



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**RADIAÇÃO HAWKING DE UM BURACO
NEGRO BTZ NÃO-COMUTATIVO**

Arthur Gonçalves Cavalcanti

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**RADIAÇÃO HAWKING DE UM BURACO
NEGRO BTZ NÃO-COMUTATIVO**

Arthur Gonçalves Cavalcanti

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2016 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C376r Cavalcanti, Arthur Gonçalves.
Radiação Hawking de um buraco negro BTZ não-comutativo /
Arthur Gonçalves Cavalcanti. – Campina Grande, 2016.
59 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto, Prof. Dr.
Jean Spinelly da Silva".

Referências.

1. Buraco Negro BTZ. 2. Não-comutatividade. 3. Correções
Quânticas. I. Anacleto, Marcos Antonio. II. Silva, Jean Spinelly
da. III. Título.

CDU 53:524.882(043)

RADIAÇÃO HAWKING DE UM BURACO NEGRO BTZ NÃO-COMUTATIVO

ARTHUR GONÇALVES CAVALCANTI

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto
Orientador

Prof. Dr. Jean Spinelly da Silva
Coorientador

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva
Examinador Externo

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Examinador Interno

*“O importante é nunca
parar de questionar”*

(Albert Einstein)

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado perseverança, paciência e sabedoria para a conclusão deste curso.

Ao meu orientador, Marcos Antonio Anacleto, pela grandiosa paciência e pelos tempos que se dispunha a me ajudar.

Ao meu co-orientador, Jean Paulo Spinelly, por sempre acreditar no meu potencial para a pesquisa e por me ajudar em momentos em que eu pensava que estava tudo perdido.

Aos meus pais, Marco Antônio e Genilda Gonçalves, e minhas irmãs, Rachel Gonçalves e Raíssa Gonçalves, que sempre se fizeram presentes nos momentos mais difíceis desta trajetória.

À minha noiva, e melhor amiga, Luana Oliveira pela paciência nas nossas conversas diárias e pela motivação para a conclusão de mais uma etapa acadêmica.

À todos os meus amigos e colegas de curso que de alguma forma, cada um com seu modo específico, contribuíram para o meu amadurecimento na pesquisa.

À todos os professores, da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande, por contribuírem para a minha formação de mestre.

À CAPES, por ter financiado minha pesquisa durante o tempo que passei no mestrado.

Lista de Figuras

2.1	Formação de buracos negros gravitacionais	6
2.2	Formação de buracos negros primordiais	7
4.1	Calor específico. Plot C_{vGUP} vs. r_+ . Para $\alpha = 0.5$ e $\Theta B = 0.1$. C_v é o calor específico para $\Theta B = \alpha = 0$	45
4.2	Calor específico. Plot C_{vGUP} vs. r_+ . Para $\Theta B = \alpha = 0.5$	46

Lista de Tabelas

2.1	Classificação por massa, momento angular e carga elétrica	7
2.2	Classificação por faixa de massa. Sendo M_{\odot} a massa solar.	8
2.3	Número de componentes independentes num espaço de N -dimensões	12

Sumário

Agradecimentos	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Buracos Negros	5
2.1 Formação e Classificação de Buracos Negros	5
2.2 Relatividade Geral	8
2.2.1 O Campo Gravitacional na TRG	8
2.2.2 Equações de Einstein	9
2.2.3 Relatividade em (2+1)-Dimensões	10
2.3 Soluções Tipo Buraco Negro	14
2.3.1 Solução de Schwarzschild	14
2.3.2 A métrica BTZ	15
2.4 Termodinâmica de um Buraco Negro	16
3 Não Comutatividade	22
3.1 Aspectos Gerais	22
3.2 Problema de Landau	24
3.3 Produto Moyal	26
3.4 Métrica de Schwarzschild não-comutativa	28

3.4.1	Barreira de potencial para Schwarzschild não-comutativa	29
3.5	Métrica de BTZ não-comutativa	31
3.5.1	Barreira de potencial para BTZ não-comutativa	32
4	Termodinâmicas de Buracos Negros Não-comutativos	34
4.1	Buraco negro Schwarzschild não-comutativo	34
4.2	Buraco negro de Schwarzschild e o Princípio da Incerteza Generalizado . .	37
4.3	Buraco negro BTZ não-comutativo	39
4.4	Buraco negro BTZ e o Princípio da Incerteza Generalizado	42
5	Conclusões	47
A	Demonstração da métrica de Schwarzschild não-comutativo	49
	Referências Bibliográficas	54

Resumo

A teoria da relatividade geral prevê soluções tipo buraco negro, as quais são caracterizadas pela existência de um horizonte de eventos. Como exemplo, podemos citar a métrica obtida por Bãnados-Teitelboim-Zanelli (BTZ), que é uma solução da gravitação em $(2+1)$ -dimensões, em que se considera uma constante cosmológica negativa. Nos últimos anos, buracos negros não-comutativos têm sido investigados na literatura por muitos autores. Em particular, a métrica BTZ não-comutativa foi obtida considerando-se a equivalência, que existe em três dimensões, entre gravitação e a teoria de Chern-Simons, que é uma teoria quântica de campos topológica em três dimensões, e usando-se o mapeamento de Seiberg-Witter com a solução em $(2+1)$ -dimensões. A presença de divergências na teoria quântica de campos leva a considerar a possibilidade de modificar o princípio da incerteza de Heisenberg, introduzindo uma escala de comprimento fundamental, e esta modificação geram correções nas propriedades termodinâmica de buracos negros. Um dos efeitos associados às soluções tipo buraco negro, independente da dimensão do espaço-tempo, é a emissão térmica (Radiação Hawking), a qual é vista como um processo de tunelamento devido às flutuações do vácuo que acontece na região próxima ao horizonte de eventos. Neste trabalho, com o objetivo de investigar as correções devido a não comutatividade e ao princípio da incerteza generalizado, consideramos a métrica BTZ não-comutativa. Para tanto, usamos o formalismo de tunelamento via método de Hamilton-Jacobi.

Palavras-chave: Buraco negro BTZ. Não-comutatividade. Correções quânticas.

Abstract

The general relativity theory predicts black hole type solutions, which are characterized by the existence of an event horizon. As an example, the metric obtained by Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ), which is a solution of the gravitation in $(2 + 1)$ -dimensions in what is considered a negative cosmological constant. In recent years, noncommutative black holes have been investigated by many authors in the literature. In particular, the BTZ metric non-commutative was obtained considering the equivalent, which exists in three dimensions, between gravitation and Chern-Simons theory, which is a quantum theory topological fields in three dimensions, and using its mapping Seiberg-Witten with the solution of $(2 + 1)$ -dimensions. The presence of divergences in quantum field theory leads to consider the possibility of modifying the principle of Heisenberg uncertainty by introducing a fundamental length scale, and this modification generates corrections to the thermodynamic properties of black holes. One of the effects associated with the black hole type solutions, regardless of the space-time dimension is the thermal emission (Hawking radiation), which is seen as a process of tunneling due to vacuum fluctuations that happens in the region near the event horizon. In this work, in order to investigate the corrections due to noncommutativity and the principle of widespread uncertainty, we consider the metric BTZ noncommutative. For this, we use tunneling formalism via Hamilton-Jacobi method.

Keywords: BTZ Black holes. Noncommutative. Quantum-corrected

Capítulo 1

Introdução

Essencialmente, os buracos negros surgem com o nascimento da teoria da relatividade geral (TRG) e a solução de Schwarzschild. Entretanto, no contexto da gravitação universal de Newton, já existiam especulações sobre as chamadas “estrelas negras”. Esta idéia de estrelas negras dava-se ao fato de que, se a velocidade escape de uma estrela, ou seja, a velocidade para um objeto escapar do seu campo gravitacional, fosse maior do que a velocidade da luz, então nem a própria luz poderia escapar do seu campo gravitacional.

Uma solução das equações de Einstein, em $(2 + 1)$ -dimensões, foi obtida por Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ), considerando uma constante cosmológica negativa. A não-comutatividade do buraco negro de BTZ foi estudada primeiramente por M. Banados *et al.* (2001) e por Hyeong-Chan Kim *et al.* (2008). A métrica BTZ não-comutativa que foi encontrada baseada na equivalência tridimensional entre a gravidade e a teoria de Chern-Simons, que é uma teoria de campos quântica tridimensional, usando o mapa de Seiberg-Witten, que pode ser interpretada como uma expansão em Θ do campo de gauge com a solução não-comutativa (BAÑADOS, TEILTELBOIM E ZANELLI, 1992). O buraco negro BTZ é uma solução de $(2 + 1)$ -dimensões gravitacionais com constante cosmológica negativa, que tem se tornado um importante campo de investigação. Agora o espaço tridimensional é bem aceito por ser um excelente laboratório a fim de explorar e testar algumas idéias por trás da correspondência AdS/CFT (MALDACENA, 1999). Anacleto, Brito e Passos (2015) analisaram o efeito Aharonov-Bohm gravitacional devido ao buraco negro BTZ num fundo não-comutativo. Além disso, Sadeghi e Reza (2015) tem analisado o comportamento de partículas testes no espaço-tempo não-comutativo. As propriedades termodinâmicas de buracos negros BTZ carregados são estudadas por

Hendi, Panahiyan e Mamasani (2015).

Existem várias abordagens para obter a radiação Hawking e a entropia de buracos negros. Uma delas é através do método Hamilton-Jacobi que é baseado nos trabalhos de Padmanabhan e seus colaboradores (1999). Uma aproximação semiclássica considerando a radiação Hawking como o fenômeno de tunelamento para uma partícula que atravessa o horizonte de eventos tem sido proposta nos últimos anos (PARIKH e WILCZEK, 2000). Nesta aproximação apenas a partícula de energia positiva, criada dentro do horizonte de eventos, pode tunelar quanticamente através da barreira geométrica, e isto é observado como um fluxo Hawking para o infinito. Nesta lógica, este método usa a aproximação WKB no formalismo de tunelamento para o cálculo da parte imaginária da ação. Os autores Parikh e Wilczek (2000) usam o método das geodésicas radiais nulas para determinar a temperatura Hawking e Xu e Chen (2007) usaram este método para calcular a temperatura Hawking para diferentes espaços-tempo. Banerjee e Majhi, 2008, analisaram a radiação Hawking considerando a auto-gravitação e os efeitos da radiação de fundo no formalismo de tunelamento. Também foi investigado por Silva e Brito, 2013, os efeitos da radiação de Hawking para buraco negro auto-dual usando o formalismo de tunelamento pelo método de Hamilton-Jacobi. Majumder (2013) analisou os efeitos do princípio da incerteza generalizada (GUP) no formalismo de tunelamento da radiação Hawking para avaliar as correções quânticas na temperatura Hawking e entropia do buraco negro de Schwarzschild. Além disso, os autores Anacleto *et al.* (2015) têm discutido a radiação Hawking para buracos negros acústicos usando o formalismo de tunelamento e Anacleto, Brito e Passos, 2015, estudaram as propriedades termodinâmicas do buraco negro auto-dual, usando a versão Hamilton-Jacobi com o GUP. Faizal e Khalil (2015) investigaram as correções de propriedades termodinâmica de buracos negros assumindo que o GUP mostra que a relação entropia-área é universal para todos os buracos negros.

Na literatura existem diversos trabalhos sobre a origem estatística da entropia de um buraco negro - ver, por exemplo os estudos de Frolov e Novikov (1993); Magán, Melnikov e Silva (2014); Solodukhin (2011); Xu, Wang e Meng (2014) e Silva (2013). Kaul e Majumdar (2000) computaram correções de baixa ordem para a entropia Bekenstein-Hawking. Eles encontraram correções logarítmicas. Por outro lado, Rinaldi (2013), mostrou que existe uma correção adicional logarítmica que depende de cargas conservadas. Em adição, para um entendimento da origem da entropia do buraco negro, o método

brick-wall, proposto por G. 't Hooft foi usado nos cálculos de grandeza termodinâmicas de um buraco negro. Assim, de acordo com G. 't Hooft, a entropia do buraco negro é apenas a entropia de campos quânticos fora do raio do horizonte do buraco negro. No entanto um corte ultravioleta deve ser introduzido quando se calcula a entropia estatística por este método, para evitar as divergências da densidade de estado próximo ao horizonte do buraco negro. Rinaldi (2000) investigou um buraco negro acústico em $(1 + 1)$ dimensão pelo método brick-wall.

Outra idéia na tentativa de remover as divergências é considerar que o princípio da incerteza de Heisenberg seja modificado. Assim, usando a relação de incerteza de Heisenberg modificada, as divergências no modelo brick-wall são removidas, como foi discutido Brustein e Kupferman (2011). A entropia estatística de vários buracos negros pode ser calculada também via correção da densidade de estado através do GUP (BRUSTEIN e KUPFERMAN, 2011). Assim, os resultados mostram que próximo ao horizonte tanto a densidade de estado como a entropia estatística são finitas. Nouicer (2007) propôs uma relação para a densidade de estados corrigido por GUP. Anacleto *et al.* (2014), usaram uma nova equação de densidade de estado devido ao GUP, em que foi analisada a entropia estatística de um buraco negro acústico, rotativo, em $(2 + 1)$ -dimensões. Foi mostrado também que, considerando o efeito devido ao GUP na equação de densidade estado, não é necessário um corte e as divergências no modelo brick-wall desaparecem (ZHAO, LI e ZHANG, 2009).

Inspirado por todos estes trabalhos anteriores, podemos focar no método Hamilton-Jacobi para determinar a entropia do buraco negro BTZ não-comutativo usando o GUP e considerando a aproximação WKB no formalismo de tunelamento, para calcular a parte imaginária da ação para determinar a temperatura Hawking e a entropia do buraco negro BTZ não-comutativo.

Este trabalho tem uma abordagem qualitativa e explicativa da termodinâmica de buracos negros, visto que nosso objeto de estudo é de cunho teórico, valendo-se de uma pesquisa descritiva e interpretativa composto pelos seguintes capítulos: 2) Buracos negros; 2.1) Formação e classificação de buracos negros; 2.2) Relatividade Geral; 2.3) Soluções tipo buraco negro; 2.4) Termodinâmica de um buraco negro; 3) Não-comutatividade; 3.1) Aspectos Gerais; 3.2) Problema de Landau; 3.3) Produto moyal; 3.4) Métrica de Scharzschild não-comutativa; 3.5) Métrica BTZ não-comutativa; 4) Termodinâmica de

um buraco negro; 4.1) Buraco negro de Schwarzschild não-comutativo; 4.2) Buraco negro de Schwarzschild e o princípio da incerteza generalizado; 4.3) Buraco negro BTZ não-comutativo; 4.4) Buraco negro BTZ e o princípio da incerteza generalizado; 5) Conclusões. Vale observar que estamos considerando o sistema natural de unidades, ou seja, $G = c = \hbar = k_B = 1$.

Capítulo 2

Buracos Negros

Buracos negros são regiões do espaço-tempo distorcidas por um campo gravitacional originárias do colapso de estrelas ou de regiões muito quente e densa logo após o big bang. O termo “buraco” se deve ao fato da matéria e da radiação poderem cair dentro dele e o termo “negro” está associado ao fato de nem a luz ser capaz de sair dele. Acredita-se que eles são os objetos mais exóticos do universo. Esta descrição implica que buracos negros devem ser contornados por algum tipo de superfície fechada, que é uma característica crucial para a sua existência, chamada de **horizonte de eventos**.

Neste capítulo faremos uma abordagem teórica sobre a formação e classificação dos buracos negros, assim como uma revisão da relatividade geral descrita por Albert Einstein em $(3 + 1)$ -dimensões e $(2 + 1)$ -dimensões. Por fim apresentaremos a relação entre termodinâmica e buracos negros.

2.1 Formação e Classificação de Buracos Negros

Muitas observações e descobertas astronômicas tiveram início em 1960, o que gerou interesse ainda maior na teoria clássica da relatividade geral pela comunidade científica. Objetos como quasares, pulsares e fontes de raios-X indicaram a presença de um campo gravitacional muito forte que só poderia ser descrito pela TRG. Os quasares são objetos tipo estrelas poderosamente energéticos e brilham mais do que galáxias inteiras. Pulsares são restos de estrelas que entraram em colapso gravitacional (supernovas) e que piscam rapidamente. Acredita-se que os pulsares são estrelas de neutrons ultradensas. As fontes de raios-X podem ser estrelas de neutrons ou objetos ainda menores, conhecidos por

buracos negros(HAWKING, 1976).

Na tentativa de descrever a formação de buracos negros vamos, primeiramente, imaginar uma estrela com no mínimo 10 vezes a massa solar. Durante maior parte de sua vida a estrela transforma hidrogênio em hélio, num processo conhecido como fusão nuclear. Neste período, a estrela possui uma velocidade de escape cerca de 1.000 quilômetros por segundo (HAWKING, 1976), ou seja, a velocidade mínima para um objeto escapar do seu campo gravitacional. A energia gerada nesse processo produz uma pressão suficiente para manter o equilíbrio com a própria gravidade da estrela. Entretanto, no estágio final de sua vida, esse “combustível” vai se acabando e o equilíbrio é quebrado, de forma que a força gravitacional supera a pressão produzidas na fusão, então a estrela entra em colapso gravitacional, o resultado final deste processo é conhecido como supernova. A estrela vai encolhendo e, conseqüentemente, o campo gravitacional na superfície da estrela vai aumentando junto com a velocidade de escape. Chega um ponto, então, que a velocidade escape aumenta para 300.000 quilômetros por segundo, a velocidade da luz, ou seja, nem a luz consegue escapar de dentro da estrela, e como nada viaja mais rápido do que a luz, nada mais consegue escapar deste campo gravitacional. O resultado deste processo é conhecido como buraco negro: a região de espaço-tempo a partir do qual não é possível escapar para o infinito (HAWKING, 1976). Estes tipos de buracos negros são conhecidos como *gravitacionais*, que se formam a partir do colapso de uma estrela (figura 2.1).

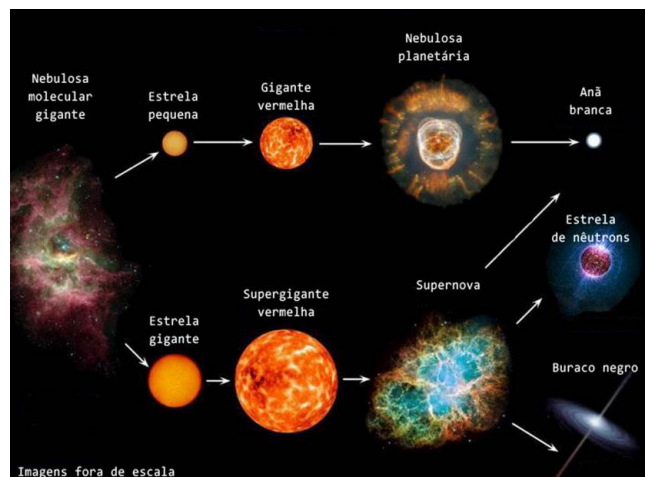


Figura 2.1: Formação de buracos negros gravitacionais

Além dos buracos negros gravitacionais, podem existir um número muito grande de buracos negros muito pequenos, que não foram formados pelo colapso estelar, mas de

regiões muito quente e densa logo após o big bang. Estes buracos são conhecidos como *primordiais* (figura 2.2).

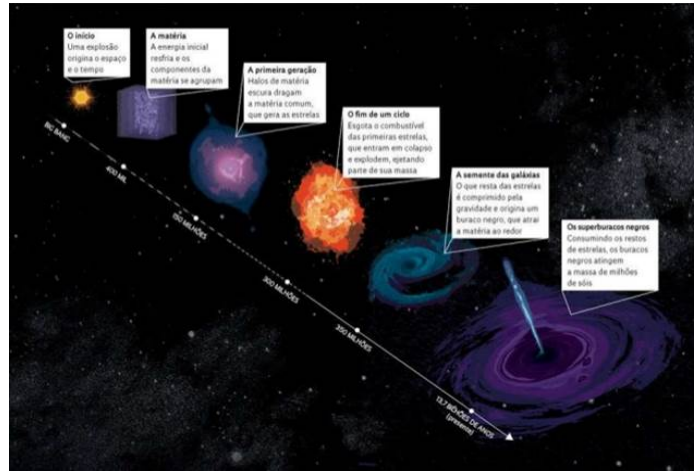


Figura 2.2: Formação de buracos negros primordiais

Vale lembrar que este procedimento vem de uma visão clássica. Hoje, graças ao estudo propostos por Einstein da TGR, sabe-se que para uma estrela se tornar um buraco negro é preciso que sua massa esteja concentrada numa região menor do que o raio de Schwarzschild: $r = 2M$, onde M é a massa da estrela e $G = c = 1$. Esta é uma previsão descrita pela relatividade geral.

A base do esquema de classificação para os buracos negros é dada por John Wheeler que diz que um buraco negro possui poucas propriedades independentes externamente mensuráveis, ou seja, as soluções do tipo buracos negros podem ser completamente caracterizadas apenas por sua massa, seu momento angular e sua carga elétrica, esta afirmação é conhecida por teorema no-hair (ou da calvície). Na tabela 1 é mostrada este tipo de classificação.

Tabela 2.1: Classificação por massa, momento angular e carga elétrica

PROPRIEDADES	MÉTRICA
Somente massa	Schwarzschild
Massa e momento angular	Kerr
Massa e carga elétrica	Reissner-Nordstrom
Massa, momento angular e carga elétrica	Kerr-Newman

Outro esquema de classificação amplamente utilizado para buracos negros é aquele que se baseia na massa do buraco negro. Os limites de massas das diversas classes não são definidas com precisão e vários autores têm proposto novas classes. A tabela 2 mostra este outro tipo de classificação, a qual a massa do buraco negro é representada em termo da massa solar M_{\odot} .

Tabela 2.2: Classificação por faixa de massa. Sendo M_{\odot} a massa solar.

CLASSES	FAIXA DE MASSA
Mini buraco negro	0 à $0.1M_{\odot}$
Buraco negro de massa estrelar	0.1 à $300M_{\odot}$
Buraco negro de massa intermediária	300 à 10^5M_{\odot}
Buraco negro supermassivo	10^5 à $10^{10}M_{\odot}$

2.2 Relatividade Geral

A teoria da relatividade de Einstein consiste em duas: a teoria da relatividade restrita (também chamada de especial ou apenas TRR) e a teoria da relatividade geral (TRG). A teoria especial, formulada por Einstein em 1905, se refere a comparação de medidas feitas em referenciais inerciais, movendo-se com velocidade constante relativamente um ao outro. Por sua vez, a teoria geral (1916), que é a teoria relativística da gravitação, não trata apenas com referenciais inerciais, mas com referenciais quaisquer, pois, como veremos, o campo gravitacional é, localmente, equivalente a um referencial não-inercial.

2.2.1 O Campo Gravitacional na TRG

O caráter universal da gravitação é que, na presença de um campo gravitacional, todos os corpos caem ao longo da mesma trajetória espacial, independente da sua massa e constituição. Por outro lado, as propriedades do movimento de um corpo, em queda livre, são as mesmas do movimento que ele teria se estivesse em repouso em um referencial não-inercial, e na ausência de um campo gravitacional externo. Essa característica permite-nos concluir que um campo gravitacional é equivalente a um referencial não-inercial (*princípio da equivalência*).

Porém, devemos ressaltar que os campos que são equivalentes a sistemas não-inerciais não são campos reais, uma vez que os campos que possuem a equivalência podem ser eliminados quando ocorre a passagem para um referencial inercial. Os campos reais, ao invés disso, não podem ser eliminados sob nenhuma mudança de coordenadas. Na verdade, podemos eliminar um campo real apenas localmente, ou seja, em uma pequena região do espaço onde ele possa ser considerado uniforme.

Extrapolando essa discussão para o caso relativístico Einstein concluiu que a gravidade é uma modificação do espaço, ou seja, uma modificação da geometria euclidiana nas proximidades de uma distribuição de massa.

2.2.2 Equações de Einstein

Segundo Newton, dois corpos de massas diferentes e separados por uma certa distância um do outro, devem se atrair mutuamente por uma força denominada de gravitacional. Esta interação se dá através da presença de um campo gravitacional real, $\phi(x, y, z)$, criado por uma distribuição de massa com densidade $\rho(x, y, z)$, o qual obedece a equação de Poisson que é dada por:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z) . \quad (2.1)$$

Enquanto que a descrição do campo Newtoniano necessita apenas de 1(um) potencial para descrever os efeitos do campo gravitacional, a TRG requer 10 (dez) potenciais que são representados pelos componentes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}(x)$. Isso significa que devemos ter 10 equações que, no limite do campo fraco, devem corresponder à equação de Poisson. Além disso, tais equações devem apresentar características semelhantes à equação (2.1), ou seja, o lado direito de cada uma delas deve conter um tensor que represente a quantidade de matéria e energia, denominado de *Tensor Energia-Momento*, representado por $T_{\mu\nu}$, e do lado esquerdo de cada equação, deve haver um tensor de segunda ordem construído em termos de derivadas segundas do tensor $g_{\mu\nu}$.

Existe um tensor que representa essas características, denominado tensor de Ricci, dado por:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} , \quad (2.2)$$

onde $R_{\lambda\mu\sigma\nu}$ é o chamado tensor de Riemann¹, definido por:

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} - \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma}\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} , \quad (2.3)$$

sendo

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} (\partial_{\lambda}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\lambda} - \partial_{\sigma}g_{\nu\lambda}) , \quad (2.4)$$

os símbolos de Christoffel².

Um fato importante é que a divergência covariante³ do tensor $T_{\mu\nu}$ é nula, ou seja, $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, o que representa a conservação do momento-energia. Então, o tensor que aparece no lado esquerdo das equações da relatividade geral deve ser escrito em termos do tensor de Ricci e satisfazer essa propriedade. O tensor que atende a esses requisitos é o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, definido como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R . \quad (2.5)$$

Levando isso em conta, Einstein concluiu que as equações, que descrevem o campo gravitacional gerado por uma grande quantidade de massa ou energia, devem assumir a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} . \quad (2.6)$$

Estas são as equações de Einstein. No lado esquerdo das equações temos o tensor de Einstein, que representa a geometria do espaço-tempo, e no lado direito temos o tensor Energia-Momento, que representa a distribuição de massa e energia do sistema. Desta forma, percebemos que a deformação da geometria da rede de espaço-tempo é deformada ou curvada quando temos corpos massivos numa determinada região do espaço.

2.2.3 Relatividade em (2+1)-Dimensões

Essencialmente, as equações de campo de Einstein parecem funcionar perfeitamente em N -dimensões. Porém, uma investigação mais profunda revela que, para $N < 4$, a teoria apresenta alguns problemas (GIDDINGS, ABBOTT e KUCHAR, 1983).

¹O tensor de curvatura, $R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma}$, é um ente matemático que permite saber se o espaço-tempo é ou não Euclidiano.

²Nas equações acima estamos usando $\partial_{\lambda}g_{\sigma\nu} = \partial g_{\sigma\nu}/\partial x^{\lambda}$.

³A derivada covariante de um tensor de segunda ordem, como é o caso do tensor energia-momento é:
 $\nabla_{\alpha}T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}T_{\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}T_{\lambda\nu}$

Nesta seção faremos uma breve apresentação da Teoria da Relatividade Geral para o caso particular de $N = 3$, ou seja, $(2 + 1)$ -dimensões.

A teoria da gravitação de Newton para o plano é dada por:

$$\nabla^2 \phi = 2\pi\rho . \quad (2.7)$$

Esta teoria prevê que a aceleração deve cair com $1/r$ para um campo gerado por um ponto de massa M . Entretanto, veremos a seguir que a relatividade geral para $(2 + 1)$ -dimensões não fornece este resultado no limite de um campo fraco (GOTT e ALPERT, 1982; DIAS, 2003).

Note que no espaço-tempo de $(3 + 1)$ -dimensões, a constante k é determinada pela necessidade de que as equações de Einstein devem se reduzir as equações de Newton no limite não relativístico e isto leva a $k = 8\pi G$, para $c = 1$ e $G = 1$. Entretanto, em $(2 + 1)$ -dimensões não existe este limite. Sendo assim, nesta dimensão k permanece uma constante a ser determinada (Gott e Alpert, 1982). Para esta dimensão, esperamos que as equações de campo de Einstein tenham propriedades semelhantes as mesmas equações em $(3 + 1)$ -dimensões. Além disso, desejamos que estas equações recaiam automaticamente na lei da conservação da energia: $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ (GOTT e ALPERT, 1982). Em $(2 + 1)$ -dimensões a métrica $g_{\mu\nu}$, os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ e o tensor de curvatura $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ são definidos de maneira usual. Segundo Dias (2003) a escolha do Tensor Energia-Momento determina completamente o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e, em 3 dimensões, o tensor de Weyl desaparece. Assim, as equações de campo de Einstein permanecem sendo:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} . \quad (2.8)$$

Ainda, usando a equação (2.8), podemos reescrever as equações de campo em termos do tensor de Ricci, como:

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}g^\mu{}_\nu R = kT^\mu{}_\nu \Rightarrow R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R = kT^\mu{}_\nu \Rightarrow \quad (2.9)$$

$$R - \frac{3}{2}R = kT \Rightarrow -\frac{R}{2} = kT \Rightarrow R = -2kT , \quad (2.10)$$

então,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-2kT) = kT_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = k[T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T] . \quad (2.11)$$

Em três dimensões, o tensor de curvatura possui apenas 6 componentes independentes, então o tensor de Riemann pode ser expresso como uma dependência linear apenas

do tensor de Ricci (DIAS, 2003; GOTT e ALPERT, 1982; WEINBERG, 1972) da seguinte forma:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})R . \quad (2.12)$$

Como estamos trabalhando o caso em que $N > 2$, mais especificamente $N = 3$, o tensor de Ricci pode ser expresso em termos do tensor de Einstein e ambos têm o mesmo número de componentes independentes (GIDDINGS, ABBOTT e KUCHAR, 1983). De forma geral podemos relacionar estes dois tensores como segue:

$$G = \frac{1}{2}(2 - N)R; \quad R = \frac{2}{2 - N}G , \quad (2.13)$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}; \quad R_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{1}{N - 2}Gg_{\alpha\beta} . \quad (2.14)$$

A tabela 2.3 abaixo mostra como se relacionam os componentes linearmente independente dos tensores com o número de dimensões.

Tabela 2.3: Número de componentes independentes num espaço de N -dimensões

Número de componentes algebricamente independente	N	4	3	2	1
Tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$(1/12)N^2(N^2 - 1)$	20	6	1	0
Tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$	$(1/2)N(N + 1)$	10	6	1	0
Tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$	$(1/2)N(N + 1)$	10	6	0	0
Escalar de Ricci R	1, se $N > 1$	1	1	1	0

Feita esta abordagem, podemos obter as soluções para as equações de campo no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) onde devemos ter $R_{\mu\nu} = 0$ e, conseqüentemente, $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$. O espaço-tempo de Minkowisk, $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$, será a única solução possível. Isto significa que não existem ondas gravitacionais no mundo plano e também não existe ação a distância (DIAS, 2003; GOTT e ALPERT, 1982). Com isto, devemos ver que a geometria local em $(2 + 1)$ -dimensões é curvada apenas na presença de matéria ou energia.

Adotando uma forma mais geral de uma métrica com simetria circular como sendo:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\phi^2 , \quad (2.15)$$

podemos encontrar as funções $A(r)$ e $B(r)$ substituindo nas equações de campo no vácuo, desta forma encontramos que estas funções não dependem da variável r , sendo assim elas são constantes, as quais denominaremos por A_0 e B_0 . Logo,

$$ds^2 = -A_0 dt^2 + B_0 dr^2 + r^2 d\phi^2 . \quad (2.16)$$

Uma maneira de eliminar estas constantes é fazer uma mudança de coordenadas de forma que devemos fazer $t = \sqrt{A_0}t'$, $r = \frac{r'}{\sqrt{B_0}}$ e $\phi = \sqrt{B_0}\phi'$. Substituindo essas relações na métrica acima obtemos:

$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + r'^2 d\phi'^2 . \quad (2.17)$$

Para esta mudança de coordenadas, a métrica (2.17) está escrita na forma polar da métrica de Minkowisk. Isto corresponde a cortar o plano em $\phi = 0$ e espalha-lo no plano. Perceba que se $0 \leq \phi \leq 2\pi$ então, $0 \leq \phi' \leq \frac{2\pi}{\sqrt{B_0}}$. Assim, o cone tem um ângulo de desvio no seu vértice de

$$D = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{B_0}} \right) . \quad (2.18)$$

Isto mostra que as trajetórias das partículas que estão inicialmente paralelas acabam por se cruzarem eventualmente em um ângulo D . Além disso, pode ser mostrado que D é proporcional a massa.

Gott e Alperete (1982) mostram em seu artigo algumas motivações para se estudar a teoria da relatividade geral em $(2 + 1)$ -dimensões. Lá eles falam que reduzir a dimensão pode ser útil para simplificar problemas de Mecânica Quântica, por exemplo, a existência da temperatura Hawking, que provém do espaço de de Sitter em $(1 + 1)$ -dimensões. Ainda neste no mesmo artigo, um outro ponto importante é que um ponto singular de massa no espaço-tempo plano é conhecido como singularidade quase regular, isto é, o comprimento de um pequeno círculo desenhado em torno de um ponto não se aproxima de $2\pi r$ a medida que $r \rightarrow 0$. Este tipo de singularidade pode ser visto na métrica de Kerr, onde o espaço-tempo é plano em todos os lugares, exceto no anel onde existe uma singularidade cônica, onde a circunferência de um pequeno círculo de raio r é $4\pi r$

Vimos que no espaço plano massas pontuais são muito bem comportadas e têm singularidades quase regulares. Na nossa investigação, vimos dois fatos interessantes: i) a TRG parece trabalhar perfeitamente bem como uma teoria de campos, mesmo na ausência de grávitons e de ondas gravitacionais; ii) A TRG não recai necessariamente na física newtoniana no limite do campo fraco.

2.3 Soluções Tipo Buraco Negro

2.3.1 Solução de Schwarzschild

Meses após Einstein apresentar sua equação, o alemão Carl Schwarzschild encontrou a primeira solução exata destas equações de campo. Esta é a solução mais simples de uma simetria esférica que pode ser produzida por uma distribuição esférica de matéria (CARMELLI, 1982) e ela é usada para descrever a geometria do espaço-tempo fora de uma fonte gravitacional esférica. A solução obtida por ele foi:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.19)$$

onde M representa a massa total da distribuição de matéria. Veja que para uma distribuição esfericamente simétrica, a métrica só depende de M . Em particular se $M = 0$, o intervalo (2.19) se torna o intervalo no espaço-tempo de Minkowski escrito em coordenadas esféricas. Assim, para uma região em que $r \gg MGc^{-2}$ a geometria da equação acima pode ser interpretada como uma perturbação na geometria de um espaço-tempo plano (FERRARO, 2007).

Neste trabalho estamos considerando $G = 1$ e $c = 1$. Desta maneira, a equação acima é reescrita da seguinte forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.20)$$

Com esta solução Schwarzschild mostrou que uma distribuição de massa puntiforme tem uma característica bastante peculiar, ou seja, para $r = 2M$ nada pode sair dessa região, nem mesmo a luz. A esta região damos o nome de raio de Schwarzschild. Quando uma partícula como, por exemplo, o fóton atravessa esse raio a deformação do espaço-tempo é tão grande que ela não consegue mais voltar e se uma partícula como o fóton não consegue mais sair dessa região, um observador que está situado distante desse raio não conseguirá enxergar este objeto, ou seja, este objeto se tornou um buraco negro. Este corpo está agora envolto por um contorno, uma “membrana” do espaço-tempo que impede que tenhamos qualquer informação sobre o que está ocorrendo no interior dela. Definimos um *Horizonte de Eventos* como sendo uma superfície na qual se uma partícula atravessar ela nunca poderá escapar para o infinito; no caso de Schwarzschild o horizonte de eventos está localizado em $r = 2M$ (CARROLL, 2003).

2.3.2 A métrica BTZ

O estudo das geodésicas nulas e geodésicas do tipo tempo são uma alternativa para descrever as características do espaço-tempo, além disso, a métrica obtida por Schwarzschild em $(3 + 1)$ -dimensões representou a chave para entender vários fenômenos físicos importantes como, por exemplo, os movimentos planetários e as lentes gravitacionais (CRUZ, MARTÍNEZ e PEÑA, 2008). A solução em $(2 + 1)$ -dimensões só veio com Máximo Bañados, Cláudio Teitelboim e Jorge Zanelli em 1993 que consideraram identificações no subgrupo $SO(2,2)$ a partir do espaço anti-de Sitter (AdS), cuja característica é possuir constante de curvatura negativa. Este espaço é o análogo Lorentziano do espaço hiperbólico, assim como o espaço de Minkowski é o análogo do espaço Euclidiano. Esta constante implica que localmente o espaço é do tipo anti-de Sitter, mas se difere em suas propriedades globais. Para que buracos negros sejam formados neste espaço é necessário que se tenha esta constante cosmológica negativa, pois ela fornece a escala de comprimento necessária para ter um horizonte de eventos em uma teoria na qual a massa é adimensional (BAÑADOS, TEITELBOIM e ZANELLI, 2001).

O objetivo deste trabalho não é a demonstração da métrica BTZ, que pode ser encontrada no artigo de Bañados, Teitelboim e Zanelli de 1993, mas a apresentação de algumas características do espaço em estudo (AdS) e da própria métrica, pois nosso interesse maior é o estudo de propriedades termodinâmicas deste tipo de buraco negro e a obtenção de um potencial efetivo para esta métrica, já que vamos utilizar o método de tunelamento para calcular grandezas termodinâmicas associadas ao buraco negro.

A ação considerada por Bañados, Teitelboim e Zanelli foi:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} [R + 2l^{-2}] dx^2 dt + B , \quad (2.21)$$

onde B é o termo de superfície e o raio de curvatura l se relaciona com a constante cosmológica da seguinte forma:

$$l^2 = -\frac{1}{\Lambda} ,$$

e como já foi dito, l deve fornecer a escala de comprimento necessária para se ter um raio de horizonte de eventos.

Como resultado das equações de Einstein, a métrica obtida por eles foi:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2(N^\phi dt + d\phi) , \quad (2.22)$$

em que N e N^ϕ são funções de r dadas por,

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (2.23)$$

e

$$N^\phi = -\frac{J^2}{2r^2}, \quad (2.24)$$

com t e r finitos e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Na métrica apresentada acima as duas constantes M e J são identificadas como sendo a massa e o momento angular que representam cargas conservadas associadas com a invariância assintótica sob deslocamento no tempo e invariância de rotação, respectivamente. Segundo Bañados, Teitelbom e Zanelli, 1993, esta identificação é conseguida através de uma análise das integrais de superfície que devem ser adicionadas ao Hamiltoniano a fim de torná-lo bem definido. Além disso, a função N desaparece para dois valores de r que são:

$$r_{\pm}^2 = \frac{l^2 M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right]. \quad (2.25)$$

Através desta equação, podemos ver que para que o raio exista é necessário que $M > 0$ e que $|J| \leq Ml$. E para o caso extremo em que $|J| = Ml$ as duas raízes são iguais.

Podemos extrair a partir da métrica (2.22) uma equação para o estado de vácuo. Para isto, devemos considerar que o raio do horizonte deve ir para zero, então é só perceber que devemos fazer $M \rightarrow 0$ e $J \rightarrow 0$, desta forma:

$$ds_{vac}^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(\frac{l^2}{r^2}\right) dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.26)$$

Outro caso interessante é que se fizermos $M = -1$ e $J = 0$ a singularidade também desaparece e desta forma não existe horizonte. Para este caso devemos ter:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (2.27)$$

e assim o espaço anti-de Sitter é retomado.

2.4 Termodinâmica de um Buraco Negro

Os primeiros indícios dos estudo de termodinâmica de buracos negros foi em 1970 com a descoberta matemática que a área da superfície do horizonte de eventos, a fronteira

de um buraco negro, tem a propriedade de sempre aumentar quando matéria adicional ou radiação cai no buraco negro (HAWKING, 1976). Quando dois buracos negros colidem a área do horizonte de eventos resultante é maior do que as parcelas individuais de cada buraco negro original. Esta característica sugere que deve existir uma relação entre a área de um buraco negro e a entropia termodinâmica, que possui esta mesma propriedade, ou seja, a entropia resultante de dois sistemas é sempre maior do que as somas individuais de cada sistema.

O estudo da termodinâmica dos buracos negros tem início, de fato, em 1974 com o físico inglês Stephen Hawking que, inspirado no trabalho de Jacob David Bekenstein, aplica os conceitos da teoria da mecânica quântica no estudo de buracos negro. No mundo quântico, o vácuo não é totalmente vazio, existem pares de partículas virtuais (assim denominadas por serem criadas e aniquiladas tão rapidamente que seria impossível de detectá-las) que se manifestam como fótons, surgindo e se aniquilando a todo momento muito rapidamente. Esse frenesi de criação e aniquilação é conhecido como *flutuação quântica* (DAMASIO e PACHECO, 2009; TONIATO, 2010). Quando este fenômeno ocorre nas proximidade de um buraco negro, o intenso campo gravitacional faz com que exista a possibilidade das partículas serem sugadas para dentro do buraco negro, mas existe, também, a possibilidade de uma dessas partículas escapar para o infinito, o que é chamado de *Radiação Hawking*. A emissão dessas partículas ocorreria até o buraco possivelmente desaparecer. Para que esta radiação ocorra é necessário um gasto de energia que é fornecida pelo próprio buraco negro, o que implicaria na sua evaporação, isto é, uma diminuição do seu tamanho com o passar do tempo (DAMASIO e PACHECO, 2009).

Quando a mecânica quântica é levada em conta, é de se esperar que as energias das partículas devam ser restringidas para que o comprimento de onda dessas partículas sejam menores do que o tamanho do buraco negro. Assim, parece razoável postular que o número de configurações internas seja finito (GIBBONS e HAWKING, 1977). Neste caso, pode-se associar com o buraco negro uma entropia S_H que pode ser o logaritmo deste número, de possíveis configurações.

É importante o estudo da termodinâmica de buracos negros para perceber como a entropia do universo aumenta espontaneamente. Se considerarmos a primeira lei da termodinâmica como sendo:

$$dE = TdS - pdV , \quad (2.28)$$

podemos perceber que uma pequena mudança na entropia de um sistema é acompanhada por uma variação proporcional na energia do sistema. O fator de proporcionalidade é chamada de temperatura do sistema, ou seja, T é a temperatura, S é a entropia, p é a pressão e V é o volume do sistema.

O mesmo pode ser pensado para buracos negros, uma pequena variação da massa do buraco negro altera a área do horizonte de eventos. À esta pequena mudança na massa é multiplicada por um fator de proporcionalidade que Hawking (1976) chamou de gravidade de superfície, que é uma medida da força do campo gravitacional no horizonte de eventos. Nesta dissertação a gravidade de superfície é representada pela letra κ .

Como já foi dito, podemos fazer algumas correspondências de propriedades termodinâmicas com os buracos negros como, por exemplo, energia, entropia e temperatura são correspondidas à massa, área e gravidade de superfície como segue.

$$E \longleftrightarrow M \quad (2.29)$$

$$S \longleftrightarrow A \quad (2.30)$$

$$T \longleftrightarrow \frac{\kappa}{2\pi} . \quad (2.31)$$

No contexto da TRG esta analogia é essencialmente perfeita, com cada lei da termodinâmica correspondendo a uma lei da mecânica dos buracos negros (CARROLL, 2003). A lei zero afirma que no equilíbrio térmico a temperatura é constante em todo sistema. Para buracos negros, isto corresponde a uma gravidade superficial κ constante. A primeira lei mostra a conservação da energia dada pela equação (2.28), então, Unruh e Schützhold 2007 mostram que seu correspondente para uma buraco negro é:

$$dM = \frac{\kappa dA}{8\pi} + \Omega_H dJ , \quad (2.32)$$

onde M é a massa, A é a área, κ é a gravidade superficial, Ω_H é a velocidade angular e J é o momento angular do buraco negro, além disso massa e energia se relaciona como sendo $E = mc^2$. A segunda lei que afirma que a entropia nunca diminui, o que implica numa correspondência de que a área do buraco negro também nunca diminui. Finalmente, a declaração usual da terceira lei de que é impossível alcançar $T = 0$ implica em que a gravidade de superfície nunca vai a zero (CARROLL, 2003; UNRUH e SCHÜTZHOLD, 2007). Para que isto seja consistente é necessário que o buraco negro emita uma radiação

térmica com uma temperatura dada por:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=r_h} . \quad (2.33)$$

Onde o ponto $r = r_h$ corresponde ao raio do horizonte de eventos. Esta equação será mostrada no capítulo 3. E a entropia é calculada pela seguinte expressão:

$$S = \int \frac{dM}{T_H} . \quad (2.34)$$

Nas subseções a seguir vamos considerar dois exemplos para o cálculo da temperatura e entropia, são eles: o caso de Schwarzschild e o caso BTZ

Termodinâmica para o caso da métrica de Schwarzschild

Vamos agora considerar a métrica de Schwarzschild para calcular tanto a temperatura Hawking tanto como a entropia através das relações acima. Para a métrica (2.20) a temperatura é calculada através da equação (2.33) a qual obtemos:

$$T_H^{(S)} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \Big|_{r=2M} \Rightarrow T_H^{(S)} = \frac{1}{8\pi M} . \quad (2.35)$$

Utilizando a equação acima para calcular a entropia através de (2.34), então:

$$S^{(S)} = \int 8\pi M dM = 4\pi M^2 = \pi r_h^2 , \quad (2.36)$$

onde denominamos r_h como sendo o raio do horizonte de Schwarzschild. Escrevendo este resultado da entropia em termos da área de uma esfera, então:

$$S^{(S)} = \frac{A}{4} . \quad (2.37)$$

Esta equação é conhecida como fórmula de Bekeinstein-Hawking, que postularam que a entropia de uma buraco negro deve ser proporcional a sua área.

Ao longo da dissertação utilizaremos o índice (S) para representar propriedades referentes ao buraco negro de Schwarzschild, temperatura, entropia e calor específico.

Da lei da radiação de Stephan-Boltzmann para um corpo negro temos:

$$\frac{dE}{dt} \cong -\sigma AT^4 , \quad (2.38)$$

onde σ é a constante de Stephan-Boltzmann dada por

$$\sigma = \frac{\pi^2}{60} ,$$

no sistema natural de unidades.

Analisando o caso de Schwarzschild, como $E = M$ (lembre que estamos no sistema de unidades naturais), $A = 16\pi M^2$ e $T_H^{(S)} = 1/8\pi M$, então percebemos que:

$$\frac{dM}{dt} \propto \frac{1}{M^2} .$$

Como já era de se esperar, quanto mais massivo o buraco negro for, maior será seu tempo de vida. Além disso, se considerarmos o Sistema Internacional de unidade e substituírmos os valores de todas as constantes na temperatura $T_H^{(S)}$, observamos que:

$$T_H^{(S)} \propto \frac{1}{M} \cdot 10^{23} . \quad (2.39)$$

Se considerássemos, por exemplo, que o Sol colapsasse e se tornasse um buraco negro, como sua massa é da ordem de $10^{30}kg$, veríamos que a temperatura radiada por ele seria da ordem de $10^{-7}K$, o que é um valor muito baixo para ser detectado. Poderíamos, por exemplo, procurar por buracos negros velhos, ou seja, que sua radiação estivesse quase no fim, mas Toninato 2010 mostra que estes buracos negros seriam inapropriados já que seu tempo de vida estimado seria da ordem de 10^{73} anos, o que representa uma idade muito maior do que a idade do próprio universo.

Termodinâmica para o caso da métrica BTZ

Agora, usando a métrica BTZ vista na seção anterior através da equação (2.22), a temperatura será:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right) \Big|_{r=r_+} \Rightarrow T_H = \frac{1}{2\pi r_+} \left(\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} \right) . \quad (2.40)$$

Utilizando esta equação para calcular a entropia através da equação (2.34) e além disso mudando o elemento de integração dM para dr_+ temos:

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi r_+ \left(\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} \right)^{-1} \left(\frac{2r_+}{l^2} - \frac{J^2}{2r_+^3} \right) dr_+ \Rightarrow \\ S &= \int 4\pi dr_+ \Rightarrow \\ S &= 4\pi r_+ \Rightarrow \\ S &= A . \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde consideramos que a área do buraco negro em $(2+1)$ -dimensões é $A = 4\pi r_+$ (EUNE, KIM e YI, 2013).

A partir dos teoremas provados por Stephen Hawking, Jacob Bekenstein conjecturou que a entropia de buraco negro deveria ser proporcional à área de seu horizonte de eventos. Como vimos, para estes casos particulares, comprovamos esta relação entre entropia e área.

Capítulo 3

Não Comutatividade

Os pressupostos básicos da não-comutatividade foram propostos desde cedo pelos fundadores da mecânica quântica, por exemplo, Heisenberg, na tentativa de introduzir um corte ultravioleta eficaz. Experimentando contornos de divergências nas teorias como da eletrodinâmica quântica e Snyder foi o primeiro a formalizar a idéia de não-comutatividade (SZABO, 2003).

A motivação para o estudo do espaço-tempo não-comutativo aparece em teorias como a teoria das cordas, na qual no limite de baixas energias encontramos a teoria de Yang-Mills não-comutativa, proposta por Seiberg e Witten e, também, em teoria não-comutativa no problema de Landau (que será discutido na próxima seção) que descreve o movimento de um elétron na presença de um campo magnético externo; na matéria condensada, surge a teoria de campos não-comutativa e no efeito Hall quântico.

3.1 Aspectos Gerais

O espaço-tempo não-comutativo nasceu essencialmente com a mecânica quântica, já que no espaço de fases¹ as variáveis canônicas x^μ e p_ν são substituídas por operadores \hat{x}^μ e \hat{p}_ν que obedecem a relação de comutação de Heisenberg $[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu]$. Como consequência, o espaço de fases torna-se espalhado e a noção de ponto sede lugar à célula de Planck (SZABO, 2003), e quando tomamos o limite clássico em que $\hbar \rightarrow 0$ obtemos o espaço

¹Espaço de fases ou espaço fásico é definido como o espaço formado pelas posições generalizadas e seus momentos conjugados correspondentes. Fisicamente cada ponto do espaço fásico representa um possível estado do sistema mecânico.

comum. Foi Van Neumann quem tentou descrever esta geometria “sem ponto”, segundo ele “a noção de ponto no espaço quântico não tem sentido por causa do princípio da incerteza de Heisenberg da mecânica quântica”, isto levou a álgebra de Von Neumann e era essencialmente o nascimento da geometria não-comutativa (SZABO, 2003).

De forma análoga ao que acontece no espaço de fases da mecânica quântica, na geometria não-comutativa as coordenadas do espaço-tempo x^μ são substituídas por operadores Hermitianos \hat{x}^μ , os quais obedecem a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} . \quad (3.1)$$

Em que $\Theta^{\mu\nu}$ representa uma matriz anti-simétrica $D \times D$, sendo D a dimensão do espaço-tempo e $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1$, e tem dimensão de comprimento ao quadrado. No caso mais simples Θ é uma constante. Devido as coordenadas não comutarem, elas não podem ser diagonalizadas simultaneamente, o que implica em uma relação de incerteza proporcional a Θ . Utilizando o princípio da incerteza de Heisenberg generalizado, ou seja:

$$\Delta x^{\mu^2} \Delta x^{\nu^2} \geq \left(\frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \right)^2 , \quad (3.2)$$

encontramos,

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\Theta^{\mu\nu}| . \quad (3.3)$$

A partir dessa relação a noção de ponto não faz mais sentido, já que se localizarmos bem uma coordenada a outra se torna espalhada, perdendo assim a representação usual de um ponto através da localização de duas coordenadas. A melhor evidência que temos da teoria da não-comutatividade parte da teoria das cordas, que é o melhor candidato para a teoria quântica da gravidade. Devido as cordas terem comprimentos finitos, definidos pela escala de Planck $l_p \approx \sqrt{\frac{G\hbar}{c^2}} \approx 10^{-35}m$, não é possível observar distâncias menores do que l_p . Para altas energias, as cordas modificam o princípio da incerteza de Heisenberg (SZABO, 2003). Além disso, estudos recentes têm mostrado que o princípio da incerteza generalizado (GUP) tem se tornado cada vez mais importante nas proximidades dos horizontes de eventos dos buracos negros (SZABO, 2003; MAJUMDER, 2013).

Por causa das cordas temos uma escala intrínseca finita devido a não-comutatividade l_s , onde não é possível observar escalas menores do que esta. Baseado nas altas energias das cordas, elas modificam o princípio da incerteza de Heisenberg, possuindo a seguinte

forma:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + l_s^2 \Delta p \right) . \quad (3.4)$$

Observe que no limite de $l_s = 0$, a relação acima se torna a relação da mecânica quântica usual. Minimizando esta equação com respeito a variação do momento, um limite inferior absoluto $(\Delta x)_{min} = l_s^2$ é mensurável. Desta forma, a teoria de cordas fornece uma forma explícita da noção de achatamento do espaço-tempo descrito acima (SZABO, 2003). A relação de incerteza pode ser postulada como sendo:

$$\Delta x^i \Delta x^j = l_p^2 , \quad (3.5)$$

onde l_p é o comprimento de Planck do espaço-tempo. No limite de baixas energias $l_p \rightarrow 0$, recuperamos o espaço-tempo clássico usual com as coordenadas comutando em grandes distâncias.

3.2 Problema de Landau

O problema de Landau trata de um sistema não-relativístico de N_e elétrons interagindo e movendo-se em duas dimensões. Vamos considerar uma partícula carregada de massa m movendo-se no plano $\vec{r}_a = 1, \dots, N_e$ e na presença de um campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ constante e perpendicular ao plano em que eles se movem.

A lagrangiana para esta situação física é dada por

$$L = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{m_e}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 + e \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) - V(\vec{r}_a) \right] - \sum_{a<b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b) , \quad (3.6)$$

onde o primeiro termo é o termo de energia cinética, o segundo termo é o potencial vetor, o terceiro termo representa o potencial eletromagnético e o último termo é o potencial de interação entre as partículas. Este potencial vetor que aparece na equação acima pode ser escrito na forma $\vec{A}(\vec{r}_a) = (0, Bx_a, 0)$ devido a um calibre. Como o campo magnético é representado pelo rotacional do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}_a)$, podemos supor um calibre da seguinte maneira:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \quad e \quad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} , \quad (3.7)$$

onde f é uma função arbitrária das coordenadas (GREINER, 1989).²

Para a quantização desse sistema, vamos proceder de modo usual, ou seja, determinar o correspondente operador hamiltoniano que pode ser obtido da função lagrangiana L por

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L , \quad (3.8)$$

tomando a forma:

$$H = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{\pi_a^2}{2m_e} + V(\vec{r}_a) \right] + \sum_{a<b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b) , \quad (3.9)$$

sendo

$$\vec{\pi}_a = m_e \dot{\vec{r}}_a = \vec{p}_a - e\vec{A}(\vec{r}_a) \quad (3.10)$$

são o momento mecânico, enquanto \vec{p}_a é o momento canônico que obedece as relações de comutação usuais:

$$\begin{aligned} [x_a, p_b^x] &= [y_a, p_b^x] = i\delta^{ab} , \\ [x_a, y_b] &= [p_a^x, p_b^y] = 0 . \end{aligned} \quad (3.11)$$

A relação de comutação dos momentos mecânicos tem um comutador quântico não nulo dado por:

$$[\hat{\pi}_a^x, \hat{\pi}_b^y] = ieB\delta_{ab} , \quad (3.12)$$

onde usamos que $[\vec{p}, \vec{A}(\vec{r})] = -i\nabla A$

Assim, para um campo magnético B muito forte, o espaço dos momentos se torna não-comutativo. O operador $\hat{\pi}_a$ pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico. Na ausência de interações, $V = U = 0$, os autovalores de energia da hamiltoniana são aqueles dos níveis de Landau

$$E = \frac{eB}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

²Podemos fazer uma escolha para f de tal forma que devemos obter $\vec{A}(\vec{r}_a) = (0, Bx_a, 0)$. Além disso, mais na frente consideraremos que os potenciais serão zero, desta forma, não nos preocupamos com o potencial escalar V .

A não-comutatividade no espaço das coordenadas surge quando tomamos o limite de campo forte $B \rightarrow \infty$, ou formalmente tomamos o limite de massa pequena $m_e \rightarrow 0$. Neste limite a lagrangiana torna-se

$$L_0 = \sum_{a=1}^{N_e} [eBx_a \dot{y}_a - V(x_a, y_a)] - \sum_{a<b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b) . \quad (3.14)$$

Tomemos para cada $a = 1, \dots, N_e$, que a lagrangeana acima é da forma $p\dot{q} - h(p, q)$, e forma um par canônico (eBx_a, y_a) cuja relação de comutação é:

$$[\hat{x}_a^i, \hat{x}_b^j] = \frac{i\delta_{ab}\epsilon^{ij}}{eB} = i\delta_{ab}\Theta^{ij} , \quad (3.15)$$

em que o parâmetro da não-comutatividade é:

$$\Theta^{ij} = \frac{\epsilon^{ij}}{eB} , \quad (3.16)$$

sendo ϵ^{ij} o tensor de Levi-Civita. Note que o espaço não-comutativo segue da não-comutatividade do momento por imposição de restrições de primeira classe $\pi_a \approx 0$. O movimento de elétrons no nível mais baixo de Landau é efetivamente descrito por um plano não-comutativo (ZSABO, 2003; TEDESCO, 2010).

3.3 Produto Moyal

A primeira aparição do produto Moyal foi na mecânica quântica. Era um produto escrito como uma expansão em série de potências de \hbar e que é especialmente útil para análises semiclássicas (OSBORN e MOLZAHN, 1995). Define-se o produto Moyal entre duas funções definidas no espaço não comutativo como sendo:

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] g(x) . \quad (3.17)$$

Em que a seta acima da derivada representa a direção de atuação da derivada. Expandindo em séries para termos de primeira ordem de Θ , obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= f(x) \left[1 + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu + O(\Theta^2) \right] g(x) \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) + O(\Theta^2) . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Perceba que este produto acrescenta uma fase na multiplicação de dois operadores.

Propriedades do Produto Moyal

As relações a seguir são implicações imediatas da definição do produto Moyal.

i) Comutador entre duas coordenadas:

$$\begin{aligned}
 [x^\mu \star x^\nu] &= x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu \\
 &= x^\mu x^\nu + \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu x^\mu \partial_\nu x^\nu - x^\nu x^\mu - \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu x^\nu \partial_\nu x^\mu \\
 &= i\Theta^{\mu\nu} .
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

ii) Comutador entre as coordenadas x^μ e $f(x)$:

$$\begin{aligned}
 [x^\mu \star f(x)] &= x^\mu \star f(x) - f(x) \star x^\mu \\
 &= x^\mu f(x) + \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu x^\mu \partial_\nu f(x) - f(x) x^\mu - \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu x^\mu \\
 &= i\Theta^{\mu\nu} \partial_\nu f(x) .
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

iii) Comutador entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$:

$$\begin{aligned}
 [f(x) \star g(x)] &= f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \\
 &= f(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] g(x) - g(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] f(x) \\
 &= 2if(x) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \Theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu \right) g(x) .
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ainda podemos mostrar que o anti-comutador de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é dado por:

$$\{f(x) \star g(x)\} = 2f(x) \operatorname{cos} \left(\frac{1}{2} \Theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu \right) g(x) . \tag{3.22}$$

Vamos agora, considerar a transformada de Fourier dada por:

$$f(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} , \tag{3.23}$$

para mostrar algumas outras propriedades.

A representação de Fourier para o produto Moyal de duas funções é:

$$f(x) \star g(x) = \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} f(k) g(k') e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} . \tag{3.24}$$

Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, ou seja:

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \cdot e^{-\frac{1}{2}[A,B]} , \tag{3.25}$$

obtemos que o produto das exponenciais na integral se torna:

$$\begin{aligned} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} &= e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} \cdot e^{-\frac{1}{2}k_\mu [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] k'_\nu} \\ &= e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} \cdot e^{-\frac{i}{2}k_\mu \Theta^{\mu\nu} k'_\nu}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

desta forma obtemos:

$$f(x) \star g(x) = \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} f(k) g(k') e^{-\frac{i}{2}k_\mu \Theta^{\mu\nu} k'_\nu}. \quad (3.27)$$

Uma outra propriedade é a integração do produto Moyal. Para mostrar a propriedade a seguir, devemos levar em consideração a anti-simetria da matriz Θ e ainda que:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} = \delta(k + k'), \quad (3.28)$$

sendo assim, mostramos que:

$$\int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x f(x) g(x). \quad (3.29)$$

Ou seja, a integração do produto moyal de duas funções é igual a integração do produto natural dessas duas funções.

A seguir faremos uma revisão do estudo do buraco negro de Schwarzschild e do buraco negro BTZ não-comutativos. Caracterizaremos estes buracos através de suas propriedades termodinâmicas como temperatura, entropia e calor específico.

3.4 Métrica de Schwarzschild não-comutativa

A primeira solução para buracos negros não-comutativos foi a solução do buraco negro de Schwarzschild, obtida por por Nicolini, Smailagic e Spallucci em 2005. Em seu artigo, Nicolini *et al.* (2005) mostram que os restos finais de um buraco negro, no plano de fundo não-comutativo, formam um objeto termodinâmico estável. Além disso no regime em que $M/\sqrt{\Theta} \gg 1$, a lei da entropia/área é recuperada (fórmula de Bekenstein-Hawking), ou seja, a entropia é múltipla da área.

Devido a não-comutatividade a estrutura tipo-ponto é “esmagada” e substituída por uma estrutura “achatada” no espaço-tempo plano. Este efeito é matematicamente implementado por uma regra de substituição, ou seja, a função delta de Dirac dá lugar

a uma distribuição Gaussiana de largura mínima $\sqrt{\Theta}$ (NICOLINI et al., 2005). Desta forma a densidade de massa num campo gravitacional estático e esfericamente simétrico é:

$$\rho_{\Theta}(r) = \frac{M}{(4\pi\Theta)^{3/2}} \exp(-r^2/4\Theta) , \quad (3.30)$$

onde a massa total M é difusa na região de tamanhos linear de $\sqrt{\Theta}$. A massa envolvida em uma esfera de raio r é (WEI, LIU et al., 2001):

$$\begin{aligned} m(r) &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho_{\Theta} dr \\ &= \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) , \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) \equiv \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2} e^{-x} dx , \quad (3.32)$$

é a função gamma e Θ é o parâmetro de não-comutatividade.

A métrica do buraco negro não-comutativo Schwarzschild dada por:

$$ds^2 = -H(r)dt^2 + H(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\varphi^2 , \quad (3.33)$$

onde (veja o APÊNDICE A)

$$H(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) . \quad (3.34)$$

O raio do horizonte de evento é encontrado quando a componente g_{11} diverge, o que é análogo a fazer $H(r) = 0$. Desta forma temos:

$$\hat{r}_h = 2M \left[1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta} + O\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{M}\right) \right] , \quad (3.35)$$

note que o horizonte de eventos no caso não-comutativo, é deslocado através de um fator que depende do parâmetro Θ . No limite em que $M/\sqrt{\Theta} \rightarrow \infty$, a equação acima se reduz ao horizonte de eventos para o caso comutativo, ou seja $\hat{r}_h = 2M$.

3.4.1 Barreira de potencial para Schwarzschild não-comutativa

Com o objetivo de encontrar um potencial efetivo para o buraco negro de Schwarzschild não-comutativo e assim justificar o processo de tunelamento neste cenário, vamos

utilizar os vetores de Killing, segundo o procedimento que se encontra no livro do Carrol (2003).

Nosso problema é extremamente simplificado devido ao alto grau de simetria da métrica de Schwarzschild. Existem quatro vetores de Killing: três para a simetria esférica e uma para a translação temporal. Cada um deles nos levam a uma constante de movimento de uma partícula livre (CARROL, 2003). Considerando K_μ como sendo um vetor de Killing (o estudo detalhado dos vetores de Killing pode se encontrado no Carrol, 2003, na página 133), então temos:

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{constante} . \quad (3.36)$$

Em adição, existe outra constante de movimento devido as geodésicas:

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} . \quad (3.37)$$

É claro que para uma partícula com massa podemos escolher $\lambda = \tau$, então temos $\epsilon = 1$. Para uma partícula sem massa (nosso caso) sempre devemos ter $\epsilon = 0$. Vamos desenvolver um potencial efetivo de maneira geral e ao final particularizamos para nosso caso, ou seja, um fóton.

Antes de escrever explicitamente as expressões para as quantidades conservadas, associadas aos vetores de Killing devemos pensar um pouco no que elas podem representar. Invariância sob translações temporais nos levam a conservação da energia, enquanto invariância sob rotações espaciais levam a conservação do momento angular (CARROL, 2003). Além disso, a conservação do momento angular significa que a partícula se move no plano. Assim, podemos escolher $\Theta = \pi/2$ na métrica de Schwarzschild. Com isto, os dois vetores de Killing associados à conservação da energia e do momento angular são:

$$E = g_{00} \frac{dt}{d\lambda} , \quad (3.38)$$

$$J = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} . \quad (3.39)$$

Agora, vamos escrever a equação (3.37) em termos das componentes da métrica (3.33).

$$-H(r) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + H(r)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = -\epsilon , \quad (3.40)$$

multiplicando esta expressão por $H(r)$ e usando as expressões de E e J , obtemos:

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + H(r) \left[\frac{J^2}{r^2} + \epsilon \right] = 0 , \quad (3.41)$$

a qual podemos escrever

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2} E^2, \quad (3.42)$$

onde,

$$V_{eff}(r) = \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta} \right) \right] \left(\frac{J^2}{2r^2} + \frac{\epsilon}{2} \right), \quad (3.43)$$

para uma geodésica tipo-tempo, $\epsilon = 0$, então:

$$V_{eff}(r) = \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta} \right) \right] \left(\frac{J^2}{2r^2} \right). \quad (3.44)$$

3.5 Métrica de BTZ não-comutativa

Nesta seção vamos considerar a métrica do buraco negro não-comutativo BTZ dado por Kim (2008); Anacleto, Brito Passos (2015):

$$ds^2 = -F dt^2 + N^{-1} dr^2 + 2r^2 N^\phi dt d\phi + \left(r^2 - \frac{\Theta B}{2} \right) d\phi^2, \quad (3.45)$$

onde os componentes da métrica são:

$$F = \frac{r^2 - r_+^2 - r_-^2}{l^2} - \frac{\Theta B}{2l^2}, \quad (3.46)$$

$$N = \frac{1}{r^2 l^2} \left[(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2) - \frac{\Theta B}{2} (2r^2 - r_+^2 - r_-^2) \right], \quad (3.47)$$

$$N^\phi = -\frac{r_+ r_-}{lr^2}, \quad (3.48)$$

aqui B é a magnitude de um fluxo $U(1)$ numa teoria de Chern-Simons $U(1, 1) \times U(1, 1)$ e Θ é o parâmetro de não-comutatividade com dimensão de comprimento ao quadrado. O mapa de Seiberg-Witten é realizado até primeira ordem em Θ . Ainda, r_+ e r_- são os horizontes internos e externos, respectivamente, do buraco negro comutativo BTZ, dados por:

$$r_\pm^2 = \frac{l^2 M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right]. \quad (3.49)$$

O horizonte de eventos, do buraco negro não-comutativo, denotado por \hat{r}_\pm pode ser determinado fazendo $N^2 = 0$. Desta forma encontramos:

$$\hat{r}_\pm^2 = r_\pm^2 + \frac{\Theta B}{2} + \vartheta(\Theta^2), \quad (3.50)$$

note que o horizonte de eventos no caso não-comutativo, é deslocado através de uma constante $\Theta B/2$. No limite em que $\Theta \rightarrow 0$, a equação acima se reduz ao horizonte de eventos para o caso comutativo.

A métrica do buraco negro BTZ não-comutativo também pode ser reescrita como sendo:

$$ds^2 = -f dt^2 + Q^{-1} dr^2 + \frac{J}{r} r dr dt + \left(1 - \frac{\Theta B}{2r^2}\right) r^2 d\phi^2, \quad (3.51)$$

onde

$$f = -M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\Theta B}{2l^2}, \quad (3.52)$$

$$Q = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} - \frac{\Theta B}{2} \left(\frac{2}{l^2} - \frac{M}{r^2}\right), \quad (3.53)$$

são funções apenas da posição r .

3.5.1 Barreira de potencial para BTZ não-comutativa

Nesta seção iremos proceder de forma análoga ao que foi feito na seção 3.4 para o cálculo do potencial efetivo do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo considerando agora a métrica BTZ não-comutativa dada pela equação (3.51). Primeiramente vamos calcular os vetores de Killing associados à métrica BTZ não-comutativa. São eles:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2f}{J} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{d\phi}{d\lambda}, \\ L &= \left(\frac{f\Theta B}{J} - \frac{J}{2}\right) \frac{dt}{d\lambda} + r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde E é a energia por unidade de massa e L é o momento angular por unidade de massa. Entretanto, a constante E não pode ser interpretada como a energia da partícula no infinito, já que o campo do buraco negro não é assintoticamente plano (SADEGHI e REZA, 2015). Destas expressões acima podemos obter:

$$\frac{dt}{d\lambda} = (L - r^2 E) \left[\left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{\Theta B}{J} - \frac{J}{2} - \frac{2fr^2}{J} \right]^{-1}, \quad (3.55)$$

e

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = E - (2fL - 2fr^2 E) \left[\left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right) \Theta B - \frac{J^2}{2} - 2fr^2 \right]^{-1}. \quad (3.56)$$

Usando a equação da geodésica (3.37) obtemos:

$$\frac{dr}{d\lambda} = Q \left[-\epsilon^2 + f \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + J \left(\frac{dt}{d\lambda}\right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) - \left(r^2 - \frac{\Theta B}{2}\right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \right]. \quad (3.57)$$

Reescrevendo esta equação na forma

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = 0 , \quad (3.58)$$

podemos identificar o potencial efetivo $V(r)$ do buraco negro BTZ não-comutativo como sendo:

$$V(r) = -\frac{Q}{2} \left[-\epsilon^2 + f \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + J \left(\frac{dt}{d\lambda} \right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right) - \left(r^2 - \frac{\Theta B}{2} \right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] . \quad (3.59)$$

Para partículas sem massa devemos ter $\epsilon = 0$ na expressão acima. Além disso, para obter a expressão explícita do potencial efetivo, basta substituir as expressões de f e Q e as equações (3.55) e (3.56) na equação acima e desprezar termos da ordem de Θ^2 . Fazendo estas devidas substituições, o potencial efetivo é mostrado na figura abaixo.

Capítulo 4

Termodinâmicas de Buracos Negros Não-comutativos

O princípio da incerteza generalizado tem grande influência no estudo da fenomenologia da gravidade quântica que, aparentemente, desempenha um papel importante na estimativa das possíveis modificações da termodinâmica de buracos negros (TAWFIK e DIAB, 2014). Neste capítulo vamos analisar a termodinâmica de buracos negros não-comutativos com correções devido ao princípio da incerteza generalizado, mais especificamente serão analisados os casos de Schwarzschild e BTZ, com uma aproximação WKB, via o método de Hamilton-Jacobi. Encontramos propriedades termodinâmicas modificadas devido ao GUP e investigamos modificações quânticas para a lei da áreas da entropia de Bekeinstein-Hawking.

4.1 Buraco negro Schwarzschild não-comutativo

Iniciando nossa investigação, vamos considerar o buraco negro de Schwarzschild não-comutativo próximo ao horizonte de eventos. Assim, podemos reescrever a métrica (3.33) como sendo:

$$ds^2 = -\tilde{H}(r)dt^2 + \frac{1}{\tilde{H}(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\varphi^2, \quad (4.1)$$

onde $\tilde{H}(r) = H'(r)(r - \hat{r}_h)$, em que a linha representa a derivada da função H com respeito ao raio r , aplicada no ponto \hat{r}_h

A partir de agora utilizaremos o método de Hamilton-Jacob que consiste em: (i) partir da equação de Klein-Gordon de um campo escalar, devido a criação do par de

partículas próximo a barreira de potencial do buraco negro; (ii) devido a irregularidade do potencial, fazer uma aproximação WKB, o qual se obtém a equação de Hamilton-Jacobi para ordens mais baixas de \hbar ; (iii) propor uma separação de variáveis; (iv) calcular a probabilidade de tunelamento da partícula; e (v) comparar com o fator de Boltzmann, do ensemble canônico. Feito isto, determinamos a radiação Hawking emitida pelo buraco negro. Seguindo este método, partimos da equação de Klein-Gordon para o caso de um campo escalar ϕ dada por:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial) - \frac{m^2}{\hbar^2} \right] \Phi = 0 , \quad (4.2)$$

e aplicando a aproximação WKB

$$\Phi = \exp \left[\frac{i}{\hbar} I(t, r, x^i) \right] , \quad (4.3)$$

nós obtemos

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu I \partial_\nu I + m^2 = 0 . \quad (4.4)$$

É interessante perceber que a equação de Klein-Gordon resulta da equação de Hamilton-Jacobi relativística para ordens mais baixa de \hbar . Em termos da métrica (3.33), temos

$$-\frac{1}{\tilde{H}(r)} (\partial_t I)^2 + \tilde{H}(r) (\partial_r I)^2 + \frac{1}{r^2} (\partial_\vartheta I)^2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \vartheta} (\partial_\varphi I)^2 + m^2 = 0 , \quad (4.5)$$

desta forma podemos assumir uma solução para a equação de Klein-Gordon como uma separação de variáveis como segue

$$I = -Et + W(r) + J_\vartheta \vartheta + J_\varphi \varphi , \quad (4.6)$$

onde J_ϑ e J_φ são constantes. Substituindo a separação acima na equação (4.5) e resolvendo para $W(r)$, a parte espacial da ação clássica temos:

$$W(r) = \int_C \frac{\sqrt{E^2 - H'(\hat{r}_h)(r - \hat{r}_h) \left(\frac{J_\vartheta^2}{r^2} + \frac{J_\varphi^2}{r^2 \text{sen}^2 \vartheta} + m^2 \right)}}{H'(\hat{r}_h)(r - \hat{r}_h)} = \frac{2\pi i}{H'(\hat{r}_h)} E , \quad (4.7)$$

onde esta integral foi resolvida usando o teorema do resíduo.

Por outro lado, a probabilidade de tunelamento da partícula é dada por:

$$\Gamma = \exp [-2Im(I)] \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \exp \left[-\frac{4\pi E}{H'(\hat{r}_h)} \right] . \quad (4.8)$$

Agora, comparando a equação acima com o fator de Boltzmann, ou seja, $\exp(-E/T_H)$ podemos obter a temperatura Hawking do buraco negro Schwarzschild não-comutativo, dado por:

$$\tilde{T}_H^{(S)} = \frac{H'(\hat{r}_h)}{4\pi}. \quad (4.9)$$

Como já foi comentado no capítulo 1, a função $H'(\hat{r}_h)$ é conhecida como gravidade de superfície do buraco negro, que é a intensidade da força gravitacional no horizonte de eventos. Assim,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=\hat{r}_h} &= \frac{4M}{\hat{r}_h^2 \sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{\hat{r}_h^2}{4\Theta} \right) - \frac{M\hat{r}_h}{\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}} e^{-\hat{r}_h^2/4\Theta} \\ &= \frac{1}{\hat{r}_h} - \frac{M\hat{r}_h}{\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}} e^{-\hat{r}_h^2/4\Theta}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Agora, substituindo (3.35) na equação acima temos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=\hat{r}_h} &= \frac{1}{2M} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\Theta\pi}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right)^{-1} - \frac{2M^2}{\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\Theta\pi}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right) e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \left(1 - \frac{4M}{\sqrt{\Theta}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2M} \left(1 + \frac{2M}{\sqrt{\Theta\pi}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right) - \frac{2M^2}{\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \left(1 - \frac{4M}{\sqrt{\Theta}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Na passagem da primeira para a segunda linha desconsideramos o termo de $(e^{-M^2/\Theta})^2$ por ser desprezível. Agora, vamos desconsiderar termo de $(4M/\Theta)e^{-M^2/\Theta}$ quando comparamos com o termo de ordem zero. Desta forma encontramos:

$$\left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=\hat{r}_h} = \frac{1}{2M} \left[1 - \left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}} \right)^3 \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-M/\Theta} \right]. \quad (4.12)$$

Esta expressão foi obtida na aproximação em que $\hat{r}_h^2/4\Theta \gg 1$ devido ao fato de não termos uma expressão exata para o raio do horizonte de eventos, já que ele possui uma dependência da função gamma. Além disso, consideramos os termos de maior importância nas expansões, assim desprezamos os termos de primeira potência de $M/\sqrt{(\Theta)}$. Finalmente, substituindo esta relação em (4.9) obtemos:

$$\tilde{T}_H^{(S)} = \frac{1}{8\pi M} \left[1 - \left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}} \right)^3 \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-M^2/\Theta} + \dots \right]. \quad (4.13)$$

Considerando $T_h^{(S)} = 1/(8\pi M)$, como a temperatura do buraco negro comutativo Schwarzschild, podemos reescrever a equação acima como:

$$\tilde{T}_H^{(S)} = T_h^{(S)} - \frac{16\sqrt{\pi}M^3}{T_h^{(S)}\Theta^{3/2}} e^{-M^2/\Theta} + \dots \quad (4.14)$$

Na equação (4.13), quando $M/\sqrt{\Theta} \rightarrow \infty$, retornamos ao caso usual de Schwarzschild, apresentada no capítulo 1.

4.2 Buraco negro de Schwarzschild e o Princípio da Incerteza Generalizado

Nesta seção nós vamos considerar o GUP no formalismo de tunelamento via método Hamilton-Jacobi para encontrar correções quânticas para a temperatura Hawking, entropia, e calor específico do buraco negro Schwarzschild não-comutativo. Assim, nosso ponto de partida é o GUP (ALI, DAS e VAGENAS, 2009; TAWFIK e DIAS, 2014), que é uma extensão apresentada por Kempf, Mangano e Mann (1994), dada por:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \left[1 - \frac{\alpha l_p}{\hbar} \Delta p + \frac{\alpha^2 l_p^2}{\hbar^2} (\Delta p)^2 \right], \quad (4.15)$$

onde α é um parâmetro positivo e adimensional, $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} = M_p G/c^2 \approx 10^{-35} m$ é o comprimento de Planck, $M_p = \sqrt{\hbar c/G}$ é a massa de Planck e c é a velocidade da luz. Desde que G seja a constante de gravitação de Newton, os termos de correção na relação de incerteza (4.15) são devido aos efeitos da gravidade.

Desta forma, resolvendo a equação (4.15) para Δp e expandindo em termos de $l_p/\Delta x \ll 1$, ela pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta p \geq \frac{1}{2\Delta x} \left[1 - \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right]. \quad (4.16)$$

Como estamos escolhendo $G = c = k_B = 1$, então escolhemos, também, $\hbar = 1$ e assim devemos ter, conseqüentemente, $l_p = 1$. Neste sistema de unidades o princípio da incerteza se torna

$$\Delta x \Delta p \geq 1. \quad (4.17)$$

Agora, usando a forma saturada para o princípio da incerteza temos,

$$E \Delta x \geq 1, \quad (4.18)$$

que segue a forma saturada do princípio da incerteza de Heisenberg, $\Delta x \Delta p \geq 1$, onde E é a energia da partícula quântica. Sendo assim, podemos reescrever a equação (4.16) da seguinte forma

$$E_G = E \left[1 - \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right]. \quad (4.19)$$

Então, usando o método de Hamilton-Jacobi, a probabilidade da partícula tunelar a barreira de potencial, com energia corrigida torna-se

$$\Gamma \simeq \exp[-2\text{Im}(I)] = \exp\left[-\frac{2\pi E_G}{\kappa}\right]. \quad (4.20)$$

Mais uma vez, comparando com o fator de Boltzmann ($e^{-E/T}$), podemos obter a temperatura para o buraco negro de Schwarzschild não-comutativo

$$T_{GUP}^{(S)} = \tilde{T}_H^{(S)} \left[1 - \frac{\alpha}{2(\Delta x)} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots\right]^{-1}. \quad (4.21)$$

Levando em consideração a expressão de $\tilde{T}_H^{(S)}$ da seção anterior, equação (4.14), e $\Delta x = 2\hat{r}_h$, onde \hat{r}_h é dado pela equação (3.35), podemos obter a temperatura Hawking corrigida devido ao GUP para o buraco negro de Schwarzschild como sendo:

$$\begin{aligned} T_{GUP}^{(S)} &= \frac{1}{8\pi M} \left[1 - \left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}}\right)^3 \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-M^2/\Theta} + \dots\right] \times \\ &\left[1 + \frac{\alpha}{8M} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta}\right)^{-1} - \frac{\alpha^2}{16M^2} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta}\right)^{-2}\right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora, vamos usar a relação usual entre temperatura e entropia de buracos negros para determinar a entropia do buraco negro de Schwarzschild num plano de fundo não comutativo como segue:

$$\begin{aligned} S_{GUP}^{(S)} &= \int \frac{1}{\tilde{T}_{GUP}^{(S)}} dM \\ &= \int 8\pi M \left[1 - \left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}}\right)^3 \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-M^2/\Theta} + \dots\right]^{-1} \times \\ &\left[1 + \frac{\alpha}{8M} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta}\right)^{-1} - \frac{\alpha^2}{16M^2} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta}\right)^{-2}\right] \\ &= \int 8\pi M \left[1 + \left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}}\right)^3 \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-M^2/\Theta} + \dots\right]^{-1} \times \\ &\left[1 + \frac{\alpha}{8M} \left(1 + \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta}\right) - \frac{\alpha^2}{16M^2} \left(1 + \frac{4M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta}\right)^{-2}\right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

logo, a entropia será:

$$\begin{aligned} S_{GUP}^{(S)} &= 4\pi M^2 - \frac{16\sqrt{\pi}M^3}{\sqrt{\Theta}} e^{-M^2/\Theta} - \frac{1}{2}\pi\alpha^2 \ln(M) + \pi\alpha M \\ &- \left(1 - \frac{\alpha}{2M}\right) \frac{2\alpha\sqrt{\pi}M^2}{\sqrt{\Theta}} e^{-M^2/\Theta} + \left(\alpha + \frac{2\alpha M}{\Theta} - \frac{3M}{2} - \frac{2M^3}{\Theta}\right) \alpha e^{-2M^2/\Theta} \\ &- \frac{3}{2}\pi\alpha^2 \text{erf}\left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}}\right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde a função erro é definida como sendo:

$$\text{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} . \quad (4.25)$$

Os dois primeiros termos da entropia concordam com o caso não-comutativo puro, ou seja, $S = A/4$ (WEI et al., 2011). O terceiro termo, como era de se esperar, é uma correção em termos do logaritmo de M . Se considerarmos ainda que $S^{(S)} = 4\pi M^2$, percebemos que existe correções na forma polinomial de $S_{GUP}^{(S)}$ em termos de $S^{(S)}$. E ainda, se $\Theta = 0$ e $\alpha = 0$ devemos ter $S_{GUP}^{(S)} = S^{(S)} = 4\pi M^2$.

O calor específico a volume constante C_v para do buraco negro de Schwarzschild usual é:

$$C_v^{(S)} = 12\pi T_h^{(S)} . \quad (4.26)$$

Assim, o calor específico a volume constante corrigido devido ou GUP ocorre na mudança de $T_h^{(S)}$ por $T_{GUP}^{(S)}$ na equação acima. Logo, usando a expressão dada pela equação (4.22)

$$C_{GUP}^{(S)} = \frac{3}{2\pi M} \left[1 - \left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}} \right)^3 \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-M^2/\Theta} + \dots \right] \times \quad (4.27)$$

$$\left[1 + \frac{\alpha}{8M} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta} \right)^{-1} - \frac{\alpha^2}{16M^2} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta} \right)^{-2} \right]^{-1} .$$

Na aproximação em que $M^2/\Theta \rightarrow \infty$ e $\alpha = 0$, a expressão acima recai na forma usual para o calor específico de Schwarzschild, $C_v^{(S)} = 3/(2\pi M)$ (TAWFIK e DIAB, 2014).

4.3 Buraco negro BTZ não-comutativo

Nesta seção vamos considerar a métrica do buraco negro BTZ no plano de fundo não-comutativo dado pela equação (3.45). Queremos deixar claro que os resultados que seguem, a partir de agora, foram os resultados por nós obtidos no desenvolvimento deste trabalho.

Inicialmente, iremos considerar que o produto e a soma dos raios dos horizontes

(3.50) são dados por:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_+ \hat{r}_- &= \sqrt{r_+^2 r_-^2 + \frac{\Theta B}{2}(r_+^2 + r_-^2) + \vartheta(\Theta^2)} \\
&= \sqrt{\frac{l^2 J^2}{4} + \frac{\Theta B l^2 M}{2} + \vartheta(\Theta^2)} \\
&= \frac{lJ}{2} \left[1 + \frac{\Theta B M}{J^2} + \vartheta(\Theta^2) \right], \tag{4.28}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{r}_+ + \hat{r}_- &= \sqrt{r_+^2 + r_-^2 + \Theta B} \\
&= l^2 M + \Theta B + \vartheta(\Theta^2). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Observe que o produto e a soma dependem do parâmetro massa. Por outro lado, para $\Theta = 0$, o produto $\hat{r}_+ \hat{r}_- = lJ/2$ é independente da massa. Da mesma forma, o produto das entropias será:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_+ \tilde{S}_- &= 16\pi^2 \hat{r}_+ \hat{r}_-, \\
&= 16\pi^2 \sqrt{\frac{l^2 J^2}{4} + \frac{\Theta B l^2 M}{2} + \vartheta(\Theta^2)}, \\
&= 8\pi^2 lJ \left[1 + \frac{\Theta B M}{J^2} \right] + \vartheta(\Theta^2). \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Note que, para primeira ordem em Θ , o produto das entropias do buraco negro BTZ não-comutativo é dependente da massa. Por outro lado, para o cada de $\Theta = 0$, o resultado independe da massa (ARADHAN, 2015). Conjectura-se que o produto das áreas de buracos negros com múltiplos horizontes são estacionários, em alguns casos, e independentes da massa do buraco (ANSORG e HENNING, 2009). No entanto, existem estudos na literatura onde o produto das áreas é dependente da massa (VISSER, 2013). Por exemplo, tem sido mostrado que para o buraco negro Schwarzschild-de Sitter em (3+1)-dimensões, o produto das áreas dos horizontes de eventos e dos horizontes cosmológicos não dependem da massa. Recentemente, mostrou-se para o buraco negro acústico que os aspectos universais do produto de áreas dependem somente de quantidades quantizadas como análogo de carga elétrica conservada e o momento angular (ANACLETO, BRITO e PASSOS, 2013).

Segundo Hawking, 1976, se considerarmos um buraco negro cercado pela radiação de um corpo negro à mesma temperatura do buraco negro, para que haja equilíbrio térmico, o buraco negro não deve rotacionar e ter carga elétrica neutra, caso contrario

ele emitiria partículas com mesmo sinal do momento angular e da carga. Desta forma, a partir de agora, iremos considerar o caso em que $J = 0$ na métrica (3.51). Assim, próximo do horizonte de eventos do buraco negro não comutativo BTZ, podemos reescrever esta métrica como sendo,

$$ds^2 = -\tilde{f}dt^2 + \tilde{Q}^{-1}dr^2 + \left(1 - \frac{\Theta B}{2r^2}\right)r^2d\phi^2, \quad (4.31)$$

onde $\tilde{f} = f'(\hat{r}_+)(r - \hat{r}_+)$ e $\tilde{Q} = Q'(\hat{r}_+)(r - \hat{r}_+)$, em que a linha representa a derivada da função f com respeito ao raio r , aplicada no ponto \hat{r}_+ .

Vamos considerar, agora, o método de Hamilton-Jacob para determinar a temperatura Hawking. Sendo a equação de Klein-Gordon para o caso de um campo escalar ϕ dada por:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial) - \frac{M^2}{\hbar^2}\right]\Phi = 0, \quad (4.32)$$

e aplicando a aproximação WKB

$$\Phi = \exp\left[\frac{i}{\hbar}I(t, r, x^i)\right], \quad (4.33)$$

nós obtemos

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu I\partial_\nu I + M^2 = 0, \quad (4.34)$$

que em termos da métrica (4.31), temos

$$-\frac{1}{\tilde{f}}(\partial_t I)^2 + \tilde{Q}(\partial_r I)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\phi I)^2 + M^2 = 0 \quad (4.35)$$

desta forma, podemos assumir uma solução para a equação de Klein-Gordon como uma separação de variáveis como segue

$$I = -Et + W(r) + J_\phi\phi, \quad (4.36)$$

onde J_ϕ é uma constante. Substituindo a equação (4.36) na equação (4.35) e resolvendo para $W(r)$, a parte espacial da ação clássica obtemos:

$$W(r) = \int_C \frac{\sqrt{E^2 - f'(\hat{r}_+)(r - \hat{r}_+) \left(\frac{2J_\phi^2}{2r^2 - \Theta B} + M^2\right)}}{\sqrt{f'(\hat{r}_+)Q'(\hat{r}_+)(r - \hat{r}_+)}} = \frac{2\pi i}{\kappa}E, \quad (4.37)$$

em que usamos o teorema do resíduo para resolver esta integral e κ representa a gravidade superficial do buraco negro BTZ não-comutativo dada por:

$$\kappa = \sqrt{f'(\hat{r}_+)Q'(\hat{r}_+)} = \sqrt{\frac{4\hat{r}_+^2}{l^4} - \frac{2\Theta BM}{l^2\hat{r}_+^2}}. \quad (4.38)$$

Por outro lado, a probabilidade da partícula atravessa a barreira de potencial é dada por:

$$\Gamma = \exp[-2\text{Im}(I)] \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \exp\left(-\frac{4\pi E}{\kappa}\right). \quad (4.39)$$

Agora, comparando a equação acima com o fator de Boltzmann $\exp(-E/T_H)$ podemos obter a temperatura Hawking do buraco negro BTZ num plano de fundo não-comutativo.

$$\tilde{T}_H = \frac{\kappa}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{4\hat{r}_+^2}{l^4} - \frac{2\Theta BM}{l^2\hat{r}_+^2}} = \frac{\hat{r}_+}{2\pi l^2} \left(1 - \frac{\Theta B r_+^2}{4\hat{r}_+^4}\right) + \dots, \quad (4.40)$$

que em termos de $r_+ = \sqrt{l^2 M}$, temos

$$\tilde{T}_H = \frac{r_+}{2\pi l^2} \left(1 - \frac{\Theta^2 B^2}{16r_+^4}\right) + \dots = T_h - \frac{\Theta^2 B^2}{256\pi^4 l^8 T_h^3} + \dots, \quad (4.41)$$

onde, $T_h = r_+/(2\pi l^2)$ é a temperatura Hawking do buraco negro BTZ. O resultado acima mostra que a correção não comutativa para a temperatura Hawking ocorre somente para termos de segunda ordem no parâmetro θ .

4.4 Buraco negro BTZ e o Princípio da Incerteza Generalizado

A mesma relação que utilizamos para calcular a temperatura corrigida devido ao princípio da incerteza generalizado para Schwarzschild, é válida para o buraco negro BTZ. Entretanto, neste momento, é interessante fazer alguns comentários sobre a relação do GUP em $(2+1)$ -dimensões, levando em conta o buraco negro BTZ. Vamos mais uma vez considerar o GUP, dado por:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \left[1 - \frac{\alpha l_p}{\hbar} \Delta p + \frac{\alpha^2 l_p^2}{\hbar^2} (\Delta p)^2 \right]. \quad (4.42)$$

Apesar desta fórmula ser escrita no espaço-tempo de quatro dimensões, ela pode ser trabalhada em $(2+1)$ -dimensões sob certa suposição - veja a seguir. Vamos calcular a incerteza total da posição (MAGGIORE, 1993) considerando o buraco negro BTZ, isto é,

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \simeq \frac{\lambda}{\text{sen}\phi} + \frac{l}{2} \frac{8G_3 \Delta M}{\sqrt{8G_3 M}} \geq \lambda + \frac{4lG_3}{\sqrt{8G_3 M}} \frac{1}{\lambda}. \quad (4.43)$$

Aqui, Δx_1 é a incerteza usual na posição de Heisenberg e $\Delta x_2 = r_+(M + \Delta M) - r_+(M)$ é a incerteza adicional devido ao buraco negro BTZ, para $J = 0$ e $\Delta M \ll M$. Isto implica que o GUP quadrático é:

$$\Delta x \Delta p \geq 1 + \alpha^2 l_p (\Delta p)^2, \quad \alpha^2 = \frac{4}{\sqrt{8G_3 M}}, \quad \Delta p \sim \frac{1}{\lambda}, \quad (4.44)$$

onde reinteegramos a constante de Newton em $(2+1)$ -dimensões $G_3 \propto l_p$. Contudo, por conveniência, fazemos $l_p = 1$ ou $ll_p = 1$ que torna a parte quadrática do formalismo do GUP o mesmo. Além disso, a parte quadrática do GUP é naturalmente consistente com a geometria não comutativa do espaço das posições. Em adição, a parte não linear de (4.42) é também consistente com a não-comutatividade do espaço tempo (BASTOS *et al.*, 2011) e com teorias de relatividade duplamente especial (DSR). Os cálculos seguintes seguem de forma semelhante ao que foi feito na seção de Schwarzschild e o GUP, ou seja, podemos obter correções do tipo:

$$T_{GUP} = \tilde{T}_H \left[1 - \frac{\alpha}{2(\Delta x)} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right]^{-1}. \quad (4.45)$$

Desta forma, considerando o \tilde{T}_H do buraco negro BTZ e a relação $\Delta x = 2\hat{r}_+$, podemos obter correções para a temperatura deste buraco.

$$\begin{aligned} T_{GUP} &= \frac{\hat{r}_+}{2\pi l^2} \left(1 - \frac{\Theta B r_+^2}{4\hat{r}_+^4} + \dots \right) \left[1 - \frac{\alpha}{4\hat{r}_+} + \frac{\alpha^2}{8\hat{r}_+^2} + \dots \right]^{-1} \\ &= \frac{\hat{r}_+}{2\pi l^2} \left(1 - \frac{\Theta B r_+^2}{4\hat{r}_+^4} + \dots \right) \left[1 + \frac{\alpha}{4\hat{r}_+} - \frac{\alpha^2}{8\hat{r}_+^2} + \dots \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

que em termos de $r_+ = l\sqrt{M}$ (já que estamos considerando $J = 0$) temos,

$$T_{GUP} = \frac{r_+}{2\pi l^2} \left(1 - \frac{\Theta^2 B^2}{16r_+^4} + \dots \right) \left[1 + \frac{\alpha}{4r_+} \left(1 - \frac{\Theta B}{4r_+^2} + \dots \right) - \frac{\alpha^2}{8r_+^2} \left(1 - \frac{\Theta B}{2r_+^2} + \dots \right) + \dots \right] \quad (4.47)$$

Ou em termos da temperatura $T_h = r_+/(2\pi l^2)$ do buraco negro BTZ, obtemos

$$T_{GUP} = T_h - \frac{\Theta^2 B^2}{256\pi^4 l^8 T_h^3} + \frac{\alpha}{8\pi l^2} - \frac{\alpha \Theta B}{128\pi^3 l^6 T_h^2} - \frac{\alpha^2}{32\pi^2 l^4 T_h} + \frac{\alpha^2 \Theta B}{256\pi^4 l^8 T_h^3} + \dots, \quad (4.48)$$

é interessante perceber que o terceiro termo da equação acima não depende do raio do horizonte de eventos.

A seguir, iremos analisar as correções quânticas devido ao princípio da incerteza generalizado para a entropia, a densidade de energia e para o calor específico. Agora, vamos usar a relação usual entre temperatura e entropia de buracos negros para determinar

a entropia do buraco negro BTZ em um plano de fundo não-comutativo.

$$\begin{aligned}
S_{GUP} &= \int \frac{dM}{T_{GUP}} \\
&= 4\pi l\sqrt{M} - \frac{\pi\Theta^2 B^2}{12l^3 M^{3/2}} - \pi\alpha \ln(l\sqrt{M}) - \frac{1}{8} \frac{\pi\alpha\Theta B}{l^2 M} - \frac{1}{2} \frac{\pi\alpha^2}{l\sqrt{M}} + \frac{1}{12} \frac{\pi\alpha^2\Theta B}{l^3 M^{3/2}} + \dots \\
&= 4\pi r_+ - \frac{\pi\Theta^2 B^2}{12r_+^3} - \pi\alpha \ln(r_+) - \frac{1}{8} \frac{\pi\alpha\Theta B}{r_+^2} - \frac{1}{2} \frac{\pi\alpha^2}{r_+} + \frac{1}{12} \frac{\pi\alpha^2\Theta B}{r_+^3} + \dots, \quad (4.49)
\end{aligned}$$

e em termos da entropia $S = 4\pi r_+ = 4\pi l\sqrt{M}$ temos:

$$S_{GUP} = S - \frac{16\pi^4\Theta^2 B^2}{3S^2} - \pi\alpha \ln(S) - \frac{2\pi^3\alpha\Theta B}{S^2} - \frac{2\pi^2\alpha^2}{S} + \frac{16}{3} \frac{\pi^4\alpha^2\Theta B}{S^3} + \dots. \quad (4.50)$$

Encontramos correções para a entropia através do formalismo de tunelamento usando o método de Hamilton-Jacobi devido aos efeitos do princípio da incerteza generalizado. Note que da equação acima para $\alpha = 0$, encontramos que as correções para a entropia ocorrem somente para termos de segunda ordem do parâmetro Θ . Além disso, encontramos correções logarítmicas para a entropia do buraco negro BTZ.

Continuando nosso estudo das propriedades termodinâmicas, vamos agora calcular as correções para a densidade de energia como segue:

$$\rho_{GUP} = -\frac{3}{l^2} \int S'(A) A^{-2} dA, \quad (4.51)$$

onde, $S'(A) = \frac{dS}{dA}$. Assim,

$$\rho_{GUP} = \frac{3}{l^2 A} - \frac{3}{2l^2} \frac{\alpha\pi}{A^2} + \frac{2}{l^2} \frac{\pi^2\alpha^2}{A^3} + \frac{3\alpha\Theta B\pi^3}{l^2 A^4} + \frac{48}{5l^2} \frac{\Theta^2 B^2\pi^4}{A^5} - \frac{48}{5l^2} \frac{\alpha^2\Theta B\pi^4}{A^5}, \quad (4.52)$$

e considerando que $\rho = 3/(l^2 A)$ temos,

$$\begin{aligned}
\rho_{GUP} &= \rho - \frac{1}{6} \pi\alpha l^2 \rho^2 + \frac{2}{27} \pi^2 \alpha^2 l^4 \rho^3 + \frac{1}{27} \pi^3 \alpha \Theta B l^6 \rho^4 \\
&+ \frac{16}{405} \pi^4 \Theta^2 B^2 l^8 \rho^5 - \frac{16}{405} \pi^4 \alpha^2 \Theta B l^8 \rho^5. \quad (4.53)
\end{aligned}$$

O calor específico a volume constante é:

$$C_v = T_h \left(\frac{\partial S}{\partial T_h} \right)_v = 8\pi^2 l^2 T_h = 4\pi r_+, \quad (4.54)$$

e as correções quânticas para o calor específico são encontradas na substituição de T_h por T_{GUP} :

$$\begin{aligned}
C_{vGUP} &= 8\pi^2 l^2 T_{GUP} \\
&= 8\pi^2 l^2 \left[\frac{r_+}{2\pi l^2} - \frac{\Theta^2 B^2}{32\pi l^2 r_+^3} + \frac{\alpha}{8\pi l^2} - \frac{\alpha\Theta B}{32\pi l^2 r_+^2} - \frac{\alpha^2}{16\pi l^2 r_+} + \frac{\alpha^2\Theta B}{32\pi l^2 r_+^3} + \dots \right], \quad (4.55)
\end{aligned}$$

em termos de T_h e C_v obtemos:

$$\begin{aligned}
C_{vGUP} &= 8\pi^2 l^2 \left[T_h - \frac{\Theta^2 B^2}{256\pi^4 l^8 T_h^3} + \frac{\alpha}{8\pi l^2} - \frac{\alpha\Theta B}{128\pi^3 l^6 T_h^2} - \frac{\alpha^2}{32\pi^2 l^4 T_h} + \frac{\alpha^2\Theta B}{256\pi^4 l^8 T_h^3} + \dots \right] \\
&= C_v - \frac{2\pi^4 \Theta^2 B^2}{C_v^3} + \pi\alpha - \frac{\pi^3 \alpha \Theta B}{C_v^2} - \frac{\pi^2 \alpha^2}{C_v} + \frac{2\pi^4 \alpha^2 \Theta B}{C_v^3} + \dots \quad (4.56)
\end{aligned}$$

O esboço para o calor específico a volume constante é mostrado nas figuras 4.1 e 4.2 a seguir. Na Figura 4.1, o gráfico mostra que o C_{vGUP} é positivo, indicando que o buraco negro BTZ não-comutativo num plano de fundo não-comutativo é estável. Na Figura 4.2 analisamos o caso em que $\Theta B = \alpha$ (ou em até primeira ordem de α com $\Theta B \neq \alpha$) em que o gráfico mostra que C_{vGUP} desaparece em horizonte de eventos crítico $r_\Theta = \sqrt{\Theta B}/2$, e fica negativo para $r_+ < r_\Theta$ (uma região não-física). Por outro lado, para $r_+ > r_\Theta$, C_{vGUP} é positivo, então para esta região do buraco negro BTZ no plano de fundo não-comutativo é estável. Portanto, nossos resultados são semelhantes àqueles encontrados por Rahaman (2013).

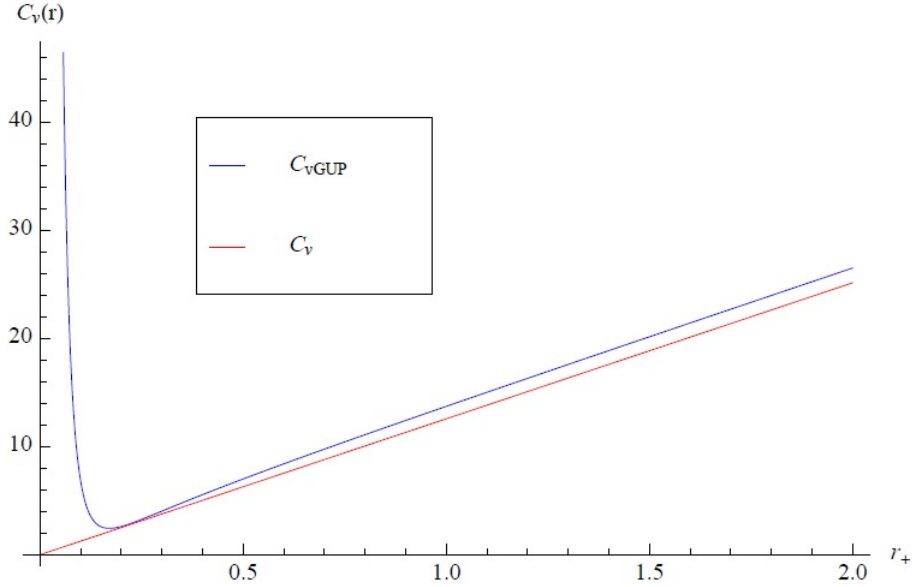


Figura 4.1: Calor específico. Plot C_{vGUP} vs. r_+ . Para $\alpha = 0.5$ e $\Theta B = 0.1$. C_v é o calor específico para $\Theta B = \alpha = 0$

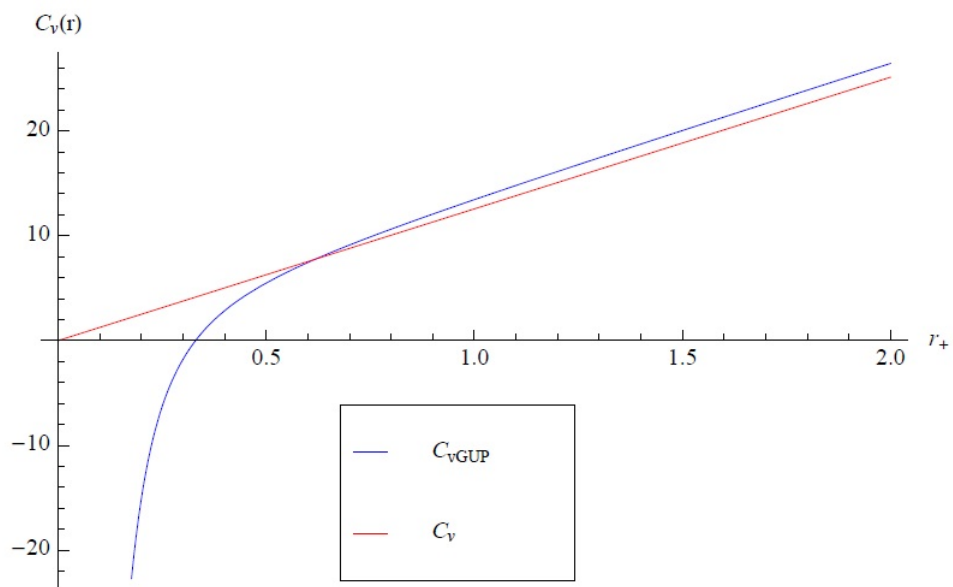


Figura 4.2: Calor específico. Plot C_{vGUP} vs. r_+ . Para $\Theta B = \alpha = 0.5$

Capítulo 5

Conclusões

Para o desenvolvimento deste trabalho, consideramos as idéias propostas por Hawking, 1976, sobre radiação emitida por buracos negros. Em seus estudos, ele mostra que algumas propriedades dos buracos negros como a área do horizonte de eventos, a massa, e a gravidade superficial têm correspondências diretas com propriedades termodinâmicas como a entropia, a energia e a temperatura, respectivamente. No decorrer de nossa investigação, analisamos correções quânticas para estas propriedades termodinâmicas de buracos negros num plano de fundo não-comutativo. Com isto, encontramos modificações devido a não-comutatividade do espaço-tempo e devido ao princípio da incerteza generalizado (GUP), que tem tido grande influência do estudo da gravitação quântica.

Para encontrar as correções na temperatura, entropia e calor específico utilizamos o método de Hamilton-Jacobi que consiste em partir da equação de Klein-Gordon para um campo escalar (4.2), escrever este campo como uma aproximação WKB (4.3), de forma a recairmos na equação de Hamilton-Jacobi relativística (4.4) para ordens mais baixas de \hbar , propor uma separação de variáveis do tipo (4.6) e (4.36), comparar a probabilidade de tunelamento da partícula com a função de partição e com isto encontrar uma forma de calcular a temperatura Hawking. Sabendo a temperatura, podemos encontrar a entropia e o calor específico do buraco negro.

Inicialmente, consideramos a métrica de Schwarzschild não-comutativa, dada pela equação (3.33), discutimos que, devido a não-comutatividade do espaço-tempo, a delta de Dirac passa a se tornar uma distribuição gaussiana de largura mínima $\sqrt{\Theta}$. Desta forma, a massa total parece ser espalhada, e não concentrada num ponto. Mostramos que próximo ao horizonte de eventos a temperatura é corrigida por um fator que depende do parâmetro

Θ . Neste caso, tivemos que considerar $\hat{r}_h^2/4\Theta \gg 1$, porque não tínhamos uma expressão exata para o raio de Schwarzschild não-comutativo. Na seção 4.2, investigamos correções para a temperatura, entropia e calor específico devido ao GUP para este buraco negro. Para a entropia, concluímos que os dois primeiros termos da equação (4.24) concordam com o caso dela ser calculada pela fórmula de Bekeinstein-Hawking (WEI et al., 2011), além disso, encontramos correções devido ao GUP com o logaritmo da massa M .

Nossas contribuições vêm na seção 4.4, na qual consideramos a métrica BTZ não-comutativa próximo ao horizonte de eventos (4.31) e estudamos, mais uma vez, as propriedades termodinâmicas para este buraco negro. Encontramos uma expressão da temperatura, corrigida devido a não-comutatividade, equação (4.41), a qual apresenta modificações, apenas, em termos de segunda ordem no parâmetro Θ , ou seja, são correções muito pequenas. Na seção 4.5, relacionamos esta temperatura com o GUP e encontramos, mais uma vez, além de correções devido a não-comutatividade, correções devido ao GUP. Para a temperatura (4.48), existe um fator de correção que independe do raio do horizonte de eventos do buraco negro. Para entropia (4.50), quando o parâmetro $\alpha = 0$, encontramos correções que ocorrem somente para termos de segunda ordem de Θ e ainda, encontramos, também, correções logarítmicas. Para a expressão do calor específico a volume constante (4.56), plotamos um gráfico no qual percebemos que o buraco negro BTZ não-comutativo é estável, concordando com os resultados encontrados por Rahaman (2013).

Apêndice A

Demonstração da métrica de Schwarzschild não-comutativo

Podemos introduzir na origem de coordenadas uma distribuição de matéria esfericamente simétrica de forma que a métrica acima possa ser escrita como:

$$ds^2 = a(r, t)dt^2 + b(r, t)dr^2 + 2c(r, t)dtdr + d(r, t)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) , \quad (\text{A.1})$$

onde $a(r, t)$, $b(r, t)$, $c(r, t)$ e $d(r, t)$ são funções arbitrárias da posição e do tempo.

Como as equações de campo de Einstein são invariantes por transformações de coordenadas, vamos escolher um sistema que simplifique nosso problema, em outras palavras, vamos diagonalizar a métrica para tornar o elemento de linha mais simples. Assim sendo, vamos considerar $r' = r'(r, t)$ e $t' = t'(r, t)$ e sendo $p = p(r, t')$ de modo que:

$$p(r, t')dt' = p(r, t') \left[\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 dr^2 + 2 \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) drdt + \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 dt^2 \right] . \quad (\text{A.2})$$

Escolhemos a função $p(r, t')$ de modo que satisfaça as seguintes equações (Carroll):

$$p(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 = a(r, t) , \quad (\text{A.3})$$

e

$$p(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) = c(r, t) , \quad (\text{A.4})$$

se dividirmos (A.3) por (A.4), então podemos ver que t' deve ser solução da seguinte equação diferencial:

$$a(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) - c(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) = 0 . \quad (\text{A.5})$$

Então, substituindo (A.3) e (A.4) em (A.2)

$$p(r, t') dt'^2 - p(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2 dr^2 = a(r, t) dt^2 + 2c(r, t) dr dt, \quad (\text{A.6})$$

substituindo este resultado na equação (A.1) e retirando a linha, encontramos:

$$ds^2 = p(r, t) dt^2 + q(r, t) dr^2 + d(r, t) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\phi^2). \quad (\text{A.7})$$

Sendo a métrica Lorentziana e escolhendo $d(r, t) = r^2$, devemos ter $p(r, t)$ negativo e $q(r, t)$ positivo. A última condição implica que o vetor raio é definido agora tal que um caminho da circunferência de um círculo, que tem como centro a origem de coordenadas, é igual a $2\pi r$. Isto é suficiente para expressar as funções $p(r, t)$ e $q(r, t)$ em forma de exponenciais, e^ν e $e^{-\lambda}$ onde ν e λ são funções das novas coordenadas r' e t' (Carmeli), assim temos:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\phi^2). \quad (\text{A.8})$$

Vamos denotar as coordenadas t , r , θ e φ por, x^0 , x^1 , x^2 e x^3 , respectivamente. Desta forma, escrevemos o tensor métrico da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^\nu, e^\lambda, r^2, r^2 \text{sen}^2\theta), \quad (\text{A.9})$$

onde a expressão acima representa uma matriz diagonal representado pelos elementos apresentados. E ainda, pela métrica ser diagonal, podemos escrever $g^{\mu\nu}$ da seguinte maneira:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{-\nu}, e^{-\lambda}, r^{-2}, r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta). \quad (\text{A.10})$$

Para encontrar as equações diferenciais como funções de ν e λ que satisfaçam as equações de Einstein, devemos primeiro calcular os símbolos de Christoffel associado a métrica (A.10). Lembrando que:

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left[\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} \right], \quad (\text{A.11})$$

então,

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{\nu}}{2}, \quad \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda},$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \text{sen}^2(\theta) e^{-\lambda}, \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta), \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \text{cotg}(\theta).$$

onde o ponto representa a derivada da função com respeito ao tempo e a linha representa a derivada da função com respeito a coordenada r .

A partir destes símbolos, calculamos os componentes do tensor de Ricci e do tensor de Einstein: $G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R$. Sendo assim obtemos:

$$G_0^0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0, \quad (\text{A.13})$$

$$G_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \dot{\lambda} = 8\pi T_0^1, \quad (\text{A.14})$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1, \quad (\text{A.15})$$

$$G_2^2 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} \right) = 8\pi T_2^2, \quad (\text{A.16})$$

$$G_3^3 = G_2^2 = 8\pi T_3^3. \quad (\text{A.17})$$

O tensor energia-momento não é nulo fora da fonte do campo gravitacional neste caso, diferente do caso usual, então:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1, \quad (\text{A.18})$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0, \quad (\text{A.19})$$

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (\text{A.20})$$

subtraindo (A.19) de (A.18), obtemos:

$$\nu' + \lambda' = T_0^0 - T_1^1. \quad (\text{A.21})$$

Para manter a forma da métrica de Schwarzschild usual precisamos impor que $T_0^0 = T_1^1$.

Fazendo isto temos:

$$\nu' + \lambda' = 0. \quad (\text{A.22})$$

e conseqüentemente,

$$\nu + \lambda = f(x^0) . \quad (\text{A.23})$$

Por outro lado, se escolhermos o intervalo ds^2 sob a forma (A.8), temos a possibilidade de fazer uma transformação arbitrária do tempo da forma $x^0 = h(x'^0)$ sem que a forma do elemento de linha seja alterada, além disso, essa transformação permite somar a função ν uma função arbitrária do tempo, que permite sempre anular $f(t)$ em (A.23). Assim, para a transformação de coordenadas, devemos ter $f = 0$, de forma que $\nu = -\lambda$. Conseqüentemente, vemos que tanto λ quanto ν são funções independentes de t , o que quer dizer que para um campo gravitacional esfericamente simétrico no vácuo é automaticamente estático (CARMELLI). Observe ainda que a dependência temporal da métrica pode ser eliminada por meio de uma transformação de coordenadas apropriada (*Teorema de Birkhoff*)

Considerando o tensor energia-momento do buraco negro de Schwarzschild no plano de fundo não-comutativo como sendo

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag} \left(-\rho_{\Theta}, -\rho_{\Theta}, -\rho_{\Theta} - \frac{1}{2}r\partial_r\rho_{\Theta}, -\rho_{\Theta} - \frac{1}{2}r\partial_r\rho_{\Theta} \right) , \quad (\text{A.24})$$

(e mais na frente veremos porque ele possui esta forma) podemos manipular a equação (A.19) como segue.

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho_{\Theta} &\Rightarrow \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - re^{-\lambda}\lambda') - \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho_{\Theta} \Rightarrow \\ \frac{d}{dr} (re^{-\lambda}) - 1 = -8\pi\rho_{\Theta}r^2 &\Rightarrow re^{-\lambda} - r = -2 \int_0^r 4\pi r^2 \rho_{\Theta} dr \Rightarrow \\ e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} , &\end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

onde

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_{\Theta} dr . \quad (\text{A.26})$$

Como visto no capítulo da não-comutatividade, as coordenadas passam a não comutarem para escalas da ordem de l_p e com isso a noção de ponto não faz mais sentido, modificando esta estrutura no espaço-tempo não-comutativo numa estrutura difusa, a chamada célula de Plank. Desta forma, a posição descrita pela delta de Dirac passa a ser representada por uma distribuição Gaussiana de comprimento mínimo $\sqrt{\Theta}$, dada por:

$$\rho_{\Theta} = \frac{M}{(4\pi\Theta)^{3/2}} \exp(-r^2/4\Theta) . \quad (\text{A.27})$$

Redefinindo uma nova variável $x = r^2/4\Theta$ e usando a condição acima podemos reorganizar a equação (A.26) de modo que:

$$m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2} e^{-x} dx \Rightarrow m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right), \quad (\text{A.28})$$

onde,

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) \equiv \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2} e^{-x} dx, \quad (\text{A.29})$$

é a função gamma incompleta. Finalmente, a métrica de Schwarzschild não-comutativa pode ser escrita como sendo:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) \right] dt^2 + \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) \right]^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (\text{A.30})$$

Para encontrar esta solução levamos em consideração o tensor energia-momento dado pela equação (A.24). Entretanto, para encontra-lo devemos considerar que $\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$, devido a conservação da energia, o que implica em

$$\partial_\nu T_\mu^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T_\mu^\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_r T_r^r - \Gamma_{01}^0 (T_0^0 - T_1^1) - \Gamma_{21}^2 (T_2^2 - T_1^1) - \Gamma_{31}^3 (T_3^3 - T_1^1) = 0. \quad (\text{A.31})$$

Os únicos símbolos de Christoffel diferentes de zero são:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00}, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} \quad \text{e} \quad \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi}, \quad (\text{A.32})$$

e levando em consideração que devido a simetria esférica $T_2^2 = T_3^3$ assim,

$$\partial_r T_r^r - \frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T_r^r - T_0^0) + g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (T_r^r - T_\theta^\theta) = 0. \quad (\text{A.33})$$

Afim de preservar a propriedade tipo Schwarzschild: $g_{00} = -1/g_{11}$, então precisamos que $T_0^0 = T_r^r = -\rho_\Theta$ (NICOLINI et al, 2005). Desta forma podemos obter:

$$T_\theta^\theta = -\rho_\Theta - \frac{2}{r} \partial_r \rho_\Theta. \quad (\text{A.34})$$

Referências Bibliográficas

- ALI, A. F.; DAS, S.; VAGENAS, E. C. Discreteness of Space from the Generalized Uncertainty Principle. **Physics Letters B**, v. 678, p. 497-499, jul. 2009.
- ANACLETO et al. Quantum-Corrected Finite Entropy of Noncommutative Acoustic Black Holes. **Annals of Physics**, v. 362, p. 436-448, nov. 2015.
- ANACLETO et al. **Quantum Correction to the Entropy of Noncommutative BTZ Black Hole**. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1510.08444.pdf>>. Artigo submetido ao Physical Letter B.
- ANACLETO et al. The Entropy of the Noncommutative Acoustic Black Hole Based on Generalized Uncertainty Principle. **Physics Letters B**, v. 737, p. 6-11, out. 2014.
- ANACLETO, M. A., BRITO, F. A.; PASSOS, E. **Acoustic Black Holes and Universal Aspects of Area Products**, 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1309.1486.pdf>>.
- ANACLETO, M. A.; BRITO, F., A.; PASSOS, E. Gravitational Aharonov-Bohm Effect Due to Noncommutative BTZ Black Hole. **Physics Letters B**, v. 743, p. 184-188, 2015.
- ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Quantum-Corrected Self-Dual Black Hole Entropy in Tunneling Formalism with GUP. **Physics Letters B**, v. 749, p. 181-186, out. 2015.
- ANSORG, M.; HENNING, J. The Inner Cauchy Horizon of Axisymmetric and Stationary Black Holes with Surrounding Matter in Einstein-Maxwell Theory. **Physical Review Letters**, v. 102, jun. 2009.
- BAÑADOS, M. et al. Geometry of the $(2 + 1)$ Black Hole, **Physical Review D**, v. 48, ago. 1993.
- BANADOS, M et al. Three-dimensional Noncommutative Gravity. **Physical Review**

D, v. 64, set. 2001.

BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C; ZANELLI, J. The Black Hole in Three-dimensional Space-time, **Physical Review Letters**, v. 69, set. 1992.

BANERJEE, R.; MAJHI, B. R. Quantum Tunneling and Back Reaction. **Physics Letters B**, v. 662, p. 62-65, abr. 2008.

BASTOS, C. et al. Non-Canonical Phase-Space Noncommutativity and the Kantowski-Sachs singularity for Black Holes . **Physical Review D**, v. 84, 2011.

BERGMANN, Peter Gabriel. **Introdução a Teoria da Relatividade**. New York: Dover Publicações, 1975.

BRUSTEIN, R.; KUPFERMAN, J. Black Hole Entropy Divergence and the Uncertainty Principle. **Physical Review D**, v. 83, jun. 2011.

CARLIP, S. Logarithmic Corrections to Black Hole Entropy from the Cardy Formula. **Class.Quant.Grav.** **17**, 2000.

CARMELI, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

CARROLL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity**. Santa Bárbara: University of California, 1997.

CRAWFORD, P. **O Significado da Relatividade no Final do Século**. Colóquio Ciência, v. 16, p. 3-26, 1995.

CRUZ, N.; MARTÍNEZ, C.; PEÑA, L. Geodesic Structure of the (2+1) Black Hole. **Classical and Quantum Gravity**, v. 11, nov. 1994.

DAMASIO, F; PACHECO, S. M. V. Buracos nem tão Negros Assim. **Física na Escola**, Santa Catarina, v. 10, n. 1, 2009.

DIAS, O. J. C. **Black hole solutions and pair creation of black holes in three, four and higher dimensional spacetimes**, 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/hep-th/0410294.pdf>>.

D'INVERNO, R. A., **Introducing Einstein's Relativity**. New York, 1992.

- EUNE, M.; KIM, W.; YI, S.-H. Hawking-Page Phase Transition in BTZ Black Hole Revisited. **Journal of High Energy Physics**, v. 1303, mar. 2013.
- FAIZAL, M.; KHALIL, M. M. GUP-Corrected Thermodynamics for all Black Objects and the Existence of Remnants. **International Journal of Modern Physics A**, v. 30, ed. 22, ago. 2015.
- FERRARO, Rafael. **Einstein's Space-time: An introduction to Special and General Relativity**. Buenos Aires: Springer, 2007.
- FROLOV, A. V.; KRISTJÁNSSON, K. R.; THORLACIOUS, L. Semi-classical Geometry of Charged Black Holes. **Physical Review D**, v. 72, jul. 2005.
- FROLOV, V. P.; NOVIKOV, I. Dynamical Origin of the Entropy of a Black Hole. **Physical Review D**, v. 48, nov. 1993.
- GIBBSON, G. W.; HAWKING, S. W. Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation. **Physical Review D**, v. 15, n. 10, mai. 1977.
- GIDDINGS, S.; ABBOTT, J.; KUCHAR, K. Einstein's Theory in a Three-Dimensional Space-Time. **General Relativity and Gravitation**, vol. 16, 1984.
- GOTT, J. R.; ALPERT, M. General Relativity in a $(2 + 1)$ -Dimensional Space-Time. **General Relativity and Gravitation**, vol. 16, 1984.
- GREINER, W. **Quantum Mechanics an Introduction**. Nova York: Springer, p. 205-216, 1989.
- HAWKING, S. W. The Quantum Mechanics of Black Holes. **Scientific American**, v. 236, p. 34-41, 1976.
- HAWKING, S. W. Black Holes and Thermodynamics. **Physical Review D**, v. 13, jan. 1976.
- HENDI, S. H.; PANAHIYAN, S.; MAMASANI, R. Thermodynamic Stability of Charged BTZ Black Holes: Ensemble Dependency Problem and its Solution . **General Relativity and Gravitation**, v. 47, jul. 2015.
- KAUL, R. K.; MAJUMBAR, P. Logarithmic Correction to the Bekenstein-Hawking Entropy. **Physical Review Letters**, v. 84, jun. 2000.

- KEMPF, A.; MANGANO, G.; MANN, R. P. Hilbert Space Representation of the Minimal Length Uncertainty Relation. **Physical Review D**, v. 52, jul. 1994.
- KIM, H.-C. et al. Smeared BTZ Black Hole from Space Noncommutativity. **Journal of High Energy Physics**, v. 0810, out. 2008.
- KIM, W.; KIM, Y.-W.; PARK, Y.-J. Entropy of the Randall-Sundrum Brane World with the Generalized Uncertainty Principle. **Physical Review D**, v. 74, nov. 2006.
- KIM, W; SON, E, J; YOUN, M. Thermodynamics of a Black Hole Based on a Generalized Uncertainty Principle. **Journal of High Energy Physics**, v. 0801, jan. 2008.
- LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.
- LARRÑAGA, A. Geodesic Structure of the Noncommutative Schwarzschild Anti-de Sitter Black Hole I: Timelike Geodesics. **Romanian Journal of Physics**, v. 58, p. 50-63, jan. 2013.
- LEIVA, C; ESPINOZA, I. **Effective Potential Structure of the Black Hole in Rainbow Gravity**, 2010. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1006.2406.pdf>>.
- MAGGIORE, M. A Generalized Uncertainty Principle in Quantum Gravity. **Physics Letters B**, v. 304, p. 65-69, abr. 1993.
- MAJUMDER, B. Black Hole Entropy with Minimal Length in Tunneling Formalism. **General Relativity and Gravitation**, v. 45, ed. 11, p. 2403-2414 ago. 2013.
- MALDACENA, J. The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 38, ed. 4, p. 1113-1133, abr. 1999.
- MARGÁN, J. M.; MELNIKOV, D.; SILVA, M. R. O. Black Holes in AdS/BCFT and Fluid/Gravity Correspondence. **Journal of High Energy Physics**, v. 1411, nov. 2014.
- NICOLINI, P. Noncommutative Black Holes, The Final Appeal To Quantum Gravity: A Review. **International Journal of Modern Physics A**, v. 24, ed. 07, mar. 2009.
- NICOLINI, P.; SMAILAGIC, A.; SPALLUCCI, E. Noncommutative Geometry Inspired Schwarzschild Black Hole. **Physics Letters B**, v. 632, p. 547-551, jan. 2006.

- NOUICER, K. Quantum-Corrected Black Hole Thermodynamics to all Orders in the Planck Length. **Physics Letters B**, v. 646, p. 63-71, mar. 2007.
- OSBORN, T. A.; MOLZAHN, F. H. Moyal Quantum Mechanics: the Semiclassical Heisenberg Dynamics. **Annals of Physics**, v. 241, p. 79-127, jul. 1995.
- PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking Radiation as Tunneling. **Physical Review Letters**, v. 85, dez. 2000.
- PRADHAN, P. Entropy Product Formula for Spinning BTZ Black Hole. **JETP Letters**, v. 102, ed. 07, p. 427-431, out. 2015.
- RAHAMAN, F. et al. BTZ Black Holes Inspired by Noncommutative Geometry. **Physical Review D**, v. 87, abr. 2013.
- RESNICK, R., **Introdução à relatividade especial**. Tradução de Shigeo Watanabe. S. Paulo, Ed. Univ. de S. Paulo e Ed. Poligono, 1971.
- RINALDI, M. The entropy of an Acoustic Black Hole in Bose-Einstein Condensates: Transverse Modes as a Cure for Divergences. **International Journal of Modern Physics D**, v. 22, ed. 24, mar. 2013.
- SADEGHI, J; REZA, V. **Effective Potential Structure in Noncommutative BTZ Black Hole**, Nova York, 2015. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10773-015-2732-x#/page-1>>.
- SILVA, C. A. S. Fuzzy Space Topology Change as a Possible Solution to the Black Hole Information Loss Paradox, **Physics Letter B**, v. 667, p. 318-321, 2009.
- SRINIVASAN, K.; PADMANABHAN, T. Particle Production and Complex Path Analysis. **Physical Review D**, v. 60, jun. 1999.
- SILVA, C. A. S.; BRITO, F. A. Quantum Tunneling Radiation from Self-dual Black Hole. **Physics Letters B**, v. 725, p. 456-462, out. 2013.
- SOLODUKHIN, S. N. O. Entanglement Entropy of Black Holes. **Living Reviews of Relativity**, v. 14, out. 2011.
- SZABO, R. J. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces . **Physics Reports**, v. 378, ed. 4, p. 207-299, mai. 2003.

- TAWFIK, A. N.; DIAB, A. M. Generalized Uncertainty Principle: Approaches and Applications. **International Journal of Modern Physics D**, v. 23, ed. 12, out. 2014.
- TONIATO, J. D. **Modelo Acustico Analogo ao Buraco Negro de Schwarzschild**, 2011. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1104.2615.pdf>>.
- TEDESCO, D. G. **Um Estudo Sobre a Teoria de Campos no Espaço-Tempo não-Comutativo**. 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual do Rio de Janeiro - RJ
- UNRUH, W, G; SCHÜTZHOLD, R. **Quantum Analogues: From Fase Transitions to Black Holes and Cosmology**, Lecture Notes in Physics. 718 (Springer, Berlin Heidelberg, 2007), DOI 10.1007/b11804185.
- VISSER, M. Area Products for Stationary Black Hole Horizons. **Physical Review D**, v. 88, ago. 2013.
- WEINBERG, S., **Cosmology**. New York: Oxford University Press Inc., 2008. 593p.
- WEI, S.-H. et al. **Area Spectrum of Schwarzschild Black Hole Inspired by Non-commutative Geometry**, 2010. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1004.2005.pdf>>.
- XU, W.; WANG, J.; MENG, X.-H. A Note on Entropy Relations of Black Hole Horizons. **International Journal of Modern Physics A**, v. 29, ed. 18, jul. 2014.
- XU, Z.; CHEN, B. Hawking Radiation from General Kerr-(anti)de Sitter Black Holes. **Physical Review D**, v. 75, jan. 2007.
- ZHAO, H.-H.; LI, G.-L.; ZHANG, L.-C. Generalized Uncertainty Principle and Entropy of Three-Dimensional Rotating Acoustic Black Hole. **Physics Letters A**, v. 376, p. 2012.
- ZHAO, R.; LI, H.-F.; ZHANG, L.-C. Generalized Uncertainty Principle and Entropy of Three-Dimensional BTZ Black Hole. **Acta Physica Sinica**, v. 58, ed. 4, p. 2193-2197, 2009.
- ZHOU, S.-W.; ZENG, X.-X.; LIU, W.-B. **Hawking Radiation from a BTZ Black Hole Viewed as Landauer Transport**, 2011. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1106.0559.pdf>>.