículas além das previstas no modelo padrão de física de partículas [140]. Além disto, como a validade da RDDC, utilizando dados de  $D_A$  via ESZ/raios-X foi apenas marginalmente consistente com o valor de  $\eta = 1$ , pode ser que haja alguma influência da morfologia dos aglomerados considerados [138]. Nas tabelas (5.5) e (5.6), estão os resultados numéricos para ambos os testes considerando as duas parametrizações, nos níveis de confiança de  $1\sigma$  e  $2\sigma$ .

### 5.3 Análises utilizando $D_A$ de aglomerados com diferentes morfologias

Grande parte dos estudos sobre o gás intra-aglomerado e a distribuição de matéria escura nos aglomerados se restringem à geometria esférica como padrão ([6], [156]). Contudo, observações recentes de aglomerados de galáxias, baseadas nos satélites Chandra e XMM-Newton, têm mostrado que, geralmente, os aglomerados exibem mapas de brilho superficial elípticos. Levando isso em conta e também os resultados obtidos nas seções

anteriores, que indicaram uma leve violação da relação de dualidade quando considerado o teste que utilizava medidas de distância de diâmetro angular, realizamos outro teste para verificar se a causa da não-violação pode estar associada a morfologia dos aglomerados.

Neste intuito, testamos a validade da RDDC, num cenário independente de modelo cosmológico, utilizando duas amostras compiladas por De Filippis *et al.* (2005), onde uma considera um modelo com simetria esférica e outra um modelo com simetria elíptica para descrever os aglomerados e, assim, obter os dados de distância de diâmetro angular.

### 5.3.1 Metodologia

Vamos considerar novamente a expressão generalizada para a distância de diâmetro angular de aglomerados de galáxias via ESZ/raios-X, dada pela equação (3.69), tal que

$$D_A^{obs}(z) = D_A(z)\eta^2. \quad (5.16)$$

De onde podemos estipular um valor observacional para  $\eta^{obs}(z)$  dado por

$$\eta_{obs}^2 = \frac{D_A^{obs}(z)}{D_A(z)}, \quad (5.17)$$

onde as medidas de  $D_A^{obs}$  foram obtidas a partir das amostras compiladas por De Filippis *et al.* (2005). Estas amostras são constituídas por 25 aglomerados de galáxias numa faixa de *redshift* entre  $0.023 \leq z \leq 0.8$  usando o modelo- $\beta$  esférico isotérmico e o modelo- $\beta$  elíptico isotérmico para descrever os aglomerados. O que os autores fizeram foi reanalisar dados do arquivo de raios-X dos satélites *Chandra* e *XMM-Newton* de duas amostras que combinaram análises de raios-X e ESZ utilizando o modelo- $\beta$  esférico isotérmico. Uma das amostras foi compilada por Reese *et al.* (2002) e é composta por 18 aglomerados de galáxias distribuídos numa faixa de *redshift* entre  $0.14 < z < 0.8$  e a outra foi a amostra de Mason *et al.* (2001), composta por 7 aglomerados a partir do fluxo de raios-X limitado por Ebeling *et al.* (1996). Na tabela (5.7) estão os dados obtidos por De Filippis *et al.* (2005).

Por outro lado, as medidas de  $D_A$  foram obtidas a partir de  $H(z)$  de acordo com o método de ajuste polinomial da distância comóvel, seção (3.4.1), considerando os *redshifts* da amostra de De Filippis *et al.* (2005).

Aglomerado	z	$D_A^{Elip}$ (Mpc)	$D_A^{Esf}$ (Mpc)
MS 1137.5+6625	0.784	$2479 \pm 1023$	$3179_{-1640}^{+1103}$
MS 0451.6-0305	0.550	$1073 \pm 238$	$1278_{-299}^{+265}$
CL 0016+1609	0.546	$1635 \pm 391$	$2041_{-514}^{+484}$
RX J1347.5-1145	0.451	$1166 \pm 262$	$1221_{-343}^{+368}$
Abell 0370	0.374	$1231 \pm 441$	$4352_{-1245}^{+1388}$
MS 1358.4+6245	0.327	$697 \pm 183$	$866_{-310}^{+248}$
Abell 1995	0.322	$885 \pm 207$	$1119_{-282}^{+247}$
Abell 0611	0.288	$934 \pm 331$	$995_{-293}^{+325}$
Abell 0697	0.282	$1099 \pm 308$	$998_{-250}^{+298}$
Abell 1835	0.252	$946 \pm 131$	$1027_{-198}^{+194}$
Abell 2261	0.224	$1118 \pm 283$	$1049_{-272}^{+306}$
Abell 0773	0.216	$1465 \pm 407$	$1450_{-332}^{+361}$
Abell 2163	0.202	$806 \pm 1635$	$828_{-205}^{+181}$
Abell 0520	0.202	$387 \pm 141$	$723_{-236}^{+270}$
Abell 1689	0.183	$604 \pm 84$	$688_{-163}^{+172}$
abell 0665	0.182	$4581 \pm 189$	$466_{-179}^{+217}$
Abell 2218	0.171	$809 \pm 263$	$1029_{-352}^{+339}$
Abell 1413	0.142	$478 \pm 126$	$573_{-151}^{+171}$
Abell 2142	0.091	$335 \pm 70$	$187_{-97}^{+212}$
Abell 0478	0.088	$448 \pm 185$	$406_{-135}^{+237}$
Abell 1651	0.074	$369 \pm 62$	$373_{-122}^{+202}$
Abell 0401	0.072	$165 \pm 45$	$610_{-254}^{+593}$
Abell 0399	0.058	$242 \pm 61$	$107_{-41}^{+85}$
Abell 2256	0.023	$103 \pm 42$	$296_{-90}^{+127}$
Abell 1656	0.084	$749 \pm 385$	$235_{-98}^{+218}$

Tabela 5.7: Dados de medidas de distância de diâmetro angular da amostra de De Filippis *et al.* (2005) para os casos elíptico e esférico. Adaptado de De Filippis *et al.* (2005).

Seguindo o mesmo procedimento das duas últimas seções, a quantidade  $\eta(z)$  que deforma a RDDC, foi parametrizada sob duas diferentes expressões:

$$\eta(z) = \begin{cases} 1 + \eta_0 z, & \text{(P1)} \\ 1 + \eta_0 \frac{z}{(1+z)}, & \text{(P2)} \end{cases}$$

Para a análise em questão também utilizamos o teste estatístico do  $\chi^2$ , que indicará quais valores teóricos de  $\eta^{teo}$  melhor se ajustam aos valores de  $\eta^{obs}$ , ou seja,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\eta_{obs}^2(z) - \eta_{teo}^2(\eta_0)]^2}{\sigma_{obs}^2}. \quad (5.18)$$

onde  $\sigma_{obs}^2$  é o erro relacionado a  $\eta_{obs}^2(z)$ , dado por:

$$\sigma_{obs}^2 = \left[ \frac{1}{D_A(z)} \right]^2 \sigma_T^2 + \left[ \frac{D_A^{obs}}{D_A^2(z)} \right]^2 \sigma_{H(z)}^2, \quad (5.19)$$

com  $\sigma_T$  sendo o erro associado à amostra de De Filippis *et al.* (2005).

Em particular, no caso da amostra esférica os dados apresentam incertezas assimétricas, de modo que a simetizamos utilizando o método de D'Agostini [154], tal que,  $\sigma_{sim} = (\Delta_+ + \Delta_-)/2$ , com o erro total sendo,

$$\sigma_T^2 = \sigma_{sim}^2 + \sigma_{sist}^2, \quad (5.20)$$

onde  $\sigma_{sist} = 12\%$  [7].

### 5.3.2 Resultados

Nas figuras (5.5) e (5.6) plotamos as funções de distribuição de probabilidade (verossimilhança) para as amostras elíptica e esférica de De Filippis *et al.* (2005), respectivamente. Podemos ver que as distâncias de diâmetro angular do modelo- $\beta$  elíptico fornecem um melhor ajuste para  $\eta_0$  que concorda com a RDDC em um nível de confiança de  $1\sigma$ , em ambas as parametrizações. Por outro lado, embora as distâncias angulares do modelo- $\beta$  esférico concordem com a RDDC no nível de confiança de  $2\sigma$ , o fato de termos  $\eta_0 > 0$  aponta que as distâncias de diâmetro angular do modelo- $\beta$  esférico estão superestimadas com relação às obtidas a partir das medidas de  $H(z)$ .

Outrossim, ao realizarmos o teste com dados de  $D_A$  da amostra de Bonamente *et al.* (2006), que considerava um modelo duplo- $\beta$  não-isotérmico com simetria esférica para



descrever os aglomerados, obtivemos valores de  $\eta_0$  preferencialmente negativos enquanto que utilizando a amostra de De Filippis *et al.* (2005) com simetria esférica obtivemos valores de  $\eta_0$  preferencialmente positivos. A interpretação deste resultado é que as distâncias angulares da amostra de De Filippis *et al.* (2005) estão superestimadas também com relação as obtidas por Bonamente *et al.* (2006).

Portanto, apesar de não encontramos evidências de uma violação na relação de dualidade de distância ao utilizarmos a amostra elíptica de De Filippis *et al.* (2005), percebemos uma leve violação da RDDC ao considerarmos a amostra que assume uma geometria esférica. Tais resultados são importantes pois mostram a relevância da escolha da geometria usada para descrever os aglomerados, assim como, o fato dessa propriedade local poder ser restringida por um argumento global como o fornecido pela relação de dualidade entre as distâncias cosmológicas [143].

Com relação aos valores numéricos, podemos ver os resultados obtidos para  $\eta_0$  com suas incertezas nas tabelas (5.8) e (5.9) acima, para os níveis de confiança de 68,3% ( $1\sigma$ ) e 95,4% ( $2\sigma$ ), respectivamente.

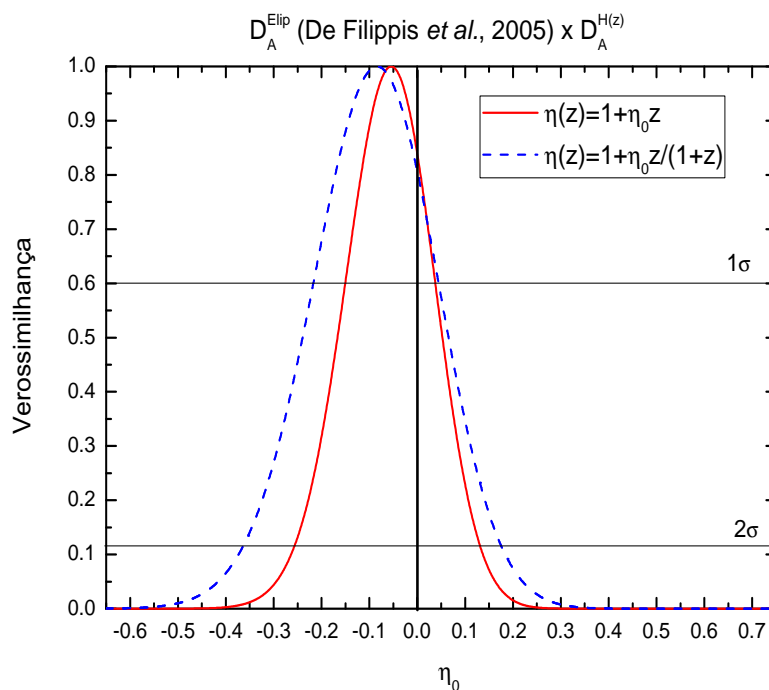


Figura 5.5: Função de distribuição de probabilidade (verossimilhança) utilizando dados de  $D_A$  via ESZ/raios-X e  $H(z)$  para a amostra elíptica de De Filippis *et al.* (2005).

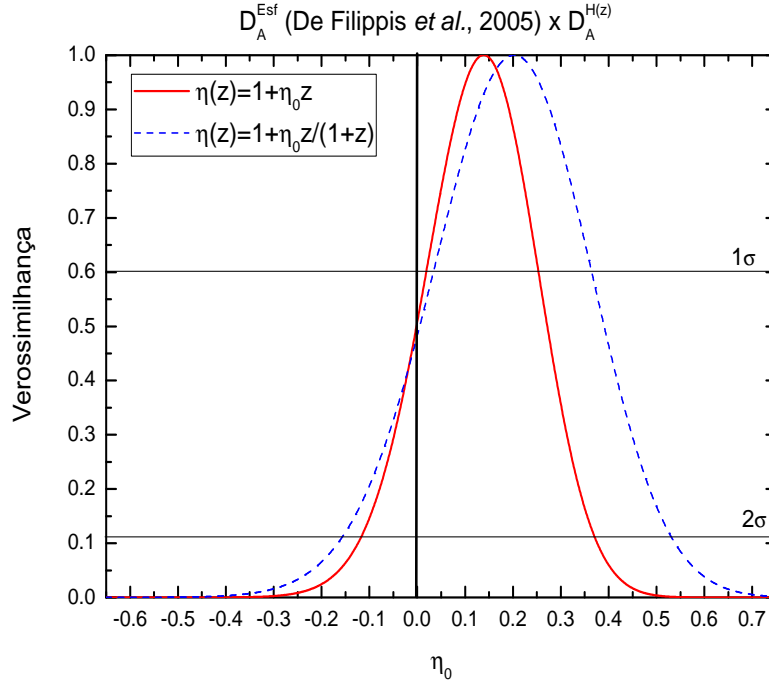


Figura 5.6: Função de distribuição de probabilidade (verossimilhança) utilizando dados de  $D_A$  via ESZ/raios-X e  $H(z)$  para a amostra esférica de De Filippis *et al.* (2005).

	$D_A^{Elip}$		
	$1\sigma$	$2\sigma$	$\chi^2/d.o.f$
P1	$\eta_0 = -0.054_{-0.096}^{+0.094}$	$\eta_0 = -0.054_{-0.206}^{+0.194}$	0.97
P2	$\eta_0 = -0.084_{-0.136}^{+0.129}$	$\eta_0 = -0.084_{-0.286}^{+0.274}$	0.97

Tabela 5.8: Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando a amostra elíptica para  $D_A^{Elip}$  (De Filippis *et al.* (2005)) e  $D_A^{H(z)}$  para os níveis de confiança de 68,3% e 95,4%, respectivamente, em ambas as parametrizações.

	$D_A^{Esf}$		
	$1\sigma$	$2\sigma$	$\chi^2/d.o.f$
P1	$\eta_0 = 0.167_{-0.142}^{+0.083}$	$\eta_0 = 0.167_{-0.302}^{+0.213}$	0.95
P2	$\eta_0 = 0.244_{-0.204}^{+0.121}$	$\eta_0 = 0.244_{-0.404}^{+0.296}$	0.95

Tabela 5.9: Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando a amostra esférica para  $D_A^{Esf}$  (De Filippis *et al.* (2005)) e  $D_A^{H(z)}$  para os níveis de confiança de 68,3% e 95,4%, respectivamente, em ambas as parametrizações.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Nos últimos anos foram compilados e disponibilizados uma grande quantidade de dados observacionais, cujas implicações têm revolucionado a cosmologia moderna e aberto precedentes para a investigação de diversos mecanismos além da física usual. A possibilidade de uma nova física se revela, por exemplo, na relação entre diferentes tipos de medidas de distâncias cosmológicas. Nesse contexto, surgiu o presente trabalho que teve como objetivo analisar a relação de dualidade de distância cósmica à vista dos dados observacionais disponíveis, assim como, suas consequências teóricas.

Para fazermos a análise da RDDC, iniciamos nosso estudo no capítulo 2 com a base teórica da relatividade geral e a partir da imposição de um universo homogêneo e isotrópico chegamos a métrica de FLRW. Fizemos uma revisão do modelo padrão da cosmologia, assim como, dos fatos observacionais que o fortaleceram e estudamos ainda a dinâmica cósmica do universo e como restringir parâmetros cosmológicos a partir das observações. Por último, mas não menos importante, calculamos as distâncias cosmológicas para um universo em expansão, uma vez que são bastante úteis na cosmologia observacional, especificamente nos testes cosmológicos que envolvem medidas de distância.

No capítulo 3 nos dedicamos ao estudo dos aglomerados de galáxias, desde como calcular a massa total do aglomerado, e a massa em forma de gás do meio intra-aglomerado até estimativas da fração de massa do gás a partir do efeito *Bremsstrahlung* térmico. Discutimos o efeito Sunyaev-Zel'dovich nas versões do efeito térmico e cinemático, e em seguida acrescentamos as correções relativísticas, e além disso examinamos como sua

combinação com o brilho superficial em raios-X pode nos fornecer as medidas de distância de diâmetro angular destes objetos.

Outro ponto importante estudado no capítulo 3 foi a taxa de expansão do universo. A descoberta recente de que o universo está passando por uma fase de expansão acelerada é um dos principais objetos de estudo da cosmologia moderna e o interesse maior tem sido descobrir qual é essa taxa e como ela depende do *redshift*. As medições da história de expansão estão relacionadas com o parâmetro de Hubble,  $H(z)$ , a partir do qual é possível testar modelos cosmológicos e, assim, caracterizar quais as componentes do universo e como elas evoluíram com o tempo. A partir de um conjunto de medidas de  $H(z)$  compiladas por Farooq & Ratra (2013), utilizamos o método de integração numérica e ajuste polinomial para determinar as medidas de distância de diâmetro angular que foram usadas nos testes da RDDC.

No capítulo 4 nos voltamos a dedução da RDDC partindo dos pressupostos de que a geometria é Riemanniana, os fótons seguem geodésicas nulas e únicas, além de assumir que seu número se conserva ao longo da evolução do Universo. A partir dessas suposições, as distâncias entre dois pontos no Universo se relacionam com as distâncias de luminosidade ( $D_L$ ) e de diâmetro angular ( $D_A$ ) através da seguinte equação:

$$\frac{D_L}{D_A(1+z)^2} = \eta, \quad \text{com } \eta = 1 \quad (6.1)$$

A partir desta expressão “relaxada” é possível testar a validade da RDDC e caso os resultados apontem para um valor do parâmetro  $\eta$ , tal que  $\eta \neq 1$ , é possível que um (ou mais) dos pressupostos assumidos precise(m) ser revisto(s) ou que exista uma física exótica com origem em diferentes mecanismos físicos. Além desta dedução, apresentamos diversos testes existentes na literatura acerca da validade estrita da relação de dualidade, alguns testes dependentes de modelos cosmológicos e outros testes independentes de modelos. Em geral os resultados indicam a validade da RDDC ou uma leve violação, cuja explicação poder advir da morfologia adotada para os aglomerados de galáxias [138] ou de alguma fonte de opacidade cósmica [140].

Contudo, a maioria destes testes observacionais foram baseados em dados de fontes distintas, o que acaba por introduzir diferentes fontes de erros sistemáticos nas estimativas do parâmetro  $\eta$ , quer por diferentes mecanismos físicos associados a cada uma das fontes, quanto pela diferença de *redshift* entre elas.

Na tentativa de evitar esses erros, nós seguimos a proposta de Holanda *et al.* (2012), que seria investigar a dependência do valor de  $\eta$  com relação ao observável usado a partir de uma mesma amostra de objetos astrofísicos, no caso, os aglomerados de galáxias. Então, no capítulo 5 confrontamos os dados observacionais com a teoria através de duas abordagens distintas. Inicialmente consideramos a expressão geral para a distância de diâmetro angular de aglomerados de galáxias obtidas a partir da técnica de ESZ/raios-X,  $D_A^{obs} = D_A \eta^2$ , que apenas fornece  $D_A$  se  $\eta = 1$ , como verificado por Uzan *et al.* (2004). Para testar a validade da RDDC, tomamos sua expressão generalizada  $D_L(1+z)^{-2}/D_A = \eta$  e parametrizamos  $\eta$  de duas formas distintas:  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z$  e  $\eta(z) = 1 + \eta_0 z/(1+z)$ . Então comparamos medidas de  $D_A^{obs}$  obtidas a partir da técnica ESZ/raios-X com medidas de  $D_A$  obtidas a partir de  $H(z)$  e obtivemos as restrições observacionais para os parâmetros envolvidos. As medidas de  $D_A^{obs}$  foram obtidas da amostra compilada por Bonamente *et al.* (2006), formada por 38 aglomerados de galáxias numa faixa de *redshifts* entre  $0.14 \leq z \leq 0.89$  supondo um modelo duplo- $\beta$  não-isotérmico com simetria esférica, e os dados de  $D_A$  foram obtidos através do método de ajuste polinomial da distância cómovel descrito na seção (3.4.1). Os resultados obtidos nesse teste para o nível de confiança de  $2\sigma$ , ou 95,4%, foram  $\eta_0 = -0.099_{-0.126}^{+0.119}$  para a parametrização P1 e  $\eta_0 = -0.157_{-0.193}^{+0.177}$  para a parametrização P2, que são apenas marginalmente consistentes com a RDDC.

Num segundo momento, a partir dos mesmos aglomerados, utilizamos medidas de fração da massa do gás da amostra compilada por La Roque *et al.* (2006), para testar a validade da RDDC no contexto do modelo  $\Lambda$ CDM plano. Partindo de uma função modelo para a fração de massa do gás chegamos ao seguinte valor observacional para o parâmetro  $\eta$ ,

$$\eta^{obs} = N \left[ \frac{D_A^{*3/2}}{D_A^{3/2}(z) f_{gas}(z)} \right].$$

onde  $f_{gas}$  são as medidas fornecidas pela amostra de La Roque *et al.* (2006);  $D_A$  as medidas de distância de diâmetro angular obtidas a partir de  $H(z)$ , seguindo o método de integração numérica e ajuste polinomial descrito na seção (3.4.1), considerando os mesmos *redshifts* da amostra de  $f_{gas}$ ; e as medidas de  $D_A^*$  obtidas a partir do modelo  $\Lambda$ CDM plano, eq. (5.13). Para sermos consistentes, utilizamos as mesmas funções parametrizadas para  $\eta$  consideradas no primeiro teste, P1 e P2, e restringimos o parâmetro da RDDC através do teste estatístico do  $\chi^2$ . Os resultados obtidos neste teste foram  $\eta_0 = -0.061_{-0.149}^{+0.171}$  para

	$D_A^{Elip}$	$D_A^{Esf}$
P1 ( $1\sigma$ )	$\eta_0 = -0.054_{-0.096}^{+0.094}$	$\eta_0 = 0.167_{-0.142}^{+0.083}$
P2 ( $1\sigma$ )	$\eta_0 = -0.084_{-0.136}^{+0.129}$	$\eta_0 = 0.244_{-0.204}^{+0.121}$

Tabela 6.1: Resultados obtidos para os testes de validade da RDDC utilizando medidas de  $D_A$  das amostras elíptica e esférica compiladas por De Filippis *et al.* (2005) e  $D_A^{H(z)}$  para o nível de confiança de 68,3%, em ambas as parametrizações.

a parametrização P1 e  $\eta_0 = -0.164_{-0.276}^{+0.339}$  para a parametrização P2, ambos no nível de confiança de  $1\sigma$ .

A partir da comparação dos resultados do teste da RDDC utilizando a amostra de Bonamente *et al.* (2006) (medidas de  $D_A$ ) com o teste utilizando a amostra de La Roque *et al.* (2006) (medidas de  $f_{gas}$ ), percebemos que, mesmo considerando os mesmos aglomerados, apenas quantidades diferentes, a relação de dualidade foi validada (teste de  $f_{gas}$ ) ou violada moderadamente (teste com  $D_A$ ). Os resultados preferencialmente negativos do parâmetro  $\eta_0$  podem indicar ainda a possível existência de uma nova física, como o acoplamento de fótons com partículas além das previstas pelo modelo padrão de física de partículas [140]. Por outro lado, o fato do teste utilizando medidas de  $D_A$  validar a RDDC apenas marginalmente no nível de confiança de  $2\sigma$  pode ter influência da geometria considerada para descrever os aglomerados, como já verificado por Holanda *et al.* (2011).

A partir dessa suposição seguimos para mais uma análise da RDDC, dessa vez utilizando duas amostras compiladas por De Filippis *et al.* (2005) que consideram os mesmos aglomerados de galáxias mas a partir de duas suposições distintas para descrevê-los: modelo- $\beta$  elíptico isotérmico e modelo- $\beta$  esférico isotérmico. Então, tomamos mais uma vez a expressão geral para a distância de diâmetro angular de aglomerados de galáxias obtidas a partir do ESZ/raios-X,  $D_A^{obs} = D_A \eta^2$ , de onde obtivemos o valor observacional do parâmetro  $\eta$  como sendo  $\eta_{obs}^2 = D_A^{obs} / D_A(z)$ , com as medidas de  $D_A$  sendo obtidas a partir de  $H(z)$  e  $D_A^{obs}$  das amostras de De Filippis *et al.* (2005). Adotamos novamente as duas parametrizações teóricas P1 e P2 para  $\eta(z)$ , e, a partir do teste do  $\chi^2$ , obtivemos o melhor ajuste entre observação e teoria para  $\eta_0$ , para as duas amostras consideradas. Os valores numéricos deste teste podem ser vistos na tabela (6.1).

Por fim, concluímos que não há um mecanismo de violação da RDDC definido, mas existem algumas causas prováveis. A partir dos resultados obtidos na última análise, não encontramos evidências de violação da relação de dualidade ao se considerar a amostra elíptica de De Filippis *et al.* (2005) onde a RDDC foi validada em  $1\sigma$ , contudo uma leve violação da RDDC foi notada ao considerarmos a amostra que assume uma geometria esférica, a RDDC foi apenas marginalmente compatível no nível de confiança de  $2\sigma$ . Por outro lado, se no primeiro teste considerando a amostra de Bonamente *et al.* (2006, modelo esférico não-isotérmico) os valores de  $\eta_0$  foram preferencialmente negativos, o teste considerando a amostra de De Filippis *et al.* (2005, modelo esférico isotérmico) forneceu valores para  $\eta_0$  preferencialmente positivos. Isto pode ser contraditório a princípio, mas mostra a influência das suposições usadas para descrever os aglomerados na validade (ou não) da RDDC, além do que um argumento global como o fornecido pela relação de dualidade de distância poder ser usado para restringir uma propriedade local (geometria) [143].

Um próximo passo a ser explorado seria ver o efeito da curvatura nos resultados das análises de validade da RDDC, fazendo variar o parâmetro  $\Omega_k$ , uma vez que foi considerado apenas o modelo plano em todos os casos, onde  $\Omega_k = 0$ . Os efeitos do parâmetro de curvatura podem ser encontrados nos métodos utilizados para obter os dados de  $D_A$  dos aglomerados, tanto pelas medidas via ESZ/raios-X quanto a partir das medidas de  $H(z)$ . Além disso, diversos experimentos observacionais do ESZ estão em curso para mapear os aglomerados de galáxias mesmo em altos *redshifts*, como por exemplo, o *Atacama Cosmology Telescope*, *Planck Satellite* e o *South Pole Telescope*, cujas principais funções são extrair informações físicas das anisotropias da RCF e encontrar novos aglomerados de galáxias utilizando o ESZ. Com a grande quantidade e qualidade dos dados que serão disponibilizados através dessas pesquisas, em um futuro próximo, será possível obter dados de distância de diâmetro angular através da técnica ESZ/raios-X, que possibilitarão uma análise estatística da RDDC mais robusta.

Finalmente, acreditamos que futuras análises da RDDC utilizando dados observacionais de aglomerados de galáxias servirão como uma ferramenta importante para vincular os parâmetros cosmológicos fundamentais de diversos modelos, podendo ainda abrir precedentes observacionais para a investigação de mecanismos oriundos de uma nova física.

# Referências Bibliográficas

- [1] RIESS, A.G., FILIPPENKO, A.V., CHALLIS, P., CLOCCHIATTI, A., DIERCKS, A., GARNAVICH, P.M., GILLILAND, R.L., HOGAN, C.J., JHA, S., KIRSHNER, R.P., and others, **Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.116, n.3, 1998.
- [2] PERLMUTTER, S., ALDERING, G., GOLDHABER, G., KNOP, R.A., NUGENT, P., CASTRO, P.G., DEUSTUA, S., FABBRO, S., GOOBAR, A., GROOM, D.E. and others, **Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.517, n.2, 1999.
- [3] KOMATSU, E., SMITH, K.M., DUNKLEY, J., BENNETT, C.L., GOLD, B., HINSHAW, G., JAROSIK, N., LARSON, D., NOLTA, M.R., PAGE, L. and others, **Seven-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological interpretation**. The Astrophysical Journal Supplement Series, IOP Publishing, v.192, n.2, 2011.
- [4] LIMA, J.A.S., CUNHA, J.V., ALCANIZ, J.S., **Constraining the dark energy with galaxy cluster x-ray data**. Physical Review D, APS, v.68, n.2, 2003.
- [5] SUNYAEV, R.A., ZELDOVICH, Ia. B., **Observation of relic radiation as a test of the nature of x-ray radiation from the clusters of galaxies**. Comments Astrophy. Space Phys., v.4, 1972.
- [6] BONAMENTE, M., JOY, M.K., LAROQUE, S.J., CARLSTROM, J.E., REESE, E.D., DAWSON, K.S., **Determination of the cosmic distance scale from Sunyaev-Zel'dovich effect and Chandra x-ray measurements of high-**



- redshift galaxy clusters.** The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.647, n.1, 2006.
- [7] De FILIPPIS, E., SERENO, M., BAUTZ, M.W., LONGO, G., **Measuring the three-dimensional structure of galaxy clusters. I. Application to a sample of 25 clusters.** The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.625, n.1., 2005.
- [8] ETHERINGTON, I.M.H., **LX. On the definition of distance in general relativity.** The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Taylor & Francis, v.15, n.100, 1933.
- [9] WHITTAKER, E.T., **On the definition of distance in curved space, and the displacement of the spectral lines of distant sources.** Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, JSTOR, 1931.
- [10] TOLMAN, R.C., **On the astronomical implications of the de Sitter line element for the universe.** The Astrophysical Journal, v.69, p.245, 1929.
- [11] SACHS, R.K., WOLFE, A.M., **Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background.** The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.147, 1967.
- [12] ELLIS, G.F.R., **Relativistic Cosmology.** Cambridge Univ., Eng., 1971.
- [13] ELLIS, George FR. Republication of: Relativistic cosmology. General Relativity and Gravitation, v. 41, n. 3, p. 581-660, 2009.
- [14] ELLIS, G.F.R., **On the definition of distance in general relativity: IMH Etherington (Philosophical Magazine ser. 7, vol. 15, 761 (1933)).** General Relativity and Gravitation, Springer, v.39, n.7, 2007.
- [15] HOLANDA, R.F.L., LIMA, J.A.S., RIBEIRO, M.B., **Testing the Distance-Duality Relation with Galaxy Clusters and Type Ia Supernovae.** The Astrophysical Journal Letters, IOP Publishing, v.722, n.2, 2010.
- [16] BASSETT, B.A., KUNZ, M., **Cosmic distance-duality as a probe of exotic physics and acceleration.** Physical Review D, APS, v.69, n.10, 2004.

- [17] UZAN, J-P., AGHANIM, N., MELLIER, Y., **Distance duality relation from x-ray and Sunyaev-Zel'dovich observations of clusters.** Physical Review D, APS, v.70, n.8, 2004.
- [18] ELLIS, G.F.R., POLTIS, R., UZAN, J-P., WELTMAN, A., **Blackness of the cosmic microwave background spectrum as a probe of the distance-duality relation.** Physical Review D, APS, v.87, n.10, 2013.
- [19] HOLANDA, R.F.L., GONÇALVES, R.S., ALCANIZ, J.S., **A test for cosmic distance duality.** Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, v.2012, n.06, 2012.
- [20] LAROQUE, S.J., BONAMENTE, M., CARLSTROM, J.E., JOY, M.K., NAGAI, D., REESE, E.D., DAWSON, K.S., **X-ray and Sunyaev-Zel'dovich effect measurements of the gas mass fraction in galaxy clusters.** The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.652, n.2, 2006.
- [21] D'INVERNO, Ray, **Introducing Einstein's Relativity.** Oxford University Press, USA, 1992.
- [22] LAMBOURNE, R.J., **Relativity, gravitation and cosmology.** Cambridge University Press, 2010.
- [23] FRIEDMAN, A., **Über die krümmung des raumes.** Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, v.10, n.1, p.377-386, 1922.
- [24] FRIEDMAN, A., **Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes.** Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, Springer, v.21, n.1, p.326-332, 1924.
- [25] ZEL'DOVICH, Y.B., **The cosmological constant and the theory of elementary particles.** Physics-Uspekhi, Turpion Ltd, v.11, n.3, 1968.
- [26] ISLAM, J.N., **An introduction to mathematical cosmology.** Cambridge University Press, ed.2, 2004.
- [27] MUKHANOV, V., **Physical foundations of cosmology.** Cambridge University Press, 2005.
- [28] WEINBERG, S., **Cosmology.** Oxford Univ. Press, 2008.

- [29] COLE, S., PERCIVAL, W.J., PEACOCK, J.A., NORBERG, P., BAUGHh, C.M., FRENK, C.S., BALDRY, I., BLAND-HAWTHORN, J., BRIDGES, T., CANNON, R., and others, **The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.362, n.2. p.505-534, 2005.
- [30] DUNKLEY, J., KOMATSU, E., NOLTA, M.R., SPERGEL, D.N., LARSON, D., HINSHAW, G., PAGE, L., BENNETT, C.L., GOLD, B., JAROSIK, N., and others, **Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: likelihoods and parameters from the WMAP data**. arXiv preprint arXiv:0803.0586, 2008.
- [31] CARROLL, S.M., **Spacetime and geometry. An introduction to general relativity**. v.1, 2004.
- [32] QUARTIN, M.B., **Sobre desafios teóricos de modelos de energia e matéria escuras**. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- [33] WEINBERG, S., **Gravitation and cosmology: Principle and applications of general theory of relativity**. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972.
- [34] HICKEN, M., WOOD-VASEY, W.M., BLONDIN, S., CHALLIS, P., JHA, S., KELLY, P.L., REST, A., KIRSHNER, R.P., **Improved dark energy constraints from  $\sim 100$  new CfA supernova type Ia light curves**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.700, n.2, 1998.
- [35] AMANULLAH, R., LIDMAN, C., RUBIN, D., ALDERING, G., ASTIER, P., BARBARY, K., BURNS, M.S., CONLEY, A., DAWSON, k.S., DEUSTRA, S.E. and others, **Spectra and Hubble space telescope light curves of six type Ia supernovae at  $0.511 < z < 1.12$  and the union2 compilation**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.716, n.1, 2010.
- [36] SOUZA, R.E., **Introdução à Cosmologia**. EdUSP, 2004.
- [37] STEIGMAN, G., **Primordial nucleosynthesis for the new millennium**. arXiv preprint astro-ph/0002296, 2000.

- [38] COPI, C.J., SCHRAMM, D.N., TURNER, M.S., **Big-bang nucleosynthesis and the baryon density of the universe**. *Science, American Association for the Advancement of Science*, v.267, n.5195. p.192-199, 2006.
- [39] SMOOT, G.F., BENNETT, C.L., KOGUT, A., WRIGHT, E.L., AYMEN, J., BOGGESS, N.W., CHENG, E.S., De AMICI, G., GULKIS, S., HAUSER, M.G., and others, **Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps**. *The Astrophysical Journal*, v.396, p.L1-L5, 1992.
- [40] HINSHAW, G., LARSON, D., KOMATSU, E., SPERGEL, D.N., BENNETT, C.L., DUNKLEY, J., NOLTA, M.R., HALPERN, M., HILL, R.S., ODEGARD, N., and others, **Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological parameter results**. *The Astrophysical Journal Supplement Series, IOP Publishing*, v.208, n.2, 2013.
- [41] ALPHER, R. A., HERMAN, R., GAMOW, G. A., **Thermonuclear reactions in the expanding universe**. *Physical Review, APS*, v.74, n.9, 1948.
- [42] PENZIAS, A.A., WILSON, R.W., **A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s**. *The Astrophysical Journal*, v.142, 1965.
- [43] DICKE, R.H., PEEBLES, P.J.E., ROLL, P.G., WILKINSON, D.T., **Cosmic Black-Body Radiation**. *The Astrophysical Journal*, v.142, 1965.
- [44] MATHER, J.C., CHENG, E.S., EPLEE Jr, R.E., ISAACMAN, R.B., MEYER, S.S., SHAFER, R.A., WEISS, R., WRIGHT, E.L., BENNETT, C.L., BOGGESS, N.W. and others, **A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite**. *The Astrophysical Journal*, v.354, 1990.
- [45] ZWICKY, F., **How far do cosmic rays travel?**. *Physical Review*, v.43, n.2, 1933.
- [46] SMITH, S., **The mass of the Virgo cluster**. *The Astrophysical Journal*, v.83, 1936.
- [47] RUBIN, V.C., FORD Jr, W.K., **Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions**. *The Astrophysical Journal, IOP Publishing*, v.159, 1970.

- [48] VAN ALBADA, T.S., BAHCALL, J.N., BEGEMAN, K., SANCISI, R., **Distribution of dark er in the spiral galaxy NGC 3198**. The Astrophysical Journal, v.295, p.305-313, 1985.
- [49] BEGEMAN, K.G., BROEILS, A.H., SANDERS, R.H., **Extended rotation curves of spiral galaxies: Dark haloes and modified dynamics**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.249, n.3, 1991.
- [50] TUCKER, W., BLANCO, P., RAPPOPORT, S., DAVID, L., FABRICANT, D., FALCO, E.E., FORMAN, W., DRESSLER, A., RAMELLA, M., **1E 0657-56: A Contender for the Hottest Known Cluster of Galaxies**. The Astrophysical Journal Letters, IOP Publishing, v.496, n.1, p.L5, 1998.
- [51] CLOWE, D., BRADAČ, M., GONZALEZ, A.H., MARKEVITCH, M., RANDALL, S.W., JONES, C., ZARITSKY, D., **A direct empirical proof of the existence of dark matter**. The Astrophysical Journal Letters, IOP Publishing, v.648, n.2. p.L109, 2006.
- [52] PERCIVAL, W.J., REID, B.A., EISENSTEIN, D.J., BAHCALL, N.A., BUDAVARI, T., FRIEMAN, J.A., FUKUGITA, M., GUNN, J.E., IVEZIĆ, Ž., KNAPP, G.R., and others, **Baryon acoustic oscillations in the sloan digital sky survey data release 7 galaxy sample**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.401, n. 4, 2010.
- [53] SUZUKI, N., RUBIN, D., LIDMAN, C., ALDERING, G., AMANULLAH, R., BARBARY, K., BARRIENTOS, L.F., BOTYANSZKI, J., BRODWIN, M., CONNOLLY, N., and others, **The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the dark-energy constraints above  $z > 1$  and building an early-type-hosted supernova sample**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.746, n.1, 2012.
- [54] LIMA, J.A.S., TRODDEN, M., **Decaying vacuum energy and deflationary cosmology in open and closed universes**. Physical Review D, APS, v.53, n.8, 1996.
- [55] STEIGMAN, G., SANTOS, R.C., LIMA, J.A.S., **An accelerating cosmology without dark energy**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Pu-

- blishing, v.2009, n.06, 2009.
- [56] PEREIRA, S.H., BESSA, C.H.G., LIMA, J.A.S., **Quantized fields and gravitational particle creation in  $f(R)$  expanding universes**. Physics Letters B, Elsevier, v.690, n.2, 2010.
- [57] TOLMAN, R.C., **Effect of inhomogeneity on cosmological models**. Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America, National Academy of Sciences, v.20, n.3, 1934.
- [58] LEMAÎTRE, A.G., **The expanding universe**. General Relativity and Gravitation, Springer, v.29, n.5, 1997.
- [59] MUSTAPHA, N., HELLABY, C., ELLIS, G.F.R., **Large-scale inhomogeneity versus source evolution: can we distinguish them observationally?**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.292, n.4, 1997.
- [60] CÉLÉRIER, M., **Models of universe with a delayed big-bang singularity. III. Solving the horizon problem for an off-center observer**. arXiv preprint gr-qc/0009031, 2000.
- [61] MOFFAT, J.W., **Cosmic microwave background, accelerating universe and inhomogeneous cosmology**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, v.2005, n.10, 2005.
- [62] KERNER, R., **Cosmology without singularity and nonlinear gravitational Lagrangians**. General Relativity and Gravitation, Springer, v.14, n.5, 1982.
- [63] BARROW, J.D., OTTEWILL, A.C., **The stability of general relativistic cosmological theory**. Journal of Physics A: Mathematical and General, IOP Publishing, n.12, 1983.
- [64] VOLLICK, D.N.,  **$1/R$  curvature corrections as the source of the cosmological acceleration**. arXiv preprint astro-ph/0306630, 2003.
- [65] VOLLICK, D.N., **On the viability of the Palatini form of  $1/R$  gravity**. Classical and Quantum Gravity, IOP Publishing, v.21, n.15, 2004.

- [66] ALLEMANDI, G., BOROWIEC, A. e FRANCAVIGLIA, M., **Accelerated cosmological models in first-order nonlinear gravity**. Physical Review D, APS, v.70, n.4, 2004.
- [67] ALLEMANDI, G., BOROWIEC, A. e FRANCAVIGLIA, M., ODINTSOV, S. D., **Dark energy dominance and cosmic acceleration in first-order formalism**. Physical Review D, APS, v.72, n.6, 2005.
- [68] CAPOZZIELLO, S., CARDONE, V.F., SALZANO, V., **Cosmography of f(R) gravity**. Physical Review D, APS, V.78, n.6, 2008.
- [69] VITAGLIANO, V., SOTIRIOU, T.P., LIBERATI, S., **Dynamics of generalized Palatini theories of gravity**. Physical Review D, APS, v.82, n.8, 2010.
- [70] De FELICE, A., TSUJIKAWA, S., **f (R) theories**. Living Rev. Rel, v.13, n.3., 2010.
- [71] RANDALL, L., SUNDRUN, R., **Large mass hierarchy from a small extra dimension**. Physical Review Letters, APS, v.83, n.17, 1999.
- [72] DVALI, G., KOGAN, I.I., SHIFMAN, M., **Topological effects in our brane world from extra dimensions**. Physical Review D, APS, v.63, n.10, 2000.
- [73] DVALI, G., GABADADZE, G., **Gravity on a brane in infinite-volume extra space**. Physical Review D, APS, v.63, n.6, 2001.
- [74] HOGG, D.W., **Distance measures in cosmology**. arXiv preprint astro-ph/9905116, 1999.
- [75] KELLERMAN, K.I., **The cosmological deceleration parameter estimated from the angular-size/redshift relation for compact radio sources**. Nature Publishing Group, 1993.
- [76] BUCHALTER, ARI, HELFAND, DAVID J., BECKER, ROBERT H., WHITE, RICHARD L., **Constraining Omega 0 with the Angular Size-Redshift Relation of Double-lobed Quasars in the FIRST Survey**. The Astrophysical Journal, v.494, 1998.
- [77] GURVITS, L.I., KELLERMANN, K.I., FREY, S., **The “angular size-redshift” relation for compact radio structures in quasars and radio galaxies**. arXiv preprint astro-ph/9812018, 1998.

- [78] OLIVEIRA FILHO, K.S., SARAIVA, M.F.O., **Astronomia e astrofísica**. Ed. Universidade/UFRGS, 2000.
- [79] LIMA NETO, G.B., **Astronomia Extragaláctica**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2005.
- [80] SASAKI, S., **A new method to estimate cosmological parameters using the baryon fraction of clusters of galaxies**. Publications of the Astronomical Society of Japan, Oxford University Press, v.48, n.6, 1996.
- [81] PEN, U-L., **Analytical fit to the luminosity distance for flat cosmologies with a cosmological constant**. The Astrophysical Journal Supplement Series, IOP Publishing, v.120, n.1, 1999.
- [82] Binney, J., TREMAINE, S., **Galactic dynamics**. Princeton University Press, 2011.
- [83] SCHNEIDER, P., **Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction**. Springer, 2014.
- [84] KAASTRA, J.S., PAERELS, F.B.S., DURRET, F., SCHINDLER, S., RICHTER, P., **Thermal radiation processes**. *In*: Clusters of Galaxies, Springer, 2008.
- [85] DONAHUE, M., **Origins of Clusters and the Intracluster Medium**. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v.148, 1998.
- [86] SARAZIN, C.L., **X-ray Emission from Clusters of Galaxies**. 1988.
- [87] LEA, S.M., **On the equilibrium distribution of gas in clusters of galaxies**. Astrophysical Letters, v.16, 1975.
- [88] MEIKSIN, A.A., **The physics of the intergalactic medium**. Reviews of modern physics, APS, v.81, n.4, 2009.
- [89] DIAFERIO, A., SCHINDLER, S., DOLAG, K., **Clusters of galaxies: setting the stage**. *IN*: Clusters of Galaxies, Springer, 2008.
- [90] SCHREIER, E., LEVINSON, R., GURSKY, H., KELLOGG, E., TANANBAUM, H., GIACCONI, R., **Evidence for the Binary Nature of Centaurus X-3 from UHURU X-Ray Observations**. The Astrophysical Journal, v.172, 1972.



- [91] WHITE, S.D.M., NAVARRO, J.F., EVRARD, A.E., FRENK, C.S., **The baryon content of galaxy clusters-a challenge to cosmological orthodoxy**. Macmillan Magazines Ltd., 1993.
- [92] RYBICKI, G.B., LIGHTMAN, A.P., **Radiative processes in astrophysics**. John Wiley & Sons, 2008.
- [93] GONÇALVES, R.S., HOLANDA, R.F.L., ALCANIZ, J.S., **Testing the cosmic distance duality with X-ray gas mass fraction and supernovae data**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, Oxford University Press, v.420, n.1, p.L43-L47, 2012.
- [94] DODELSON, S., **Modern cosmology**. Academic press, 2003.
- [95] SUNYAEV, R.A., ZELDOVICH, Ia. B., **The velocity of clusters of galaxies relative to the microwave background. The possibility of its measurement**. NASA STI/Recon Technical Report N, v.80, 1975.
- [96] SUNYAEV, R.A., ZELDOVICH, Ia. B., **Microwave background radiation as a probe of the contemporary structure and history of the universe**. Annual review of astronomy and astrophysics, v.18, 1980.
- [97] SUNYAEV, R.A., ZELDOVICH, Ia. B., **The velocity of clusters of galaxies relative to the microwave background-The possibility of its measurement**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v.190, 1980.
- [98] PADMANABHAN, T., **Theoretical Astrophysics: Volume 1, Astrophysical Processes**. Cambridge University Press, v.1, 2000.
- [99] ILLARIONOV, A.F., KOMPANEETS, D.A., **Induced Compton scattering by relativistic electrons**. Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki, v.71, 1976.
- [100] BIRKINSHAW, M., **The Sunyaev-Zel'dovich effect**. Physics Reports, Elsevier, v.310, n.2, 1999.
- [101] SALINAS, S.R., **Introdução a Física Estatística Vol. 09**. EdUSP, 1997.
- [102] CARLSTROM, J.E., HOLDER, G.P., REESE, E.D., **Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich effect**. arXiv preprint astro-ph/0208192, 2002.

- [103] PHILLIPS, P.R., **Calculation of the Kinetic Sunyaev-Zeldovich Effect from the Boltzmann Equation**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.455, 1995.
- [104] HOLZAPFEL, W.L., ADE, P.A.R., CHURCH, S.E., MAUSKOPF, P.D., REPHALI, Y., WILBANKS, T.M., LANGE, A.E., **Limits on the Peculiar Velocities of Two Distant Clusters Using the Kinematic Sunyaev-Zeldovich Effect**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.481, n.1, 1997.
- [105] CAVALIERE, A., FUSCO-FERMIANO, R., **X-rays from hot plasma in clusters of galaxies**. Astronomy and Astrophysics, v.49, 1976.
- [106] BIRKINSHAW, M., HUGHES, J.P., ARANAUD, K.A., **The Sunyaev-Zel'dovich effect**. The Astrophysical Journal, v.379, 1991.
- [107] REESE, E.D., CARLSTROM, J.E., JOY, M., MOHR, J.J., GREGO, L., HOLZAPFEL, W.L., **Determining the cosmic distance scale from interferometric measurements of the Sunyaev-Zeldovich effect**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.581, n.1, 2002.
- [108] BLAKE, C., BROUGH, S., COLLESS, M., CONTRERAS, C., COUCH, W., CROOM, S., CROTON, D., DAVIS, T.M., DRINKWATER, M.J., FORSTER, K. and others, **The WiggleZ Dark Energy Survey: Joint measurements of the expansion and growth history at  $z < 1$** . Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.425, n.1, 2012.
- [109] JIMENEZ, R., LOEB, A., **Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.573, n.1, 2002.
- [110] ZHANG, T-J., MA, C., LAN, T., **Constraints on the dark side of the universe and observational Hubble parameter data**. Advances in Astronomy, Hindawi Publishing Corporation, v.2010, 2011.
- [111] STERN, D., JIMENEZ, R. VERDE, L., KAMIONKOWSKI, M., STANFORD, S.A., **Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I:  $H(z)$  measurements**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, v.2010, n.02, 2010.

- [112] SIMON, J., VERDE, L., JIMENEZ, R., **Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential**. Physical Review D, APS, v.71, n.12, 2005.
- [113] MORESCO, M., CIMATTI, A., JIMENEZ, R., POZZETTI, L., ZAMORANI, G., BOLZONELLA, M., DUNLOP, J., LAMAREILLE, F., MIGNOLI, M., PEARCE, H., and others, **Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to  $z \approx 1.1$  from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, v.2012, n.08, 2012.
- [114] ZHANG, C., ZHANG, H., YUAN, S., LIU, S., ZHANG, T-J., SUN, Y-C., **Four new observational  $H(z)$  data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven**. Research in Astronomy and Astrophysics, IOP Publishing, v.14, n.10, 2014.
- [115] CHUANG, C., WANG, Y., **Modelling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and single-probe measurements of  $H(z)$ ,  $DA(z)$  and  $f(z) \sigma_8(z)$  from the Sloan Digital Sky Survey DR7 luminous red galaxies**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.435, n.1. p.255-262, 2013.
- [116] DELUBAC, T., RICH, J., BAILEY, S., FONT-RIBERA, A., KIRKBY, D., Le GOFF, J-M., PIERI, M.M., SLOSAR, A., AUBORG, É, BAUTISTA, J.E. and others, **Baryon acoustic oscillations in the  $Ly\alpha$  forest of BOSS quasars**. Astronomy & Astrophysics, EDP Sciences, v.552, 2013.
- [117] FAROOQ, O., RATRA, B., **Hubble parameter measurement constraints on dark energy**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.764, n.2, 2013.
- [118] FERREIRA, P.C., **Estudo da Interação no Setor Escuro Através do Parâmetro de Hubble**. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.
- [119] CORASANITI, P.S., HUTERER, D., MELCHIORRI, A., **Exploring the dark energy redshift desert with the Sandage-Loeb test**. Physical Review D, APS, v.75, n.6., 2007.
- [120] JIMENEZ, R., VERDE, L., TREU, T., STERN, D., **Constraints on the equation of state of dark energy and the Hubble constant from stellar ages and**

- the cosmic microwave background.** The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.593, n.2, 2003.
- [121] FIGUEROA, D.G., VERDE, L., JIMENEZ, R., **Improved cosmological parameter constraints from CMB and  $H(z)$  data.** Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, v.2008, n.10, 2008.
- [122] MONTEIRO, M.T.T., **Métodos Numéricos: exercícios resolvidos aplicados à Engenharia e outras Ciências.** Departamento de Produção e Sistemas, Universidade do Minho, 2012.
- [123] ARAÚJO, Adérito Luís Martins, **Matemática Computacional.** Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, 2014.
- [124] FORNASINI, P., **The uncertainty in physical measurements: an introduction to data analysis in the physics laboratory.** Springer Science & Business Media, 2008.
- [125] THORNE, K.S., WHEELER, J.A., MISNER, C.W., **Gravitation.** Freeman, 2000.
- [126] PEEBLES, P.J.E., **Principles of physical cosmology.** Princeton University Press, 1993.
- [127] WALD, R.M., **General relativity.** University of Chicago Press, 2010.
- [128] SCHRÖDINGER, E., **Space-time structure.** Cambridge University Press, 1985.
- [129] SCHNEIDER, P., **Gravitational lensing statistics.** Springer, 1992.
- [130] CUNHA, J.V., MARASSI, L., LIMA, J.A.S., **Constraining  $H_0$  from the Sunyaev-Zel'dovich effect, galaxy cluster X-ray data and baryon oscillations.** Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, Oxford University Press, v.379, n.1., 2007.
- [131] MANTZ, A., ALLEN, S.W., EBELING, H., RAPETTI, D., **New constraints on dark energy from the observed growth of the most X-ray luminous galaxy clusters.** Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.387, n.3, 2008.

- [132] JAECKEL, J., RINGWALD, A., **The low-energy frontier of particle physics.** arXiv preprint arXiv:1002.0329, 2010.
- [133] ADLER, Stephen L, **Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field.** Annals of Physics, Elsevier, 67, p.599-647, 1971.
- [134] GUBITOSI, G., **Disformal coupling, CMB spectral distortion and distance duality relation.** Memorie della Societa Astronomica Italiana, v.85, p.38, 2014.
- [135] BRAX, P., BURRAGE, C., DAVIS, A., GUBITOSI, G., **Cosmological tests of the disformal coupling to radiation.** Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, n.11, 2013.
- [136] DALY, R.A., DJORGOVSKI, S.G., **A model-independent determination of the expansion and acceleration rates of the universe as a function of redshift and constraints on dark energy.** The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.597, n.1., 2003.
- [137] LIMA, J.A.S., ALCANIZ, J.S., **Dark Energy and the Angular Size-Redshift Diagram for Milliarcsecond Radio Sources.** The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.566, n.1, 2002.
- [138] HOLANDA, R.F.L., LIMA, J.A.S., RIBEIRO, M.B., **Probing the cosmic distance-duality relation with the Sunyaev-Zel'dovich effect, X-ray observations and supernovae Ia.** Astronomy & Astrophysics, EDP Sciences, v.538, 2012.
- [139] CAVALIERE, A., DANESE, L., De ZOTTI, G., **Cosmic distances from X-ray and microwave observations of clusters of galaxies.** Astronomy and Astrophysics, v.75, 1979.
- [140] AVGOUSTIDIS, A., BURRAGE, C., REDONDO, J., VERDE, L., JIMENEZ, R., **Constraints on cosmic opacity and beyond the standard model physics from cosmological distance measurements.** Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, n.10, 2010.
- [141] KOWALSKI, M., RUBIN, D., ALDERING, G., AGOSTINHO, R.J., AMADON, A., AMANULLAH, R., BALLAND, C., BARBARY, K., BLANC, G., CHALLIS, P.J.

- and others, **Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.686, n.2, 2008.
- [142] AVGOUSTIDIS, A., VERDE, L., JIMENEZ, R, **Consistency among distance measurements: transparency, BAO scale and accelerated expansion**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, n.06, 2009.
- [143] HOLANDA, R.F.L., LIMA, J.A.S., RIBEIRO, M.B., **Cosmic distance duality relation and the shape of galaxy clusters**. Astronomy & Astrophysics, EDP Sciences, v.528, 2011.
- [144] De BERNARDIS, F., GIUSARMA, E., MELCHIORRI, A., **CONSTRAINTS ON DARK ENERGY AND DISTANCE DUALITY FROM SUNYAEV-ZEL'DOVICH EFFECT AND CHANDRA X-RAY MEASUREMENTS**. International Journal of Modern Physics D, World Scientific, v.15, n.05, 2006.
- [145] LI, Z., WU, P., YU, H., **Cosmological-model-independent Tests for the Distance-Duality Relation from Galaxy Clusters and Type Ia Supernova**. The Astrophysical Journal Letters, IOP Publishing, v.729, n.1, 2011.
- [146] NAIR, R., JHINGAN, S., JAIN, D., **Cosmic distance duality and cosmic transparency**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, v.2012, n.12, 2012.
- [147] MENG, X-L., ZHANG, T-J., ZHAN, H., WANG, X., **Morphology of Galaxy Clusters: A Cosmological Model-independent Test of the Cosmic Distance-Duality Relation**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.745, n.1, 2012.
- [148] LIANG, N., LI, Z., WU, P., CAO, S., LIAO, K., ZHU, Z-H., **A consistent test of the distance–duality relation with galaxy clusters and Type Ia Supernovae**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, 2013.
- [149] GONÇALVES, R.S., BERNUI, A., HOLANDA, R.F.L., ALCANIZ, J.S., **Constraints on the duality relation from ACT cluster data**. Astronomy & Astrophysics, EDP Sciences, v.573, 2015.

- [150] HEES, A., MINAZZOLI, O., LARENA, J., **Breaking of the equivalence principle in the electromagnetic sector and its cosmological signatures**. Physical Review D, APS, v.90, n.12, 2014.
- [151] CHEN, J., WU, P., YU, H., LI, Z., **Is the cosmic transparency spatially homogeneous?**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, v.2012, n.10, 2012.
- [152] LI, Z., WU, P., YU, H., ZHU, Z-H., **Cosmic opacity: Cosmological-model-independent tests and their impact on cosmic acceleration**. Physical Review D, APS, v.87, n.10, 2013.
- [153] LIAO, K., LI, Z., MING, J., ZHU, Z-H., **Testing cosmic opacity from SNe Ia and Hubble parameter through three cosmological-model-independent methods**. Physics Letters B, Elsevier, v.718, n.4, 2013.
- [154] D'AGOSTINI, G., **Asymmetric Uncertainties: Sources, Treatment and Potential Dangers**. arxiv:physics/0403086v2[physics.data-an], 2004.
- [155] ALLEN, S.W., RAPETTI, D.A., SCHMIDT, R.W., EBELING, H., MORRIS, R.G., FABIAN, A.C., **Improved constraints on dark energy from Chandra X-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.383, n.3, 2008.
- [156] REIPRICH, T.H., BOERINGER, H., **The mass function of an X-ray flux-limited sample of galaxy clusters**. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, v.567, n.2, 2002.
- [157] MASON, B.S., MYERS, S.T., READHEAD, A.C.S., **A measurement of  $H_0$  from the Sunyaev-Zel'dovich effect**. The Astrophysical Journal Letters, IOP Publishing, v.555, n.1, p.L11, 2001.
- [158] EBELING, H., VOGES, W., BÖHRINGER, H., EDGE, A.C., HUCHRA, J.P., BRIEL, U.G., **Properties of the X-ray-brightest Abell-type clusters of galaxies (XBACs) from ROSAT All-Sky Survey data-I. The sample**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, v.281, n.3, p.799-829, 1996.

- [159] GREGORY, P., **Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematical Support**. Cambridge University Press, 2010.
- [160] PIGOZZO, C.B.M., **Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro**. Tese (Doutorado), Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2010.



# Apêndice A

## Conceitos de Geometria Diferencial

Aqui apresentaremos alguns conceitos em geometria diferencial, nos atendo aos aspectos mais importantes e necessários ao nosso estudo, de modo que não fuçamos do escopo do trabalho. Além disso, para uma descrição mais detalhada do assunto podemos citar as seguintes referências [21], [31], [33], [94], [125], [126], [127] e [128].

### A.1 Tensores, Métrica e Derivadas Covariantes

#### A.1.1 Tensor

Um tensor é um objeto definido em uma entidade geométrica chamada variedade (diferencial). Em termos simples, uma variedade é algo que localmente parece um espaço Euclidiano  $n$ -dimensional ( $\mathbb{R}^n$ ), mas pode ser curvada ou topologicamente complicada em larga escala. De forma que a variedade como um todo é construída se costurando cada parte local [21].

Como exemplo de variedades podemos elencar: o próprio espaço  $\mathbb{R}^n$  e os casos particulares  $\mathbb{R}^1$  (linha) e  $\mathbb{R}^2$  (plano), e uma  $n$ -esfera ( $S^n$ ) com os casos particulares  $S^1$  (círculo) ou  $S^2$  (bi-esfera), além de outros espaços topologicamente mais complicados.

Como iremos analisar a trajetória de partículas sem massa (trajetória de fótons), nos cabe nesse momento fazer um estudo acerca dos espaços e vetores tangentes. Definindo o espaço tangente como o espaço dos operadores das derivadas direcionais ao longo de

uma curva, cujo sistema de coordenada é  $x^\mu(\lambda)$ , onde  $\lambda$  é o parâmetro afim, podemos escrever:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu, \quad (\text{A.1})$$

onde as derivadas parciais  $\partial_\mu$  representam uma base coordenada, que transforma segundo

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (\text{A.2})$$

As componentes do vetor tangente ( $T^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ ) transformam de acordo com:

$$T'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} T^\mu \quad (\text{A.3})$$

Se expandirmos a lei de transformação para um tensor geral  $A$ , teremos:

$$A'^{\alpha'\beta'\dots}_{\mu'\nu'\dots} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta} \dots \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} \dots A^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots} \quad (\text{A.4})$$

O cálculo tensorial está preocupado com operações com tensores que tenham como resultado tensores. Para a maioria dessas operações, como por exemplo, contração e simetrização, não há alterações nos resultados mesmo que não façamos nenhuma restrição quanto ao espaço ser plano ou não. Contudo, quando tratamos de espaços curvos algumas propriedades sofrem mudanças.

## A.1.2 Métrica

Um exemplo de tensor cujas propriedades sofrem mudanças quando tratamos de espaços curvos é o chamado tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ . Que é um tensor simétrico, de ordem 2, não-degenerado, pois possui determinante não-nulo ( $g = |g_{\mu\nu}|$ ), e cujo tensor inverso é dado por  $g^{\mu\nu}$ , que também é simétrico.

O tensor métrico ou métrica, como também é conhecida, pode ser utilizada para o cálculo de distância e tamanhos (comprimentos) de vetores, da seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.5})$$

sendo esta a equação para o elemento de linha. O quadrado do comprimento ou norma de um vetor contravariante  $X^\alpha$  é definido como:

$$\mathbf{X}^2 = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \quad (\text{A.6})$$

De modo que, se para todos os vetores  $X$ ,  $X^2 > 0$  a métrica é dita positiva definida ou Riemanniana e se  $X^2 < 0$  a métrica é dita negativa definida ou Lorentziana. Para outros casos a métrica é dita indefinida.

### A.1.3 Derivada Covariante

A derivada covariante é uma generalização do conceito de derivada parcial, que permite estender o cálculo diferencial para coordenadas curvilíneas, e não apenas para coordenadas cartesianas, no espaço  $R$ . A expressão para a derivada covariante de um tensor geral é dada por,

$$\nabla_{\sigma} A_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \partial_{\sigma} A_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + \Gamma_{\sigma \lambda}^{\mu_1} A_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + \dots - \Gamma_{\sigma \nu_1}^{\lambda} A_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} - \dots \quad (\text{A.7})$$

ou seja, a derivada parcial deste tensor somado com termos de correção, definidos em termos das  $n$  matrizes  $\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$ , mais conhecidas como coeficientes de conexão. A partir de um cálculo simples e direto, mostra-se que os coeficientes de conexão não são tensores e transformam de acordo com:

$$\Gamma'_{\mu\sigma}{}^{\rho} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\sigma}} \quad (\text{A.8})$$

Além disso, a derivada covariante obedece as seguintes propriedades:

- Linearidade:  $\nabla(A + B) = \nabla A + \nabla B$ ;
- Leibniz:  $\nabla(AB) = (\nabla A)B + (\nabla B)A$ ;
- Comuta sob contração:  $\nabla_{\mu}(A^{\lambda}_{\lambda\rho}) = (\nabla A)^{\lambda}_{\mu\lambda\rho}$ ;
- Quando aplicada em escalares se reduz à derivada parcial:  $\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi$ .

E a partir da escolha adequada de simetria, no caso a Riemanniana, duas propriedades a mais são válidas:

- Torsão nula:  $\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}$ ;
- Condição de metricidade nula:  $\nabla_{\rho}g^{\mu\nu} = 0$ .

Por fim, a partir destas duas últimas propriedades e a definição de derivada covariante, chegamos a uma definição dos coeficientes de conexão em termos da métrica, dada

por:

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.9})$$

sendo  $\partial_{\nu} = \partial/\partial x^{\nu}$ . Esta quantidade também é conhecida como símbolos de Christoffel.

## A.2 Geodésicas e Curvatura

Um campo vetorial contravariante determina uma congruência local de curvas,

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda). \quad (\text{A.10})$$

Definindo a derivada absoluta de um tensor  $A_{\nu\dots}^{\mu\dots}$  ao longo de uma curva  $C$  da congruência por:

$$\frac{D}{D\lambda}(A_{\nu\dots}^{\mu\dots}) \equiv \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}\nabla_{\sigma}A_{\nu\dots}^{\mu\dots}, \quad (\text{A.11})$$

o tensor  $A_{\nu\dots}^{\mu\dots}$  é dito transportado ou propagado paralelamente ao longo da curva  $C$  se,

$$\frac{D}{D\lambda}(A_{\nu\dots}^{\mu\dots}) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Podemos agora definir uma geodésica, que nada mais é do que uma curva ao longo da qual o vetor tangente é propagado paralelamente à mesma, ou seja,

$$\frac{D}{D\lambda}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\right) = 0, \quad (\text{A.13})$$

ou ainda, usando (A.11),

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Com relação à curvatura da variedade, podemos recorrer ao tensor de Riemann, que é facilmente deduzido a partir do comutador de dois operadores de derivada covariante. Considerando o seguinte comutador, associado a um campo vetorial  $V^{\rho}$ , temos:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}V^{\rho} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}V^{\rho}, \quad (\text{A.15})$$

De modo que, utilizando a definição de derivada covariante (A.7), obtemos:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = (\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda})V^{\sigma} + (\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})\nabla_{\lambda}V^{\rho}. \quad (\text{A.16})$$

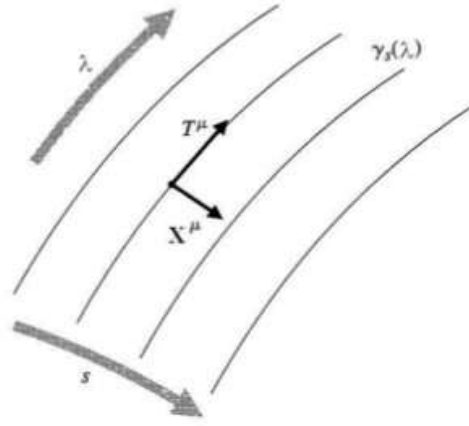


Figura A.1: Superfície descrita por um conjunto de geodésicas  $\gamma_s(\lambda)$ , com vetores tangentes  $T^\mu$  e o campo de vetores  $X^\mu$  mede o desvio entre geodésicas vizinhas (D’Inverno, 1992).

com o último termo do lado direito se anulando na condição de torsão nula. Define-se, então, o primeiro termo entre parêntesis da equação anterior como tensor de Riemann,

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (\text{A.17})$$

ao qual estão associadas as seguintes propriedades de simetria e anti-simetria:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad \text{e} \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.18})$$

### A.3 Equação de Desvio Geodésico

Consideremos um bi-superfície  $S$  governada por uma congruência de geodésicas tipo-tempo (fig. A.1), de modo que a equação paramétrica de  $S$  seja dada por,

$$x^\mu = x^\mu(\lambda, t) \quad (\text{A.19})$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro afim e  $t$  rotula geodésicas distintas.

Para esta superfície dois campos vetoriais podem ser definidos, o vetor tangente  $T^\mu$  e o chamado vetor de desvio ou conexão  $X^\mu$ :

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad \text{e} \quad X^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \quad (\text{A.20})$$

O comutador de  $T^\mu$  e  $X^\mu$  satisfaz,

$$\begin{aligned}
[T, X]^\mu &= T^\nu \partial_\nu X^\mu - X^\nu \partial_\nu T^\mu \\
&= \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{dx^\mu}{dt} \right) - \frac{dx^\nu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) \\
&= \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda dt} - \frac{d^2 x^\mu}{dt d\lambda} \\
[T, X]^\mu &= 0
\end{aligned} \tag{A.21}$$

uma vez que as derivadas mistas comutam.

Usando o fato de que o comutador também é igual a derivada de Lie, temos que  $L_T X^\mu = 0$ . Usando a definição de derivada covariante (A.7) e sendo as conexões simétricas, isso nos permite substituir todas as derivadas parciais por derivadas covariantes, de modo que:

$$\begin{aligned}
L_T X^\mu &= 0 \\
\nabla_T X^\mu - \nabla_X T^\mu &= 0
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Fazendo a derivada covariante desta última equação com respeito a  $T^\mu$ , encontramos:

$$\nabla_T \nabla_T X^\mu = \nabla_T \nabla_X T^\mu \tag{A.23}$$

Por outro lado, temos a seguinte propriedade tensorial [21],

$$\nabla_A (\nabla_B C^\mu) - \nabla_B (\nabla_A C^\mu) - \nabla_{[A, B]} C^\mu = R_{\nu\rho\sigma}^\mu T^\nu T^\rho X^\sigma \tag{A.24}$$

Escolhendo  $A^\mu = C^\mu = T^\mu$  e  $B^\mu = X^\mu$ , temos que o segundo termo se anula pois  $T^\mu$  é tangente a geodésica parametrizada, ou seja,  $\nabla_T T^\mu = 0$  e o terceiro termo também é nulo pois a derivada covariante de qualquer tensor com respeito ao tensor nulo é zero. Nos resta então que:

$$\nabla_T \nabla_X T^\mu = R_{\nu\rho\sigma}^\mu T^\nu T^\rho X^\sigma \tag{A.25}$$

Usando (A.23), podemos reescrever (A.25) como:

$$\nabla_T \nabla_T T^\mu = R_{\nu\rho\sigma}^\mu T^\nu T^\rho X^\sigma \tag{A.26}$$

Mas, por definição,

$$\frac{D^2 X^\mu}{Dt^2} = \nabla_T \nabla_T X^\mu \quad (\text{A.27})$$

Portanto,

$$\frac{D^2 X^\mu}{Dt^2} = -R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu X^\rho T^\sigma \quad (\text{A.28})$$

que é a equação de desvio da geodésica (EDG). Sua função é medir o grau de afastamento ou atração de geodésicas, através da variação espacial dos vetores de desvio, de acordo com o campo gravitacional associado ao sistema.

# Apêndice B

## Ferramentas de Análise Estatística

Em virtude da grande quantidade de dados observacionais disponíveis na Cosmologia, torna-se necessário o desenvolvimento de ferramentas estatísticas cada vez mais sofisticadas para tratar e interpretar todos esses dados. Ademais, mesmo com todas as informações de que dispomos, a Cosmologia está intrinsecamente relacionada com a Estatística, de modo que as teorias de origem e evolução do Universo não preveem que uma determinada galáxia se formará em um determinado ponto no espaço-tempo, o que ela fornece é apenas uma média estatística, ou uma probabilidade de ocorrência.

Uma vez que dispomos de dados, temos alguns caminhos a serem trilhados:

- Testar hipóteses: onde se pode checar se os dados são condizentes com uma hipótese apresentada;
- Estimar parâmetros: na premissa de um dado modelo, o qual é caracterizado por certos parâmetros livres, seria possível fazer uma estimativa desses parâmetros à luz dos dados disponíveis;
- Seleção de modelos: Uma vez que estimemos um conjunto de parâmetros, indiretamente estamos determinando um modelo. Assim, ao estimarmos os parâmetros que melhor ajustam uma classe de modelos, já estaríamos realizando uma seleção de modelos. Então, este item está mais relacionado a diferentes classes de modelos, que não sejam distintos apenas pelos valores de seus parâmetros, mas pelas hipóteses tomadas em sua construção teórica.



Em nosso trabalho nos restringimos a um teste de hipóteses, onde buscamos, a partir de dados de aglomerados de galáxias, verificar se a relação de dualidade de distância cósmica seria válida. Para entender melhor o teste de hipótese que utilizamos, o teste de  $\chi^2$ , vamos começar entendendo o conceito de probabilidade.

## B.1 Probabilidade

Podemos dizer que existem duas correntes estatísticas: Frequentistas e Bayesianos [159]. Os primeiros, relacionam a probabilidade  $P$  com a frequência de ocorrência

$$P = \frac{n}{N} \quad (\text{B.1})$$

onde  $n$  é o número de sucessos dentre  $N$  tentativas. Por outro lado, os bayesianos interpretam a probabilidade como o grau de confiança em uma hipótese. Então, dada uma variável aleatória  $x$ ,  $P(x)$  será a probabilidade de  $x$  assumir um valor específico - esta função define uma distribuição de probabilidades. No caso de  $x$  apresentar espectro contínuo,  $P(x)dx$  é interpretado como a densidade de probabilidade, ou seja, a probabilidade de uma variável aleatória ter um valor entre  $x$  e  $x + dx$ . Em suma, frequentistas consideram distribuição de probabilidades de eventos, enquanto bayesianos consideram hipóteses como eventos. Em ambas abordagens, são válidas as seguintes regras:

- $P(x) \geq 0$ ;
- $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1$ ;
- Para eventos independentes,  $P(x_1 \cup x_2) \equiv P(x_1.OU.x_2) = P(x_1) + P(x_2)$ ;
- Em geral,  $P(x_1, x_2) = P(x_1)P(x_2|x_1)$ .

Se entende que a probabilidade de  $x_1$  e  $x_2$  ocorrerem é a probabilidade de  $x_1$  vezes a probabilidade condicional de  $x_2$ , caso  $x_1$  já tenha ocorrido. Apenas no caso de eventos independentes,  $P(x_2|x_1) = P(x_2)$  e então  $P(x_1, x_2) = P(x_1)P(x_2)$ . Como a probabilidade de que dois eventos ocorram pode ser escrita como  $P(x_1, x_2)$  ou  $P(x_2, x_1)$ , se substituirmos  $x_1$  por  $D$  e  $x_2$  por  $H$ , obtemos o teorema de Bayes:

$$P(H|D) = \frac{P(H)P(D|H)}{P(D)} \quad (\text{B.2})$$

onde  $H$  refere-se ao modelo (hipótese), e  $D$  aos dados. O termo  $P(D|H)$  é conhecido como *likelihood* (verossimilhança), e nos diz a probabilidade dos dados que temos, admitindo que a hipótese  $H_i$  é verdadeira.  $P(H)$  é chamado de *prior*, onde acrescentamos informações que temos a priori, e  $P(D)$  nos dá a normalização. De modo que,  $P(H|D)$  será a probabilidade posterior, a referente ao modelo, tendo ocorrido os dados  $D$ .

## B.2 Teste Estatístico do $\chi^2$

O teste do Qui Quadrado, ou simplesmente teste do  $\chi^2$ , é um teste de hipóteses que tem como objetivo testar a adequabilidade de um modelo probabilístico a um conjunto de dados observados. Por ser um teste não paramétrico, não depende de parâmetros populacionais, como média e variância. Seu princípio básico é comparar proporções, ou seja, as possíveis divergências entre as frequências observadas e esperadas para um certo evento.

Em suma, o teste é utilizado para:

- Verificar se a frequência com que um determinado acontecimento observado em uma amostra se desvia significativamente ou não da frequência com que ele é esperado;
- Comparar a distribuição de diversos acontecimentos em diferentes amostras, a fim de avaliar se as proporções observadas destes eventos mostram ou não diferenças significativas ou se as amostras diferem significativamente quanto às proporções desses acontecimentos.

Resta-nos definir uma função que quantifique a concordância entre o modelo e os dados, para que maximizando a concordância, obtenhamos os parâmetros que melhor ajustam o modelo. Vamos supor que nossas observações possuem erros gaussianos não-correlacionados, assim, o método de ajuste aplicado utiliza a função  $\chi^2$ , definida como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(D_i - y(x_i|\theta))^2}{\sigma_i^2}, \quad (\text{B.3})$$

onde a soma é sobre todos os  $n$  dados  $D_i$ 's, e  $y$  nos fornece a predição do modelo ao fixar valores dos parâmetros representados por  $\theta = \theta_j$ .

A *likelihood*, por sua vez, é definida como:

$$P(D|\theta) = C \exp \left[ -\frac{\chi^2(\theta)}{2} \right]. \quad (\text{B.4})$$

A constante  $C$  é incorporada à normalização da distribuição, e caso não tenhamos nenhuma informação adicional sobre o sistema que associe pesos extras à distribuição, a probabilidade posterior será proporcional à *likelihood*. Podemos verificar que, neste caso, o par de parâmetros que minimiza o  $\chi^2$  é o mesmo que maximiza a probabilidade. Logo, os parâmetros do melhor ajuste são aqueles que têm maior probabilidade de serem os verdadeiros, de acordo com os dados coletados.

Os valores de melhor ajuste, porém, não nos dão toda a informação. É necessário obter as barras de erros dos parâmetros, associados a certos níveis de confiança. No entanto, essas são questões que fogem ao escopo do trabalho. Para um estudo mais detalhado podemos sugerir a referência [160] e referências lá citadas.