



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Aplicação da q -Álgebra nos Cenários de Localização de
Gravidade e Correspondência AdS/QCD**

Fabiano Francisco dos Santos

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Aplicação da q -Álgebra nos Cenários de Localização de
Gravidade e Correspondência AdS/QCD**

Fabiano Francisco dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2016 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S237a Santos, Fabiano Francisco dos.
Aplicação da q -Álgebra nos cenários de localização de gravidade e correspondência AdS/QCD / Fabiano Francisco dos Santos. – Campina Grande, 2016.
68 f. : il. color.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".
Referências.
1. Localização de Gravidade. 2. Correspondência AdS/QCD . 3. q -Álgebra. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.
CDU 531.2(043.3)

APLICAÇÃO DA q -ÁLGEBRA NOS CENÁRIOS DE
LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE E CORRESPONDÊNCIA
AdS/QCD

FABIANO FRANCISCO DOS SANTOS

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

Unidade Acadêmica de Física-UFCG

(Presidente)

Prof^a. Dr^a. Morgana Lígia de Farias Freire

Departamento de Física-UEPB

(Membro Externo)

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

Unidade Acadêmica de Física-UFCG

(Membro Interno)

”Às vezes, são as pessoas que ninguém espera nada que fazem as coisas que ninguém consegue imaginar.”

The Imitation Game

Agradeço primeiramente a Deus por sua grandiosidade; por guiar meus caminhos e cuidar para que as coisas aconteçam na hora certa.

Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação. Sendo que este é um exemplo de humildade e humanidade.

À minha família em especial a minha mãe. Aos meus colegas e amigos do projeto senador Nilo Coelho N-11 em especial a Mônica Santana, Malu Neres, Marcos Ribeiro.

Aos funcionários e Professores do curso de licenciatura em física do IF-Sertão campus petrolina pelo aprendizado. Em especial a Jorge Fernandes, Alessio Tony Tedesco Celeste por ter sido meu orientador em projetos de PIBIT por dois anos, onde aprendi muito não só no campo científico mas no campo de trabalho em grupo, ao Pedro Siqueira, Bruno Gomes da Costa, George Loula Dourado, Miguel Lourenço e Ericleiton Rodrigues.

Aos amigos do curso de Licenciatura em Física do IF-Sertão em especial à Leudiane Rodrigues, Felipe Herculano, Fabrício Porfírio, Damon Ferreira, Mariana Medeiros, Andre Romão, Fabinara Dantas, Bruno Caldas, Aislan Mudo e Juciane Marcula.

Aos funcionários e professores do Programa de Pós-Graduação em Física da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande pelo aprendizado e colaboração na minha formação. Aos meus colegas e amigos do mestrado pelas horas de estudo, divertimento, companheirismo e amizade. Em especial à Priscila Santos, Desiane Gomes, Yvana Gomes, Ivanice Rodrigues, Wagner Almeida, Elizangela Nascimento, João Santos, Adriano Batista, Rodrigo Lima, Lincoln Araujo, Eduardo Passos, José Suassuna, Érico Vinícius.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

À minha mãe (em memória).

Sumário

Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Modelos de Dimensões Extras	5
2.1 Dimensões extras	5
2.2 Modelo de Kaluza-Klein	6
2.3 Compactificação de Klein	7
2.4 O modelo ADD	7
2.5 O modelo RSI	8
2.6 Modelo RSII	10
2.7 Localização de Gravidade	10
2.8 Flutuações em torno da métrica	11
2.9 Solução de brana no limite de parede fina	13
2.10 Derivadas de Jackson	16
3 Derivada de Jackson nos cenários de Localização de Gravidade	18
3.1 Potencial Vulcão	21

3.2	Limite newtoniano para o caso Karch e Randall	23
3.3	Limite Newtoniano modificado para o modelo Randall e Sundrum original	26
3.4	Os potenciais AdS_4 e dS_4 q -deformados com derivada de Jackson aproximada	30
3.5	Os potenciais AdS_4 e dS_4 q -deformados sem derivada de Jackson aproximada	34
4	Confinamento Linear e Correspondência AdS/QCD	38
4.1	Confinamento linear	38
4.2	Equação tipo oscilador harmônico quântico	38
4.3	Correspondência AdS/QCD	42
4.4	Calculando o potencial	44
5	Conclusão	49

Resumo

Neste trabalho abordamos a aplicação da q -álgebra nos cenários de localização de gravidade e da correspondência AdS/QCD . A motivação para introduzir esta álgebra nestes cenários consiste na ausência de uma plena compreensão da origem física em torno da q -deformação, e tentamos obtê-la com a sua aplicação via um fator de desordem, ou seja, o parâmetro q . No presente caso queremos encontrar a forma do espectro modificada por esse tipo de álgebra q -deformada para uma equação tipo Schrödinger advinda do estudo de flutuações em torno da métrica, encontramos também as formas dos limites newtonianos para o caso Karch e Randall e para o modelo Randall e Sundrum original. Nestes dois últimos casos foi observado que essa correção para o potencial newtoniano equivale ao caso da correção da constante cosmológica do bulk de 5-dimensões em Randall e Sundrum e de Karch e Randall que é uma correção na constante cosmológica da brana. Para a AdS/QCD realizamos um estudo de uma equação tipo oscilador harmônico quântico. Nesta perspectiva introduzimos um *warp factor* gaussiano na equação tipo Schrödinger advinda do estudo de flutuações resultando em um espectro modificado para o oscilador e ainda neste cenário realizamos o estudo da dualidade holográfica para observar como a q -deformação modifica o confinamento entre quarks.

Palavras-chave: Localização de gravidade; Correspondência AdS/QCD ; q -Álgebra.

Abstract

In this paper we discuss the application of the q -algebra in localized gravity scenarios and correspondence AdS/QCD . For the introduction of this algebra in these scenarios is the lack of a full understanding about the physical origin around the q -deformation, and we try to get it with your application by way of a warp factor, i.e, the parameter q . In this case we find the shape of the spectrum modified by this kind of q -deformed algebra for a Schrödinger-like equation which came from the fluctuations around the metric. We also find forms of Newtonian limits to Karch and Randall case and in the original Randall and Sundrum model. In these two cases it was observed that this correction to the Newtonian potential is equivalent to a correction for the cosmological constant of the bulk in the five-dimensional Randall and Sundrum model. And for the Karch and Randall case the Newtonian potential is a correction for the cosmological constant of the brane, moreover the AdS/QCD case involved a study of a quantum harmonic oscillator-like equation. With this in mind we have introduced a gaussian warp factor in the Schrödinger-like equation, which came from the study of fluctuations such an approach resulting in a modified spectrum for the oscillator, furthermore we conducted a study of holographic duality in this scenario, in order to observe how the q -deformation modifies the confinement between quarks.

Keywords: Localized of gravity; correspondence AdS/QCD ; q -algebra.

Capítulo 1

Introdução

A localização de gravidade em uma brana [1] surge no sentido de ser uma alternativa para compactificação envolvendo uma dimensão extra infinita. Nos cenários de Randall-Sundrum [1, 2], as 3-branas são incorporadas em um espaço denominado *bulk* AdS_5 onde considera-se uma gravidade em 5-dimensões com uma constante cosmológica negativa ($\Lambda_5 < 0$) e uma fonte "infinitamente fina" da 3-brana, composta por funções delta. De fato, há uma perfeita sintonia fina entre a tensão na brana e a constante cosmológica Λ_5 . Assim, o ajuste fino conduz a uma brana 4-d em Minkowski (M_4) com uma constante cosmológica de quatro dimensões $\Lambda_{4d} = 0$, de tal forma, que apenas o espaço AdS_5 é curvo. O modo zero de gravidade ligado a 3-brana é responsável por uma gravidade localizada 4-d, de forma que a correção para o potencial newtoniano devido a grávitons do tipo Kaluza-Klein é altamente suprimida, no caso de baixas energias. Por outro lado, se perfeitas sintonias finas estão ausentes, então, a 3-brana e o espaço AdS_5 são curvados. Estas membranas são 4-d de Sitter (dS_4) branas com $\Lambda_4 > 0$ ou anti-de-Sitter (AdS_4) branas 4-d com $\Lambda_4 < 0$.

A questão da localização local da gravidade em branas AdS_4 foi primeiramente

abordado por Karch e Randall como também [18, 19, 21] para ligação entre a gravidade massiva em espaço dS_4 e AdS_4 . O modo do gráviton responsável pela gravidade 4-d não é um modo zero, mas de modo quase sem massa, este modo de "quase zero" se sobrepõe aos modos Kaluza-Klein. Este é um mecanismo muito mais geral de localização de gravidade, uma vez que não requer qualquer condição no espaço longe da membrana.

Aspectos universais de localização de gravidade em branas espessas M_4 foram estudados pela primeira vez em [10]. De forma que os campos escalares modela tais branas espessas [8, 10, 11]. E temos também branas espessas dS_4 e AdS_4 que usam um *bulk* de campos escalares [30]. Modelos de execução de um campo escalar com potenciais escalares como $\cos^n(\phi)$ podem ser resolvidos analiticamente já foram investigados, em [12, 13, 14, 15, 16, 17] em diferentes contextos. O modelo denominado $\lambda\phi^4$ já foi explorado analiticamente [8] no formalismo de primeira ordem, mas apenas no caso em que $\Lambda = 0$. Este modelo também é abordado no contexto de localização da gravidade local, mas as soluções foram encontradas apenas no limite de parede fina [29].

Para a localização de gravidade local em branas AdS_4 espessas considera-se um modelo $\lambda\phi^4$, para explorar com mais detalhes o modo do gráviton mais leve ligado a brana. O campo escalar e a constante de acoplamento λ controla o surgimento deste gráviton. Assim, é discutido como efeitos de alta temperatura na massa podem afetar a localização de gravidade [30], dando uma motivação para trabalhar a abordagem da questão das transições geométricas, onde mudanças de 3-brana AdS_4 à M_4 ; e, em seguida, à dS_4 conforme a temperatura diminui. Esse mecanismo ocorre em uma 3-brana espessa, levantando um vácuo supersimétrico $\Lambda < 0$ a outro, não-supersimétrico, com $\Lambda > 0$. Esta é uma discussão atual em teoria de cordas [31].

Neste trabalho foi proposto a introdução da q -álgebra no contexto de localização

de gravidade local por meio do operador q -diferença comumente chamada de derivada de Jackson (JD), esta introdução foi motivada pelo estudo dos grupos quânticos e álgebras quânticas que tem chamado a atenção em anos recentes, que possui um espectro muito abrangente de aplicações, que se estendem desde cordas cósmicas e buracos negros ao efeito Hall quântico fracionário e supercondutores de alta temperatura, teoria de campos racionais, geometria não-comutativa e teoria quântica das super-álgebras [34].

No desenvolvimento dos resultados a q -deformação foi aplicada a uma equação tipo Schrödinger advinda do estudo de flutuações em torno da métrica. De modo que o procedimento foi realizar uma troca das derivadas usuais por derivadas de Jackson na equação. A meta foi observar a modificação no espectro da equação tipo Schrödinger com relação a álgebra q -deformada.

Para uma perspectiva da correspondência AdS/QCD foi trabalhado o mesmo *background* para as flutuações em torno da métrica. Fez-se essa análise, pois esses *backgrounds* gravitacionais são assintoticamente tipo espaço AdS . Durante os recentes anos tem se tornado claro que a correspondência *gauge/gravity* pode ser usada para extrair informações sobre teorias de *gauge* fortemente acopladas pelo mapeamento das teorias gravitacionais em $5 - d$. O termo AdS/QCD é frequentemente usado para descrever esforços para aplicar uma teoria de $5 - d$ em uma gravidade anti-de Sitter para estudar algo sobre QCD . Embora, para a QCD a forma exata da gravidade dual ainda não é totalmente conhecida, há duas aproximações complementares para o problema [57]. A invariância conforme do ultravioleta (UV) da QCD (devido a liberdade assintótica) que é conhecida pela isometria conforme do *background* AdS da teoria dual $5 - d$, enquanto o confinamento, na realização mais simples, é modelado por um forte “corte” do espaço AdS na região do infravermelho (IR), como introduzido primeiramente por [35]. A aproxi-

mação inferior-superior é relacionada por uma tentativa empreendida por *A.A. Migdal* nos anos 1970 [36] para determinar o espectro do méson pelo imponente requerimento da invariância conforme na correlação de dois pontos da *QCD* e usando a aproximação de Padé, também como para o modelo de ”alça aberta” que é são modelos fenomenológicos de simetrias locais ocultas e ideias de desconstrução dimensional e dualidade *gauge/gravity*. Este modelo tem um grande número K de grupos de *gauge* ocultos bem como uma simetria chiral global. No limite de $K \rightarrow \infty$ o modelo torna-se uma teoria de $4 + 1$ dimensões-a de campos de *gauge* se propagando em um *background* dilatônino e no espaço-tempo métrico externo com duas fronteiras [37, 38].

O espectro do méson na *AdS/QCD* é determinado pela solução para auto modos de um campo de *gauge* de $5d$ vivendo em uma fatia de *AdS*. Como o simples corte do *IR* é bem forte o espectro do quadrado das massas (m_n^2) é similar para o de uma equação tipo Schrödinger de uma partícula em uma caixa, isto é para altas excitações do número, $n \gg 1$, m_n^2 cresce com n^2 [57].

Esse trabalho de dissertação de mestrado está organizado da seguinte maneira: O Capítulo 2 apresenta uma revisão de alguns modelos consagrados para discutir dimensões extras como Teoria de Kaluza-Klein, Compactificação de Klein, o modelo (ADD) Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali, o modelo RSI, o modelo RSII e Localização de Gravidade. No Capítulo 3 faz-se aplicação da derivada de Jackson. No Capítulo 4 trata-se da correspondência *AdS/QCD* para estudar teoria de confinamento linear através de um fator de empenamento (*warp factor*) gaussiano que deixa o espaço *AdS* não conforme e obter uma configuração de energia da forma $E(L) \propto L$. De modo que, tal configuração de energia se apresenta dessa forma, para concordar com a o confinamento linear de m_n^2 crescendo com n pelo que $L \approx m_n$. E no 5, apresenta-se as conclusões.

Capítulo 2

Modelos de Dimensões Extras

2.1 Dimensões extras

Uma teoria de unificação entre o eletromagnetismo e a gravidade teve início no século passado. Logo após a formulação da teoria da relatividade geral, por Albert Einstein em 1916, neste cenário a gravidade que era vista como uma força pela formulação de Newton, agora passa a ser considerada dentro do contexto da relatividade geral uma propriedade geométrica do espaço. Assim, tem-se uma busca pela unificação dentro deste cenário das interações fundamentais da natureza que fez surgir as teorias de dimensões extras [39].

Em meados do anos 1921 Theodor Kaluza propôs um modelo, que consiste na unificação do campo gravitacional com o eletromagnetismo, admitindo assim a existência da dimensão extra do espaço-tempo. Anos mais tarde, em 1926, Oscar Klein, introduziu algumas modificações no modelo de Kaluza e este modelo de unificação ficou conhecido como modelo de Kaluza-Klein [42, 43]. De modo que, a presente teoria, tem uma dimensão extra que possui um comprimento da escala da constante de Planck ($10^{-35} m$). Desta

maneira a dimensão extra não pode ser detectada dentro da escala de energia disponível nos dias atuais.

Na maior parte das formulações dos modelos de dimensão extra, tenta-se resolver o problema das diferenças entre as escalas de energia que ocorrem entre as forças eletrofraca e gravitacional. Assim, o conhecido problema de hierarquia, busca resolver a diferença entre as escalas de Planck 10^{18} GeV e a escala da força eletrofraca 10^3 GeV , de modo que surgem as teorias de branas, em que o universo é tratado como uma hipersuperfície imersa em um espaço ambiente, comumente chamado de *bulk*. Para esse tipo de modelo de hipersuperfície, denominada membrana ou simplesmente brana, contém a matéria e os campos de quatro dimensões em um estado de confinamento, no entanto, a gravidade possui a liberdade de se propagar em direção às dimensões extras.

Este capítulo é dedicado a revisão de alguns modelos de dimensão extra. Primeiramente foi abordado o conhecido modelo de Kaluza-Klein, introduzindo a ideia de dimensão extra. Logo em seguida, foi trabalhado os modelos de imersão: estes *ADD*, *RSI* e *RSII*; em que a diferença entre esses modelos reside na forma como a dimensão extra é oculta das observações. Por fim fez-se uma introdução à álgebra de Heisenberg q -deformada e às derivadas de Jackson.

2.2 Modelo de Kaluza-Klein

Nos anos de 1914 e 1921 Nordström e Kaluza, respectivamente, foram os pioneiros a elaborar uma tentativa de unificar a força gravitacional e a força eletromagnética dentro do contexto de dimensões extras em uma teoria de cinco dimensões [40]. Nordström, propôs um potencial escalar gravitacional, e Kaluza adotou o potencial de Einstein, notando que o conjunto completo das coordenadas de um espaço-tempo de (4+1)-dimensões deveria

ser (x^μ, r) [39]. Assim, as equações de Einstein em 5 dimensões na ausência do tensor energia-momento são dadas a seguir

$$G_{MN} = 0, \quad (2.1)$$

ou ainda colocando de outra forma, temos:

$$R_{MN} = 0. \quad (2.2)$$

onde $G_{MN} = R_{MN} - 1/2g_{MN}R$ é o tensor de Einstein, R_{MN} e $R = g_{MN}R_{MN}$ é o tensor e o escalar de Ricci, respectivamente nessa ordem e g_{MN} é o tensor métrico em 5-dimensões.

Na ausência de fontes as equações de Einstein, reforçam a posição adotada por Kaluza de que "para dimensões superiores o universo estaria vazio". Em que a ideia é dar uma explicação para a matéria (4-dimensões), que surge como uma manifestação pura da geometria, em dimensões mais altas [42].

2.3 Compactificação de Klein

Na teoria de Kaluza, a condição cilíndrica é o mecanismo pelo qual explica-se a natureza do universo em 4-dimensões. A suposição de Kaluza foi a existência da quinta dimensão, porém as grandezas físicas não dependem dela. Já a suposição de Klein explica a falta de dependência, tomando a dimensão extra como muito pequena. Dessa forma, proposto por ele as seguintes propriedades para a dimensão extra: (1) uma topologia circular (S^1) e (2) uma escala pequena [43].

2.4 O modelo ADD

Na tentativa de se resolver os problemas de hierarquia entre as escalas de energia nas últimas décadas, sendo este um dos grandes motivadores de modelos para além do

modelo padrão de física de partículas. Surgiu assim, o modelo Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD), proposto em 1998, que pressupõe a existência de n -dimensões compactadas de raio R [44].

Neste modelo a dimensão extra encontra-se confinada em uma hipersuperfície de quatro dimensões imersa em um *bulk*, de modo que, apenas a gravidade propaga-se ao longo da dimensão extra. Em contraste com o modelo proposto por Kaluza, em que as dimensões extras são compactadas em um comprimento da ordem da constante Planck, no modelo ADD [44, 40] essas dimensões são compactadas em uma escala de comprimento da ordem submilimétrica, não entrando em conflito com a experiência.

2.5 O modelo RSI

Para este modelo, espaço-tempo possui uma única dimensão extra compacta por meio da existência de duas branas. Admiti-se que para a dimensão extra sua topologia do espaço de forma local é dada pelo *orbifold* S_1/Z_2 , em que S_1 é um círculo de raio unitário e Z_2 é o correspondente grupo multiplicativo $(-1, 1)$; e a operação usual de multiplicação dos números inteiros estabelece uma estrutura de grupo abeliano [40].

Assim, as branas encontram-se localizadas nos dois pontos fixos do *bulk*. De modo que uma brana com uma tensão λ_1 com localização na origem ($z = 0$) e a outra com uma tensão negativa λ_2 , localizada na extremidade de um círculo, em uma posição da forma $z = \pi$, que representa um comprimento total L como ilustrado na fig. 2.1.

Para cada ponto limite tem-se um universo em 4-dimensões, como conhecemos. Uma analogia com branas inseridas em espaços com dimensões de ordem superior, os modelos com $(3 + 1)$ -dimensões tanto envolvem quanto limitam um volume de 5-d como apresenta-se na fig. 2.2.

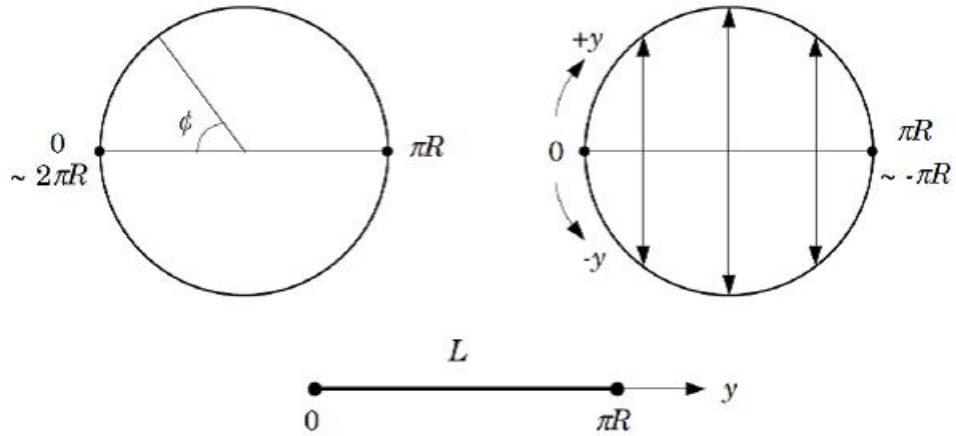


Figura 2.1: Orbifold S_1/Z_2 .

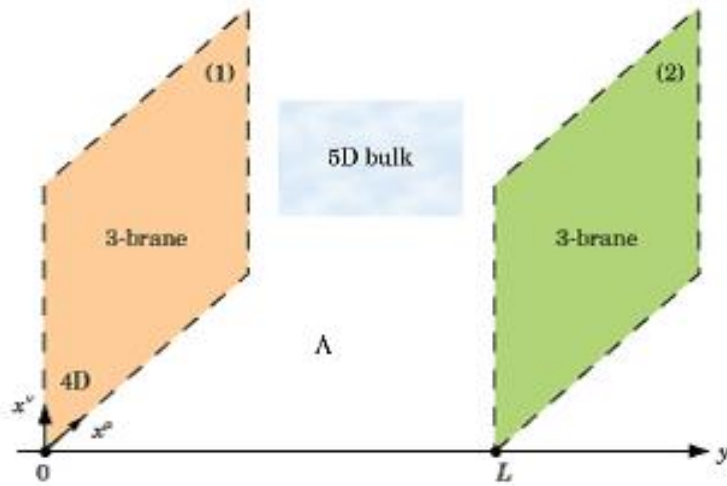


Figura 2.2: Modelo de Randall-Sundrum.

A motivação para o desenvolvimento dos modelos de Randall e Sundrum [1, 2], reside no problema da Hierarquia. De modo que, a gravidade é mais forte próximo da brana e diminui exponencialmente quando se afasta da mesma, na dimensão extra. Assim, a métrica no *bulk* possui um fator exponencial com dependência na nova dimensão, isto é, a métrica agora nessa formulação é uma função da dimensão extra. De tal forma que o fator de empenamento, mais comumente denominado *warp factor*, na métrica atenua a gravidade e corrige o problema de Hierarquia tratado neste modelo.

2.6 Modelo RSII

No modelo Randall-Sundrum II (RSII) o problema de Hierarquia não é resolvido, no entanto, tem-se um quadro interessante para estudar os efeitos gravitacionais de uma dimensão extra. O presente modelo é consistente de uma única brana e o *bulk* possui uma geometria anti-de-Sitter (AdS_5), munido de uma simetria Z_2 . De modo que, a coordenada z pode ir ao infinito, isto é, em contraste com o modelo anterior, o *RSII* não se dispõe de uma dimensão extra compacta [39].

2.7 Localização de Gravidade

Consideremos uma ação que descreve um modelo de gravidade de 5-d acoplada com um campo escalar em que:

$$S = \int d^5x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}\partial_M\phi\partial^M\phi - V(\phi) \right], \quad (2.3)$$

onde consideramos a sinatura $(+ - - - -)$ e $M = 0, 1, 2, 3, 5$, com $g = \det(g_{MN})$. O Ansatz da métrica é:

$$ds^2 = e^{2A(r)}\bar{g}_{ij}dx^i dx^j - dr^2 \quad (2.4)$$

onde \bar{g}_{ij} é o tensor métrico 4-d, com $i, j = 0, 1, 2, 3$, satisfazendo a relação

$$\bar{R}_{ij} = -3\Lambda\bar{g}_{ij}. \quad (2.5)$$

A constante cosmológica Λ é positiva para espaço-tempo de Sitter (dS_4), negativa para espaço-tempo anti-de-Sitter (AdS_4) e zero para espaço-tempo de Minkowski (M_4).

2.8 Flutuações em torno da métrica

Nesta seção faremos um estudo das flutuações em torno da métrica da pela equação (2.4). Começamos com a linearização das equações de Einstein considerando a seguinte perturbação $\bar{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}$. Escolhemos um gauge do tipo axial, e que resulte na forma de um gráviton de 4-dimensões particularmente simples. O traço nulo transverso em geral obedece a equação de um escalar sem massa em um *background* curvo. Realizando uma perturbação em primeira ordem na ação com relação as componentes da métrica [8] o tensor de Ricci é dado por:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}R_{ij} &= e^{2A(r)}\left(\frac{1}{2}\partial_r + 2A'(r)\partial_r + A''(r) + 4A'^2(r) - e^{-2A(r)}\Lambda_{4d}\right)h_{ij} - \frac{1}{2}\square h_{ij} \\ &+ \frac{1}{2}\eta_{ij}e^{2A(r)}A'(r)\partial_j(\eta^{\lambda\rho}h_{\lambda\rho}) - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(\partial_j\partial_i h_{\lambda\rho} - \partial_j\partial_\lambda h_{\rho i} - \partial_i\partial_\lambda h_{\lambda j}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde as outras componentes para o tensor de Ricci

$$\delta^{(1)}R_{55} = -\frac{1}{2}(\partial_r + 2A'(r)\partial_r)\eta^{kl}h_{kl} \quad (2.7)$$

e

$$\delta^{(1)}R_{j5} = \frac{1}{2}\partial_r(\partial_k h_{jl} - \partial_\mu h_{kl}). \quad (2.8)$$

Para o tensor energia-momento podemos calcular a seguinte quantidade:

$$\delta^{(1)}T_{ij} = -\frac{4}{3}e^{2A(r)}\left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} + V(\phi)\right) = e^{2A(r)}(A''(r) + 4A'^2(r))h_{ij}. \quad (2.9)$$

As equações de Einstein são dadas da seguinte forma:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \kappa T_{ij} \quad (2.10)$$

onde $\kappa = 8\pi G/c^2$ e em unidades naturais consideramos $\kappa = 1$. Logo, temos que ter $\delta^{(1)}R_{ij} = \delta^{(1)}T_{ij}$. No entanto introduzindo o gauge transverso de traço nulo, o qual é

obtido por meio do operador de projeção, temos:

$$\bar{h}_{ij} \rightarrow \Phi_{ij} = P_{ij\lambda\rho} h^{\lambda\rho} = \left(\frac{1}{2}(\pi_{jk}\pi_{il} + \pi_{jk}\pi_{ik}) - \frac{1}{3}\pi_{ij}\pi_{kl} \right) h^{kl} = h_{ij} + \dots \quad (2.11)$$

onde $\pi_{ij} \equiv (\eta_{ij} - \partial_j \partial_i / \square)$ e (...) indica os termos não locais. O \bar{h}_{ij} satisfaz a:

$$\partial^i \bar{h}_{ij} = \eta^{ij} \bar{h}_{ij} = 0, \quad (2.12)$$

de posse dessas informações encontramos a equação para as flutuações da métrica dada por

$$[\partial_r^2 + 4A'(r)\partial_r - e^{-2A(r)}(\square_{4d} + 2\Lambda_{4d})]\Phi_{ij} = 0. \quad (2.13)$$

Aqui considera-se apenas flutuações do setor gravitacional, pois o setor escalar relacionado ao campo escalar e suas derivadas não são consideradas a priori. Em que Φ_{ij} descreve as funções de onda do gráviton em coordenadas não-compactas.

Considerando o uso do Ansatz $\Phi_{ij} = h(r)M(x^\mu)$, as equações que descrevem o gráviton $(\square_{4d} + 2\Lambda_{4d})M = m^2 M$ e a mudança de variáveis $h(r) = e^{3A(z)/2}\psi(z)$, $z(r) = \int e^{-A(r)} dr$ (tomando a relação $dz^2 = e^{-2A(r)} dr^2$) na Equação (2.13), a Equação (2.13) pode ser escrita como:

$$-\partial_z^2 \psi(z) + \left[\frac{3}{2}A''(z) + \frac{9}{4}A'^2(z) \right] \psi(z) = m^2 \psi(z) \quad (2.14)$$

$$-\partial_z^2 \psi(z) + U(z)\psi(z) = m^2 \psi(z). \quad (2.15)$$

a Equação (2.15) descreve partículas com $J = 2^{++}$ que podem ser grávitons ou glueballs em uma correspondência *AdS/QCD*. Em a Equação (2.13) foi reescrita para a variável z . O potencial $U(z)$ é dado por:

$$U(z) = \frac{3}{2}A''(z) + \frac{9}{4}A'^2(z). \quad (2.16)$$

e assim a Equação (2.15) pode ser apresentada da seguinte forma:

$$H\psi(z) = m^2 \psi(z). \quad (2.17)$$

sendo H dado por:

$$H = Q^+Q. \quad (2.18)$$

Onde H é o Hamiltoniano, $\psi(z)$ a função de onda e m^2 as massas para o gráviton. O produto Q^+Q é um operador hermitiano positivo, assim não pode haver modos para os grávitons que permitam a condição de normalização de energia negativa. De tal forma que temos as seguintes relações em termos de operadores:

$$Q^+ = \partial_z + \frac{3}{2}\partial_z A(z) \quad e \quad Q = -\partial_z + \frac{3}{2}\partial_z A(z). \quad (2.19)$$

Para o modo zero temos o seguinte resultado:

$$\psi_0(z) = N_0 e^{3A(z)/2} \quad (2.20)$$

A condição de normalização para a localização de gravidade em 4-dimensões é que $\psi_0(z)$ é normalizável; em outras palavras:

$$\int d^d z e^{3A(z)} < \infty. \quad (2.21)$$

Notemos que $A(z) \rightarrow -\infty$ na medida em que $|z| \rightarrow \infty$.

2.9 Solução de brana no limite de parede fina

Para mostrar como uma 3-brana (Z_2 -simétrica) surge através do campo escalar no limite de parede fina [30], calcula-se as equações de movimento. Assim, temos que:

$$S = \int d^5 x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}\partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) \right] \quad (2.22)$$

Calculando as equações de movimento temos que a primeira equação de movimento é dada como:

$$\phi'' + 4A'(r)\phi' = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.23)$$

Para as outras equações de movimento temos:

$$ds^2 = e^{2A(r)} \bar{g}_{ij} dx^i dx^j - dr^2 \quad (2.24)$$

Calculando os símbolos de Christoffel, vem que:

$$\Gamma_{MN}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha R} (\partial_M g_{NR} + \partial_N g_{RM} - \partial_R g_{MN}) \quad (2.25)$$

usando a transformação conforme $g_{MN} = e^{2A(r)} \bar{g}_{MN}$, podemos escrever o escalar de Ricci como:

$$R_{MN} = e^{2A(r)} (4A'^2(r) + A''(r) - 3\Lambda_{4d} e^{-2A(r)}) \bar{g}_{MN}. \quad (2.26)$$

sendo que o R_{55} é dado por:

$$R_{55} = -4A'^2(r) - 4A''(r). \quad (2.27)$$

E o tensor de Einstein é:

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R \quad (2.28)$$

ou

$$G_{MN} = g_{MN} (6A'^2(r) + 3A''(r) - 3\Lambda_{4d} e^{-2A(r)}) \quad (2.29)$$

considerando T_{MN} dado por:

$$T_{MN} = -2 \frac{\delta L}{\delta g^{MN}}, \quad (2.30)$$

temos que $G_{55} = -6A'^2(r)$. Assim, combinando $G_{00} + G_{55} = T_{00} + T_{55}$ obtemos as seguintes equações de movimento:

$$A'^2(r) - \Lambda_{4d} e^{-2A(r)} = -\frac{1}{3} V(\phi) + \frac{1}{6} \phi'^2 \quad (2.31)$$

$$A''(r) + \Lambda_{4d} e^{-2A(r)} = -\frac{2}{3} \phi'^2 \quad (2.32)$$

O campo escalar ϕ é um kink típico com valores aproximadamente assintóticos, ou seja:

$$\phi(r \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm a, \quad (2.33)$$

$$\phi = a \tanh(\lambda ar) \quad (2.34)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2 - \frac{3}{L^2}. \quad (2.35)$$

Onde $V(\pm a) \equiv \Lambda_5 = -3/L^2$ é identificada como a constante cosmológica AdS_5 . Assim, temos para as equações de movimento as seguintes expressões

$$A'^2(r) - \Lambda_{4d}e^{-2A(r)} = -\frac{1}{3}V(\phi) + \frac{1}{6}\phi'^2, \quad (2.36)$$

$$A'^2(r) - \Lambda_{4d}e^{-2A(r)} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2 - \frac{3}{L^2}\right] + \frac{1}{6}\phi'^2 \quad (2.37)$$

$$A''(r) + \Lambda_{4d}e^{-2A(r)} = -\frac{2}{3}\phi'^2. \quad (2.38)$$

Através da identidade $1 + \operatorname{sech}^2 x = \tanh^2 x$, escreve-se as seguintes relações:

$$A'^2(r) - \Lambda_{4d}e^{-2A(r)} = -\frac{1}{6}\operatorname{sech}^4 \lambda ar + \frac{1}{L^2} + \frac{1}{6}\operatorname{sech}^4 \lambda ar, \quad (2.39)$$

$$A'^2(r) - \Lambda_{4d}e^{-2A(r)} = \frac{1}{L^2} \quad (2.40)$$

e

$$A''(r) + \Lambda_{4d}e^{-2A(r)} = -\frac{2}{3}\phi'^2. \quad (2.41)$$

De posse dos seguintes limites $\lambda \rightarrow \infty$ e $\lambda \rightarrow 0$ que nos leva para o seguinte resultado $\phi'^2 \approx \sigma\delta(r)$ com $\sigma = 4\lambda a^3/3$, obtemos que:

$$A'^2(r) - \Lambda_{4d}e^{-2A(r)} = \frac{1}{L^2} \quad (2.42)$$

e

$$A''(r) + \Lambda_{4d}e^{-2A(r)} = -\frac{2}{3}\sigma\delta(r). \quad (2.43)$$

As Equações (2.42) e (2.43) são satisfeitas pelas seguintes soluções:

$$A(r)_{dS_4} = \ln \left(\sqrt{\Lambda} L \sinh \left(\frac{c - |r|}{L} \right) \right), \quad (2.44)$$

$$A(r)_{M_4} = \frac{c - |r|}{L}, \quad (2.45)$$

e

$$A(r)_{AdS_4} = \ln \left(\sqrt{-\Lambda} L \cosh \left(\frac{c - |r|}{L} \right) \right). \quad (2.46)$$

Em que as tensões para cada um dos casos são dadas respectivamente por:

$$\sigma_{dS_4} = \frac{3}{L} \coth \frac{c}{L}, \quad (2.47)$$

$$\sigma_{M_4} = \frac{3}{L} \quad (2.48)$$

e

$$\sigma_{AdS_4} = \frac{3}{L} \tanh \frac{c}{L}. \quad (2.49)$$

Onde c é uma constante. A afinação $\sigma = 3/L = L|\Lambda_5|$ na brana Minkowski (M_4) impõe $\Lambda = 0$. No limite de $c \rightarrow \infty$ as Equações (2.44, 2.45 e 2.46) para o ajuste fino, tanto a brana AdS_4 quanto a brana dS_4 colapsa para brana Minkowski (M_4) [30]. Esta é precisamente a afinação imposta no modelo de Randall e Sundrum [2].

2.10 Derivadas de Jackson

Em 1908 Frank Hilton Jackson, reintroduziu e iniciou um estudo do operador q -diferença, dado como na forma a seguir [45]:

$$(D_q \phi)(x) = \frac{\phi(x) - \phi(qx)}{(1 - q)x}, \quad q \neq 1 \quad (2.50)$$

que é às vezes é referido como operador de Euler-Jackson ou, simplesmente, operador q -diferencial de Jackson. Este operador pode ser aplicado a qualquer problema em que se utiliza a função não contendo $x = 0$ na definição do seu domínio. Assim, no limite que $q \rightarrow 1$ recuperamos a derivada ordinária, que é dada como:

$$\lim_{q \rightarrow 1} (D_q \phi)(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}. \quad (2.51)$$

Definindo um número básico como:

$$[\alpha]_q = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}, \quad (2.52)$$

que no limite de $q \rightarrow 1$, o número básico é reduzido ao número α . E ϕ na equação (2.51) é diferenciável em x . Este operador possui algumas propriedades que deve ser mencionadas como por exemplo: a adição de funções e o produto por uma constante, ou seja, matematicamente

$$D_q(u(x) + v(x)) = D_q u(x) + D_q v(x) \quad (2.53)$$

e

$$D_q(\lambda u(x)) = \lambda D_q u(x), \quad (2.54)$$

respectivamente.

Assim, o operador D_q é linear quando atua no espaço linear da função. Como é em geral a teoria dos operadores lineares desenvolvida com a álgebra linear, a análise funcional, a teoria de operadores e álgebra de operadores pode ser aplicada. O uso da derivada de Jackson (JD) são considerados a fim de definir uma dinâmica generalizada q -deformada [45, 47].

Capítulo 3

Derivada de Jackson nos cenários de Localização de Gravidade

Este capítulo é dedicado a aplicação da derivada de Jackson nos cenários de localização de gravidade em branas. O operador de Jackson foi aplicado ao estudo de sistemas diamagnéticos de Landau q-deformado imerso em D-dimensões [47]. Nosso objeto de estudo reside em trabalhar a equação tipo Schrödinger resultante do estudo de flutuações em torno da métrica. Este último procedimento reside em uma linearização das equações de Einstein recaindo na equação tipo de Schrödinger, dada por:

$$-\partial_z^2 \psi(z) + U(z)\psi(z) = m^2 \psi(z), \quad (3.1)$$

onde $U(z)$ é:

$$U(z) = \frac{3}{2}A''(z) + \frac{9}{4}A'^2(z). \quad (3.2)$$

A equação acima trata do análogo da mecânica quântica para o gráviton com um potencial $U(z)$ dado pela Equação (3.2). Potenciais que ligam uma partícula ocorrem na mecânica quântica, como no estudo do conhecido problema do poço quadrado infinito, este por

sua vez sugere que tal partícula tenha qualquer energia total finita $E \geq 0$. O operador diferencial de Jackson para Equação (3.1) com uma aproximação de até primeira ordem do número básico, é:

$$D_z^{(q)}h(z) = \frac{h(qz) - h(z)}{z(q-1)} \quad (3.3)$$

Esta equação é a derivada de Jackson e está sendo aplicada a uma função qualquer, retornando as derivadas usuais quando $q \rightarrow 1$. Foi considerado o resultado que é obtido na termodinâmica q -deformada [47] para o limite de altas temperaturas. Obtêm-se que:

$$D_z^q[\alpha]_q = \partial_z \alpha \quad (3.4)$$

Agora, realizando uma expansão no número básico da Equação (2.52), até terceira ordem, temos:

$$\frac{q^\alpha - 1}{q - 1} \approx \frac{\ln q \alpha}{q - 1} + \frac{(\ln q)^2 \alpha^2}{2(q - 1)} + \frac{(\ln q)^3 \alpha^3}{6(q - 1)} + \vartheta[\alpha]. \quad (3.5)$$

No entanto, considerando apenas a primeira ordem pelo fato de ser mais simples as equações e resolver a equação tipo Schrödinger para potenciais conhecidos. Não obstante faremos mais tarde tratamentos para a derivada de Jackson sem aproximação. Para uma primeira aproximação temos:

$$D_x^{(q)} \frac{\ln q \alpha}{q - 1} = \partial_x \alpha \quad (3.6)$$

e

$$D_x^{(q)} = \frac{q - 1}{\ln q} \partial_x, \quad (3.7)$$

como mostrado nas Equações (2.13) e (2.15). Para as equações de Einstein em 5-dimensões a determinação é semelhante a menos de um fator global de $(\frac{q-1}{\ln q})^2$. Podemos escrever:

$$\left[\partial_r^{2(q)} + 4 \frac{q-1}{\ln q} A'(r) \partial_r^{(q)} - e^{-2A} (\square_{4d}^q + 2\Lambda_{4d}) \right] \Phi_{ij} = 0, \quad (3.8)$$

onde Φ_{ij} descreve as funções de onda do gráviton em coordenadas não-compactas. Vamos considerar o uso do Ansatz $\Phi_{ij} = h(r)M(x^\mu)$, as equações que descrevem o gráviton são $(\square_{4d}^q + 2\bar{\Lambda}_{4d})M = m^2M$, usando a mudança de variáveis $h(r) = e^{3A(z)/2}\psi(z)$, $z(r) = \int e^{-A(r)}dr$, fornece a uma equação tipo Schrödinger modificada na forma:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{q-1}{\ln(q)}\right)^2 \partial_z^2 \psi(z) + \left(\frac{q-1}{\ln(q)}\right)^2 U(z)\psi(z) &= m^2 \psi(z) \\ \Rightarrow -\partial_z^2 \psi(z) + U(z)\psi(z) &= m_q^2 \psi(z) \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que $U(z)$ é:

$$U(z) = \left[\frac{3}{2}A''(z) + \frac{9}{4}A'^2(z) \right] \quad (3.10)$$

Onde $m_q^2 = \left(\frac{q-1}{\ln q}\right)^{-2}m^2$ e a q -deformação não afeta o potencial nesse sentido. Nota-se, ainda que, $\alpha \rightarrow \psi(z)$ em (2.52), para pequenas flutuações em torno da métrica, ou seja, no limite de baixas curvaturas e justifica-se a aplicação da derivada de Jackson neste cenário. Para o modo zero temos que as equações de primeira ordem são dadas pelos operadores aniquilação e criação da seguinte forma, respectivamente:

$$Q^+ = \partial_z + \frac{3}{2}\partial_z A(z) \quad (3.11)$$

e

$$Q = -\partial_z + \frac{3}{2}\partial_z A(z). \quad (3.12)$$

Para o modo zero o operador aniquilação atuando em um estado fundamental tem-se:

$$Q\psi_0(z) = 0 \quad (3.13)$$

Como resultado da equação de primeira ordem encontramos o caso usual das literaturas, ou seja

$$\psi_0(z) = N_0 e^{\frac{3A(z)}{2}} \quad (3.14)$$

e

$$\int d^d z e^{3A(z)/2} < \infty \quad \textit{normalizada.} \quad (3.15)$$

Podemos observar que o operador de Jackson, para primeira ordem da expansão do número básico na Equação (3.5) não afeta o modo zero. Tal que só os modos massivos são modificados por tais operadores. Este fenômeno está de acordo com o efeito encontrado por Marinho e Brito em 2009 [20], na qual foi os efeitos da q-deformação se torna mais evidente em temperaturas/energias mais altas. Esse efeito é mostrado na seção a seguir, para o potencial Vulcão no modelo de Randall-Sundrum original o qual não tem constante cosmológica na brana (AdS_4).

3.1 Potencial Vulcão

Nesta seção apresenta-se o espectro das flutuações da gravidade linearizada em torno da brana, ou seja uma brana (AdS_4) em (AdS_5) [9]. Porém, para uma pequena constante cosmológica, o *warp factor* próximo a brana é essencialmente o de uma brana de Minkowski. No entanto, para a brana, a métrica difere substancialmente. O espaço inclui a fronteira (AdS_5), tendo assim um volume finito. Contudo, para uma constante cosmológica (AdS_4) suficientemente pequena, há estados ligados a brana, e a gravidade de 4-dimensões é reproduzida. Nessa perspectiva os estados ligados massivos fazem o papel da gravidade de 4-dimensões.

Para o estudo do caso (AdS_4) a fim de encontrar o potencial Vulcano (AdS_4). Calcula-se o potencial começando com a Equação (2.46) como na forma a seguir:

$$A(z) = \ln \left(\frac{1}{\sin(\sqrt{-\Lambda}(z + z_0))} \right) \quad (3.16)$$

em que fez-se uma transformação para a variável z utilizando a relação $z(r) = \int e^{-A(r)} dr$

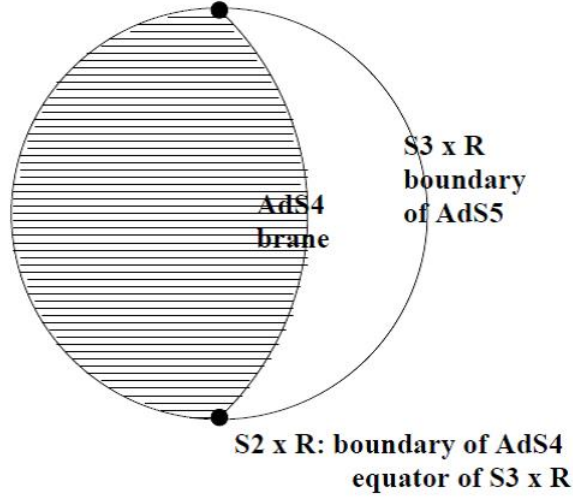


Figura 3.1: Uma brana AdS_4 em AdS_5 . Em que o *background* gravitacional AdS_4 representa um corte no espaço AdS_5 .

e a relação da Equação (3.10), o potencial Vulcão AdS_4 é:

$$U(z) = \left(\frac{9}{4}\Lambda + \frac{15}{4} \frac{(-\Lambda)}{\sin^2(\sqrt{-\Lambda}(z+z_0))} \right) \quad (3.17)$$

escolhendo $\sqrt{|\Lambda|}z_0 = \pi/2$ [9]. Usando a relação:

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B), \quad (3.18)$$

o potencial pode ser escrito como:

$$U(z) = \left(\frac{9}{4}\Lambda + \frac{15}{4} \frac{(-\Lambda)}{\cos^2(\sqrt{-\Lambda}z)} \right). \quad (3.19)$$

A Equação (3.19) é o potencial tipo Vulcão sem a presença da função delta para o problema do análogo da mecânica quântica. Podemos representar o comportamento do presente potencial Equação (3.17) com $z_0 = 1/\sqrt{-\Lambda} \arcsin(1/\cosh(c/L))$ e com a presença da função delta dada por $-3 \cot(\sqrt{-\Lambda}z_0)\sqrt{-\Lambda}\delta(z)$ (Figura 3.2). Resolvendo a equação tipo Schrödinger obtemos a seguinte solução:

$$\begin{aligned} \psi(z) = & C_1 F_1 \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{9+4E}}{4}, -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{9+4E}}{4}; 1 - \frac{\sqrt{9+4E}}{2}; \frac{1}{\cos^2 z} \right) \cos^{-\frac{\sqrt{9+4E}}{2}} z \\ & + C_2 F_2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{9+4E}}{4}, \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{9+4E}}{4}; 1 + \frac{\sqrt{9+4E}}{2}; \frac{1}{\cos^2 z} \right) \cos^{-\frac{\sqrt{9+4E}}{2}} z \end{aligned} \quad (3.20)$$

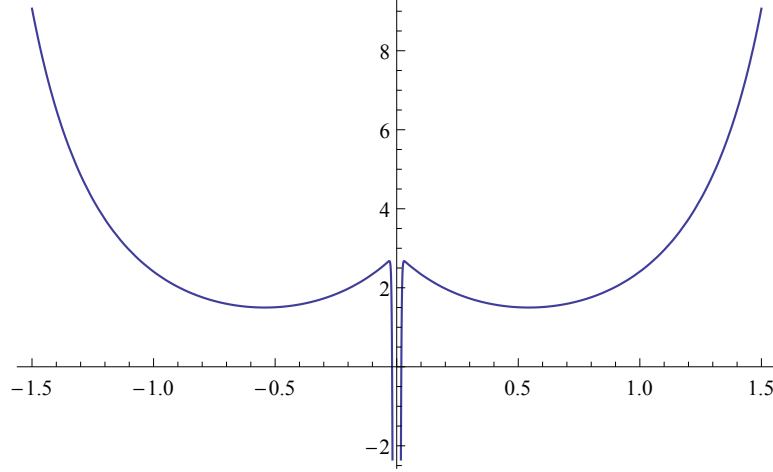


Figura 3.2: Potencial Vulcão anti-deSitter com função delta.

fazendo $C_2 = 0$, ficamos com:

$$\psi(z) = C_1 F_1 \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{9+4E}}{4}, -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{9+4E}}{4}; 1 - \frac{\sqrt{9+4E}}{2}; \frac{1}{\cos^2 z} \right) \cos^{-\frac{\sqrt{9+4E}}{2}} z \quad (3.21)$$

onde $E_n \equiv m_n^2 / \left(\frac{q-1}{\ln q}\right)^2 |\Lambda_{4d}|$ e com a condição de que $3 + \sqrt{9+4E}$ seja inteiro, ou seja:

$$E_n = n(n+3). \quad (3.22)$$

onde temos que $m_n^2 = E_n |\Lambda_{4d}^q|$ e $\Lambda_{4d}^q \equiv \left(\frac{q-1}{\ln q}\right)^2 \Lambda_{4d}$.

Esta é a equação do espectro com uma constante cosmológica efetiva modificada pela q-álgebra por um fator com aproximação para primeira ordem da derivada de Jackson. No limite $q \rightarrow 1$ recuperamos a constante cosmológica usual conhecida dos modelos de localização de gravidade e, conseqüentemente, m_n^2 .

3.2 Limite newtoniano para o caso Karch e Randall

A idéia aqui é aproximar o potencial da Equação (??) com $0 < \omega < \pi + \epsilon$ e $\epsilon \ll 1$ [52]. Em que deve-se realizar uma mudança de variáveis da forma $\omega = \sqrt{|\Lambda|} z$ e definindo,

ainda, que $\epsilon \equiv \sqrt{|\Lambda|}z_0 \approx \sqrt{|\Lambda|}L$, e o potencial $U(\omega)$ é:

$$U(\omega) = -\frac{9}{4} + \frac{15}{4} \frac{1}{\sin^2(|\omega| + \epsilon)} - 3 \cot(\epsilon)\delta(\omega) \quad (3.23)$$

A relação para as massas do gráviton é $m_n^2 = E_n|\Lambda_{4d}^q|$. Nota-se que para uma transferência da fronteira do AdS em r para estas coordenadas, podemos ver que $0 < \omega < \pi - \epsilon$. A tensão é nula, quando $\epsilon = \pi/2$ (AdS_5 puro), torna-se crítica, em $\epsilon \rightarrow 0$. Podemos notar que o potencial acima na fronteira do AdS é finito em $\omega = \pi - \epsilon$, embora muito grande, em uma brana na escala de Planck $\omega = 0$. Este potencial também possui uma função delta grande (mas finita) na brana. Assim, escolhe-se o potencial para conter uma parede em $\omega = \pi - \epsilon$ e a função delta em $\omega = 0$ fornece a força correta: $-3 \cot(\epsilon)\delta(\omega)$. E impõe-se o *orbifold* simétrico das funções de onda, para ser uma situação real. Para utilizar o potencial, monta-se o potencial tendendo para zero, sendo que ele é finito para uma melhor compreensão ver Schwartz [52].

As soluções exatas para este modelo são os modos massivos senoidais que divergem na fronteira do AdS , ou seja:

$$\chi_k(\omega) = \sin(k(\pi - \epsilon - \omega)), \quad (3.24)$$

onde as energias são $E = k^2$ e k satisfaz a

$$\tan(\epsilon) = \frac{\tan(k(\pi - \epsilon))}{k}. \quad (3.25)$$

Para o caso do AdS puro ($\epsilon = \pi/2$), há somente modos ímpares, $k = 1, 3, 5, \dots$. Como ϵ vai para zero, $|\Lambda| \rightarrow 0$, as frequências diminuem, e encontra-se todos os inteiros, $k = 1, 2, 3, \dots$ e ϵ é um valor crítico $\epsilon = 1.2345$.

A função delta suporta um estado ligado com energia $E = -k^2$, que tem a forma dada por:

$$\chi_0(\omega) = \sinh(k(\pi - \epsilon - \omega)) \approx e^{-k\omega}, \quad (3.26)$$

com k satisfazendo a relação:

$$\frac{2}{3}\tan(\epsilon) = \frac{\tanh(k(\pi - \epsilon))}{k} \Rightarrow \frac{2}{3}\cot(\epsilon) \approx \frac{2}{3\epsilon}. \quad (3.27)$$

Para discussão numérica aplica-se o método para o análogo do problema da mecânica quântica, ou seja, a equação tipo Schrödinger (Equação 2.16), para assim estimar a dependência do estado ligado massivo na tensão da brana. Este é um cálculo bastante delicado, pois como a tensão tonar-se crítica ($\epsilon \rightarrow 0$), o potencial torna-se singular. Uma aproximação [52] é:

$$E_0 \approx (1.5 - \epsilon) \sin^2(\epsilon) \rightarrow 1.5\epsilon^2 \Rightarrow m_0^2 \approx 1.5|\Lambda_{4d}^q|^2. \quad (3.28)$$

Este resultado pode ser obtido para uma análise envolvendo argumentos supersimétricos da decomposição do potencial Vulcão.

Os estados excitados tem um termo de ordem zero (em ϵ) não divergente. O primeiro termo de ordem divergente do espectro como:

$$E_n \approx n(n+3) + 0.4n^3(\epsilon)^2 + \vartheta((\epsilon)^3) \Rightarrow \quad (3.29)$$

$$m_n^2 \approx n(n+3)|\Lambda_{4d}^q| + 0.4n^3|\Lambda_{4d}^q|^2 + \vartheta(|\Lambda_{4d}^q|^3) \quad (3.30)$$

Para estimar a amplitude dos modos do gráviton na brana, é preciso conhecer as normalizações, determinadas por:

$$1 = \int \sqrt{-g}h^2 dz = \int \psi^2 dz \Rightarrow \int \psi^2 d\omega = \sqrt{|\Lambda|} \quad (3.31)$$

onde usamos à métrica AdS , ou seja:

$$ds^2 = e^{2A}dx^2 - dr^2 = e^{2A}(dx^2 - dz^2). \quad (3.32)$$

A amplitude das funções de onda na brana são

$$\psi_0^2 \approx 2 - 0.1\epsilon + \vartheta(\epsilon^2) \quad (3.33)$$

e

$$\psi_n^2 \approx 2.5\epsilon^2 + 0.8(n\epsilon^2) + \vartheta(\epsilon^3, n^2). \quad (3.34)$$

O que permite aproximar o potencial gravitacional na brana, pois as amplitudes dos modos excitados são muito menores do que o modo próximo de zero. Vão dá as ordens de correções de $|\Lambda_{4d}^q|^2$ para a gravidade anti-de Sitter, que tem um comportamento assintoticamente plano para uma gravidade de Minkowski, para distâncias da ordem $\frac{1}{|\Lambda_{4d}^q|}$. Assim, temos o potencial total efetivo da forma:

$$V(r) = \psi_0^2 \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \sum_n \psi_n^2 \frac{e^{-m_n r}}{r}. \quad (3.35)$$

Como $|\Lambda_{4d}^q| \rightarrow 0$, as massas aproxima-se de um contínuo, então podemos substituir a soma por uma integral. Então,

$$V(r) \approx \frac{e^{-|\Lambda_{4d}^q| r}}{r} + \frac{|\Lambda_{4d}^q|}{r} \int (1+n) e^{-n\sqrt{|\Lambda_{4d}^q|} r} \quad (3.36)$$

$$\approx \frac{1 + \sqrt{|\Lambda_{4d}^q|}}{r} + \frac{\sqrt{|\Lambda_{4d}^q|}}{r^2} + \frac{1 + \sqrt{|\Lambda_{4d}^q|}}{r^3}. \quad (3.37)$$

No limite que $\Lambda_{4d}^q = 0$, temos precisamente as correções de *RS* para o caso crítico. Estes resultados numéricos mostram justamente cada termo no potencial (incluindo o termo $0/r^2$) dando correções da ordem de $\sqrt{|\Lambda_{4d}^q|}$.

3.3 Limite Newtoniano modificado para o modelo Randall e Sundrum original

O potencial da teoria original de Randall e Sundrum é:

$$U(z) = \frac{l(l+1)}{z^2}. \quad (3.38)$$

Introduzindo este potencial na equação tipo Schrödinger modificada com derivadas de Jackson, com aproximação de primeira ordem do número básico podemos escrever que:

$$\left[- \left(\frac{q-1}{\ln q} \right)^2 \partial^2 z + \left(\frac{q-1}{\ln q} \right)^2 \frac{l(l+1)}{z^2} \right] \psi(z) = m^2 \psi(z). \quad (3.39)$$

As soluções para equação utilizando o *Wolfram Mathematica*, são dadas em termos de funções de Bessel:

$$\psi_m(z) \rightarrow \sqrt{z} \left(A_m J \left[\frac{1}{2} \sqrt{1-4l-4l^2}, -im_q z \right] + B_m Y \left[\frac{1}{2} \sqrt{1-4l-4l^2}, -im_q z \right] \right) \quad (3.40)$$

onde $m_q \equiv \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^{-2} m$. Podemos observar o presente reescalamto das massas como antes. Esta solução difere da usual encontrada [10] por apresentar correções da álgebra deformada. Utilizando algumas propriedades das funções de Bessel escreve-se $\psi_{m_q}(z)$ de uma forma mais simplificada como:

$$\psi_{m_q}(z) = \sqrt{z} A_{m_q} J_{l+1/2}[m_q z] + \sqrt{z} B_{m_q} Y_{l+1/2}[m_q z] \quad (3.41)$$

ou

$$\psi_{m_q}(z) = \sqrt{z} A_{m_q} J_{l+1/2}[m_q z] + (-1)^{l+1} \sqrt{z} B_{m_q} J_{-l-1/2}[m_q z]. \quad (3.42)$$

Em que:

$$J_{l+1/2}(m_q z) = \left[\frac{m_q z}{2} \right]^{l+1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+l+1/2+1)} \left[\frac{m_q z}{2} \right]^{2j} \quad (3.43)$$

Para $m_q z \gg 1$, as funções de Bessel tornam-se uma solução de onda plana como segue:

$$\psi_{m_q}(z) = \sqrt{\frac{2}{m_q}} \left[A_{m_q} \sin\left(m_q z - \frac{\pi l}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + B_{m_q} \cos\left(m_q z - \frac{\pi l}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.44)$$

Plotando alguns gráficos podemos notar que a q-álgebra proporciona uma mudança no modo como $\psi_{m_q}(z)$ evolui com a variação de l e q . Para $q = 0.1$ pequeno (Equação 3.44) temos uma amplitude de oscilação menor comparada com $q \approx 1$, em que a amplitude de

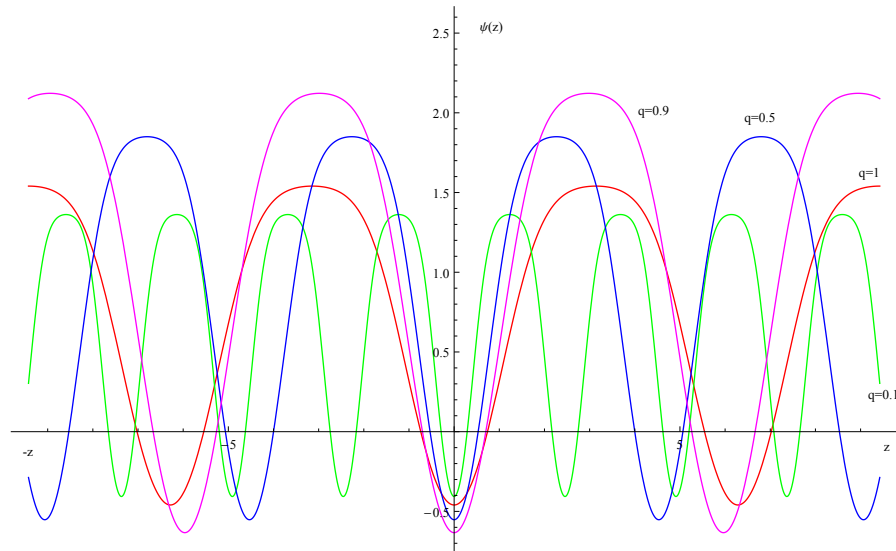


Figura 3.3: Função de onda plana $\psi(z)$ deformada para a derivada de Jackson deformada, com alguns valores de q .

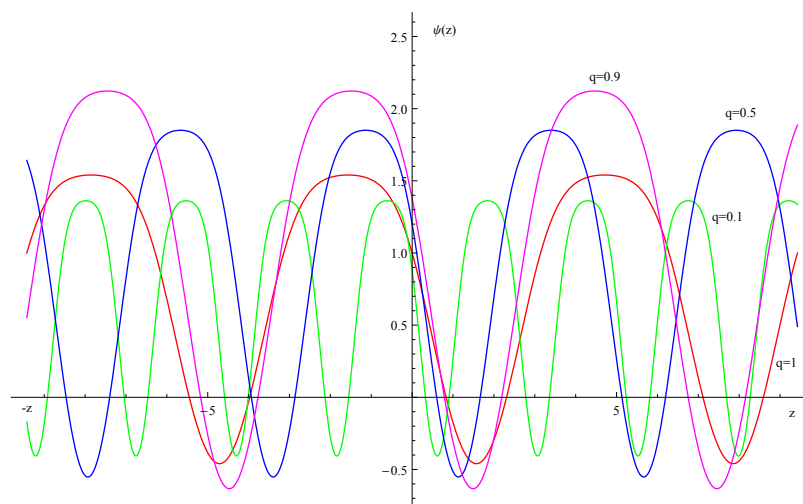


Figura 3.4: Função de onda plana $\psi(z)$ deformada para a derivada de Jackson deformada, com alguns valores de q .

oscilação vai aumentando. Estas análises podem ser observadas nas Figuras (3.3) e (3.4), respectivamente para $l = 0$ e $l = 1$.

Se $m_q z \ll 1$ (mas, $kz \gg 1$ funções de Bessel), pode-se expandir $\psi_{m_q}(z)$ como:

$$\begin{aligned} \psi_{m_q}(z) = & -\frac{B_{m_q} \sqrt{z} \Gamma(l+1/2)}{\pi} \left[\frac{2}{m_q} \right]^{l+1/2} \left[1 + \frac{1}{l-1/2} \left[\frac{m_q z}{2} \right]^2 + \dots \right] \\ & + \frac{A_{m_q} \sqrt{z}}{\Gamma(l+3/2)} \left[\frac{m_q z}{2} \right]^{l+1/2} [1 + \dots] \end{aligned} \quad (3.45)$$

As funções de onda $\psi_{m_q}(z)$ são normalizadas para $|z| \rightarrow \infty$. A correção no segundo colchete, vinda da expansão de $J_{l+1/2}(m_q z)$ para $m_q z$ pequeno, é uma série de potência em $(m_q z)^2$. A correção no primeiro colchete, vinda da expansão $Y_{l+1/2}(m_q z)$ são mais complicados, uma vez que dependem de $l+1/2$ é um número inteiro, ou não. Contudo, os dois termos indicados são os termos dominantes para $(m_q z)$ pequeno. Se $m_q z \ll 1$ temos um argumento significativo para resolver a equação Schrödinger como uma série em m_q^2 . Em que os dois primeiros termos da série mencionada são [10]:

$$\psi_{m_q}(z) = \hat{\psi}_0(z) + m_q^2 \phi(z) + \dots \quad (3.46)$$

Onde $\psi_0(z)$ é a solução de energia zero adequadamente normalizados. A primeira correção $\phi(z)$ satisfaz a equação não homogênea:

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + U_q(z) \right] \phi(z) = \hat{\psi}_0(z). \quad (3.47)$$

Combinando a Equação (3.46) com $z \gg 1/k$, com a série da Equação (3.45). Para a região $\hat{\psi}_0(z) \approx z^{-l}$, coincide com o primeiro termo da Equação (3.45) se $B_{m_q} \approx m_q^{l+1/2}$. O segundo e terceiro termos da Equação (3.45), devido a condição de contorno, o termo na expansão (3.46) torna-se $A_{m_q} \approx m_q^{-l+3/2}$. Usando este procedimento correspondente, determina-se A_{m_q} e B_{m_q} com dependência em m_q . Desde que m_q é pequeno, o termo dominante vem do segundo termo da Equação (3.44), onde o coeficiente do cosseno vai como $A_{m_q} m_q^{-1/2} \approx m_q^{-l+1}$. Daí, para normalizar a função de onda $\psi_{m_q}(z)$ como uma onda plana, devemos multiplicar a mesma por um fator global de m_q^{-l+1} . O valor da função de

onda em $z = 0$ é então extraído a partir da Equação (3.46). Assim, para ordem em m_q , temos o resultado:

$$\psi_m(0) \approx \left[\left(\frac{mk}{\frac{q-1}{\ln(q)}} \right) \right]^{l-1}. \quad (3.48)$$

Onde foi explicitado m_q com deformação através da q -álgebra. A correção para o potencial Newtoniano é dada por:

$$V(r) = \frac{G_N M_1 M_2}{r} + M_*^{2-d} \int_{m_0}^{\infty} dm m^{n-1} \frac{M_1 M_2 e^{-mr}}{r} \psi_m^2(0) \quad (3.49)$$

ou

$$V(r) = \frac{G_N M_1 M_2}{r} \left[1 + C' \left(\frac{1}{k_q r} \right)^{2(l-1)} \right]. \quad (3.50)$$

Um reescalamiento de k para um $k_q \equiv \frac{k}{\frac{q-1}{\ln(q)}}$, tem-se uma correção para o potencial Newtoniano equivale ao caso da correção da constante cosmológica do bulk de 5-dimensões em RS , ou seja, $k^2 \equiv -\Lambda_{5d}^q/12M^3$, pois $\Lambda_{5d}^q = \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \Lambda_{5d}$ [40]. Na seção anterior é uma correção na constante cosmológica da brana [9] todas munidas de um fator da q -álgebra devido a aproximação de primeira ordem da expansão do número básico para o operador de Jackson. O potencial modificado recai no caso usual no limite em $q \rightarrow 1$ como é esperado.

3.4 Os potenciais AdS_4 e dS_4 q -deformados com derivada de Jackson aproximada

Os potenciais q -deformados (AdS_4) e (dS_4) com aproximação e sem da deriva de Jackson e avaliou-se os efeitos nos dois casos através de comparação por meio de gráficos.

Assim, temos que a equação geral para flutuações é:

$$-\left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \partial_z^2 \psi(z) + \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 U(z) \psi(z) = m^2 \psi(z) \quad (3.51)$$

onde

$$U(z) = \left[\frac{3}{2}A''(z) + \frac{9}{4}A'^2(z) \right]. \quad (3.52)$$

Com uma mudança de variável nas equações acima, da forma $z = \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right) z'$, podemos reescrevê-las como:

$$-\frac{d^2\psi(z')}{dz'^2} + \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 U(z)\psi(z') = m^2\psi(z') \quad (3.53)$$

onde

$$U(z) = \left[\frac{3}{2}A''(z) + \frac{9}{4}A'^2(z) \right]. \quad (3.54)$$

Usando a Equação (3.19) com a (3.16) em z' , o potencial AdS_4 toma a seguinte forma

$$U(z') = \frac{9}{4} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \Lambda + \frac{15}{4} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \frac{(-\Lambda)}{\cos^2 \left(\sqrt{-\Lambda \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2} z' \right)} \quad (3.55)$$

onde temos que $\Lambda_{4d}^q \equiv \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \Lambda_{4d}$. Assim, podemos avaliar o modo como a q -deformação modifica este potencial plotando-o para alguns valores de q (Figura 3.5).

Conforme q vai diminuindo o potencial na Equação (3.56) vai ficando mais largo como se apresenta na 3.5. Assim, para avaliar melhor este efeito tomemos os potenciais [9], munidos da q -deformação através da mudança de variáveis imposta anteriormente e com $\Lambda_{4d}^q \equiv \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \Lambda_{4d}$. Para os potenciais as equações $U(z')$ para os potenciais dS_4 e AdS_4 , respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} U(z')_{dS_4} &= \frac{9}{4} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \Lambda + \frac{15}{4} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \frac{\Lambda}{\sinh^2 \left(\sqrt{\Lambda \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2} (|z'| + z'_0) \right)} \\ &- 3 \coth \left(\sqrt{\Lambda \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2} z'_0 \right) \sqrt{\Lambda \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2} \delta(z') \end{aligned} \quad (3.56)$$

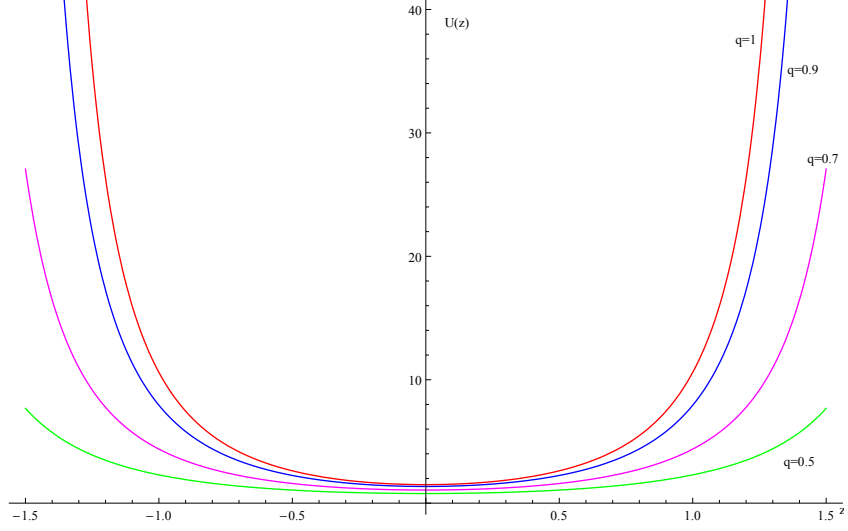


Figura 3.5: Potencial AdS_4 deformada para a derivada de Jackson deformada, com alguns valores de q .

e

$$\begin{aligned}
 U(z')_{AdS_4} &= \frac{9}{4} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \Lambda + \frac{15}{4} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \frac{(-\Lambda)}{\sin^2 \left(\sqrt{-\Lambda} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 (|z'| + z'_0) \right)} \\
 &\quad - 3 \cot \left(\sqrt{-\Lambda} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 z'_0 \right) \sqrt{-\Lambda} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \delta(z') \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

Onde o parâmetro z'_0 é definido como para os potenciais $U_{dS_4}(z')$ e $U_{AdS_4}(z')$, respectivamente, com:

$$z'_{0,dS_4} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2} \operatorname{arc} \sinh \left(\frac{1}{\sinh(c/L)} \right) \quad (3.58)$$

$$z'_{0,AdS_4} = \frac{1}{\sqrt{-\Lambda} \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2} \operatorname{arc} \sin \left(\frac{1}{\cosh(c/L)} \right) \quad (3.59)$$

Plotando os gráficos que correspondem as Equações potenciais (3.56) e (3.57), para os potenciais AdS_4 e dS_4 , temos as Figuras 3.6 e 3.7, respectivamente.

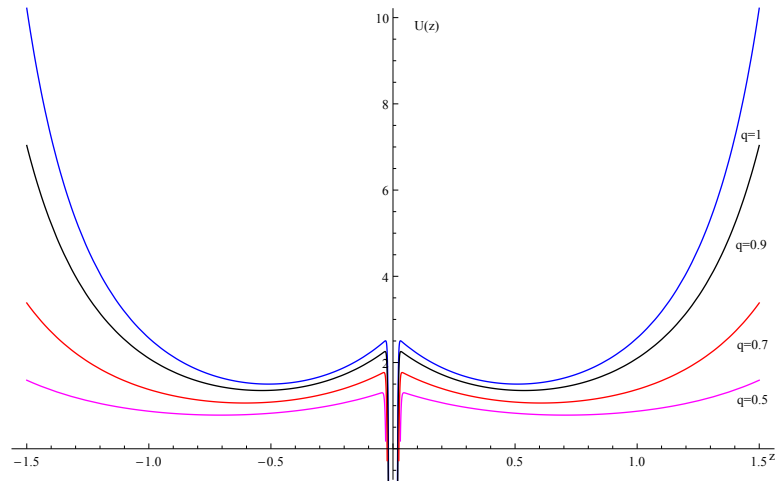


Figura 3.6: Potencial tipo taça AdS_4 deformada para a derivada de Jackson deformada aproximada, com alguns valores de q .

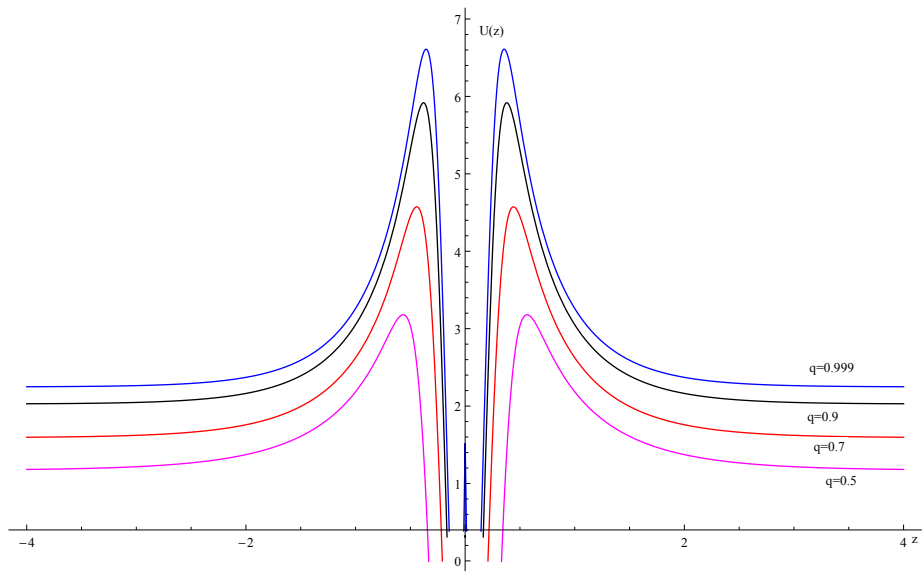


Figura 3.7: Potencial dS_4 deformada para a derivada de Jackson deformada aproximada, com alguns valores de q .

3.5 Os potenciais AdS_4 e dS_4 q -deformados sem derivada de Jackson aproximada

Utilizando o caso AdS_4 com uma mudança de variáveis para a Equação (3.17), temos que reescrever $A(z)$ em função de uma nova variável como:

$$y(z) = \cos \left[\sqrt{-\Lambda}(z + z_0) \right] \quad (3.60)$$

foi feito esse procedimento para o caso de sistemas termodinâmicos trabalhando a função de partição q -deformada (para o caso AdS_4 foi imposta a condição de periodicidade $\sqrt{|\Lambda|}z_0 = \pi/2$) [47]. Para derivada de Jackson para o caso AdS_4 sem aproximação temos:

$$A'_q(z) = \frac{[\ln(qy(z)) - \ln(y(z))]\sqrt{1-y^2(z)}\sqrt{-\Lambda}}{y(z)(q-1)} \quad (3.61)$$

e

$$A''_q(z) = \frac{\frac{[\ln(q^2y(z)) - \ln(qy(z))]\sqrt{1-q^2y^2(z)}\sqrt{-\Lambda}}{y(z)q(q-1)}}{y(z)(q-1)} - \frac{\frac{[\ln(qy(z)) - \ln(y(z))]\sqrt{1-q^2y^2(z)}\sqrt{-\Lambda}}{y(z)(q-1)}}{y(z)(q-1)}. \quad (3.62)$$

Em que podemos escrever que:

$$A'_q(z) = \frac{\ln(q)}{y(z)(q-1)}\sqrt{1-y^2(z)}\sqrt{-\Lambda} \quad (3.63)$$

e

$$A''_q(z) = \frac{\ln(q)}{q}\sqrt{1-q^2y^2(z)}\sqrt{-\Lambda} - \ln(q)\sqrt{1-q^2y^2(z)}\sqrt{-\Lambda}. \quad (3.64)$$

Assim, usando essas relações na Equação (3.54), podemos observar como a q -deformação se comporta, em que o efeito da q -álgebra para este potencial pode ser observado na Figura 3.8. Comparando, agora com a Figura 3.6 tem-se que a q -álgebra afeta a largura e

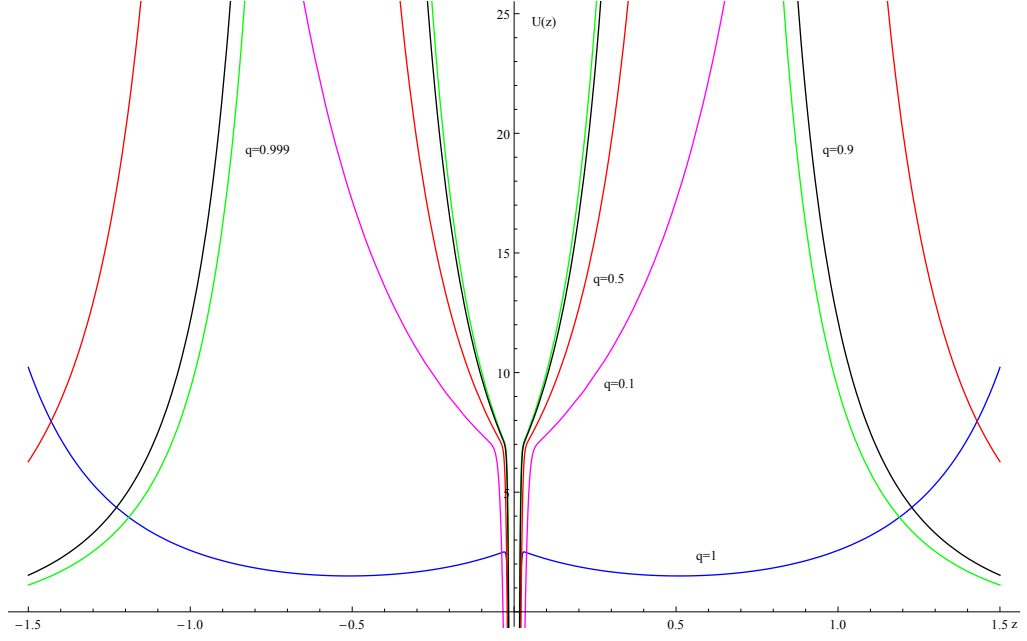


Figura 3.8: Potencial tipo taça AdS_4 deformada para a derivada de Jackson deformada não aproximada, com alguns valores de q .

altura do potencial como antes para derivada com aproximação. Já para o potencial para o caso dS_4 . Assim, vamos considerar:

$$A(z) = -\ln \left[\sinh \sqrt{\Lambda}(z + z_0) \right] \quad (3.65)$$

fazendo o mesmo procedimento para a obtenção das Equações (3.61) e (3.62), temos que:

$$y(z) = \sinh \left(\sqrt{\Lambda}(z + z_0) \right). \quad (3.66)$$

Para esse caso que relações para o caso dS_4 são dadas por:

$$A'_q(z) = \frac{[\ln(qy(z)) - \ln(y(z))] \sqrt{1 + y^2(z)} \sqrt{\Lambda}}{y(z)(q - 1)} \quad (3.67)$$

e

$$A''_q(z) = \frac{\frac{[\ln(q^2 y(z)) - \ln(qy(z))] \sqrt{1 + q^2 y^2(z)} \sqrt{\Lambda}}{y(z)q(q-1)}}{y(z)(q-1)} - \frac{\frac{[\ln(qy(z)) - \ln(y(z))] \sqrt{1 + q^2 y^2(z)} \sqrt{\Lambda}}{y(z)(q-1)}}{y(z)(q-1)}. \quad (3.68)$$

Ou ainda dados, também, por:

$$A'_q(z) = \frac{\ln(q)}{y(z)(q-1)} \sqrt{1+y^2(z)} \sqrt{\Lambda} \quad (3.69)$$

e

$$A''_q(z) = \frac{\ln(q)}{q} \sqrt{1+q^2y^2(z)} \sqrt{\Lambda} - \ln(q) \sqrt{1+q^2y^2(z)} \sqrt{\Lambda} \quad (3.70)$$

O potencial dS_4 para as relações acima, substituindo na Equação (3.54) e a função delta [9]. A extensão das equações representando graficamente para alguns valores de q apresenta-se a Figura 3.9.

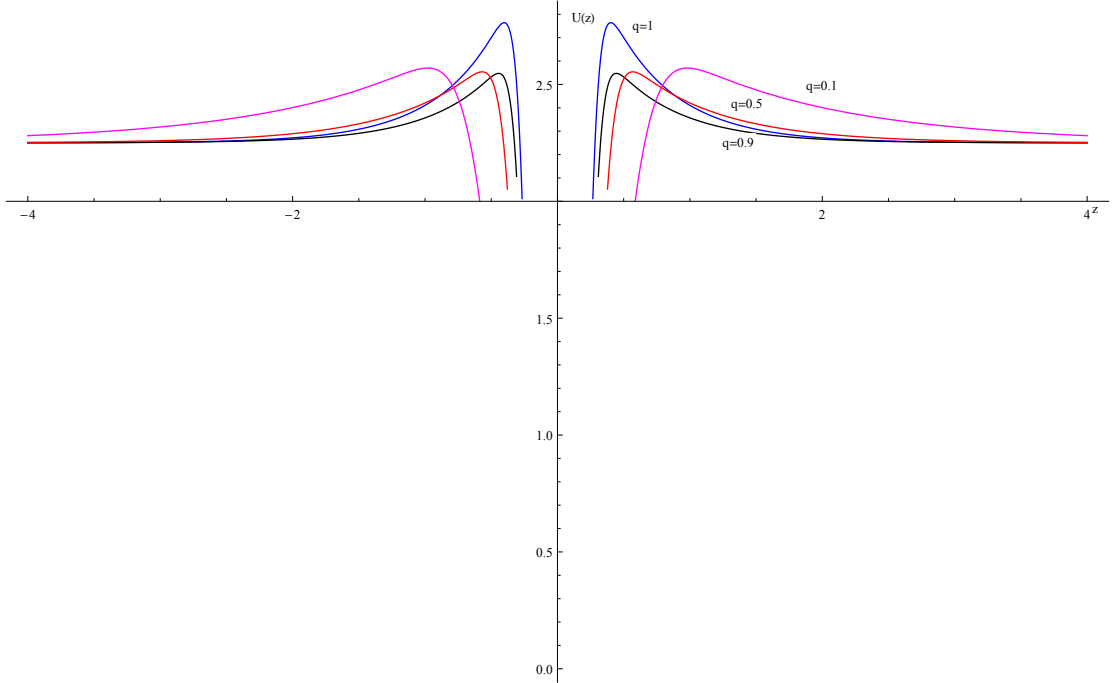


Figura 3.9: Potencial tipo taça dS_4 deformada para a derivada de Jackson deformada não aproximada, com alguns valores de q .

Nota-se que, da figura 3.9, que este é um potencial tipo barreira com:

$$-\psi''(z') + k^2\psi(z') = 0 \quad (3.71)$$

e

$$k = \sqrt{U(z) - m_n^2} \quad (3.72)$$

Anteriormente o efeito da q -deformação para o potencial AdS_4 consiste em mexer na largura e altura da caixa (Figura 3.5). Porém, para o caso dS_4 (Figura 3.7), o efeito da q -deformação é aumentar ou diminuir a altura e altura do potencial. Desta maneira, a partir dos gráficos das Figuras (3.7) e (3.9) temos os resultados aproximados e sem aproximação, diferem no sentido de que na Figura 3.7, temos Λ_{4d}^q e na Figura 3.9 temos que as contribuições $(q - 1/\ln(q))$ estão sendo compensadas. Notemos, ainda, que as soluções para a Equação (3.72) estão vinculadas para $m_n^2 < 0$ e $m_n^2 \geq 0$. Contudo, temos que considerar algumas condições sobre q e que estas podem nos dar análises totalmente diferentes das que conhecemos [10]. Assim, a aproximação WKB [10] tem-se que:

$$T(m) \approx e^{\left(\frac{q-1}{\ln(q)}\right) \int_{z_0}^{z_1} dz' \sqrt{U(z)-m_n^2}}. \quad (3.73)$$

Capítulo 4

Confinamento Linear e

Correspondência AdS/QCD

4.1 Confinamento linear

Este capítulo é dedicado a teoria do confinamento linear, tal como a QCD, em que problemas envolvendo o quadrado das massas dos mésons com autovalores de spin s ou excitações radiais dos mésons para crescer linearmente com s e n (ρ) do número n são esperados e foi proposta por Karch [57], para argumentos semiclássicos. De modo que este comportamento pode ser produzido dentro de uma teoria de 5-dimensões presumindo uma dualidade holográfica para QCD (*AdS/QCD*).

4.2 Equação tipo oscilador harmônico quântico

A equação tipo Schrödinger (Equação 3.9), advinda do estudo de flutuações em torno da métrica, para determinar as excitações do *background* gravitacional para um

$A(z)$ tipo o potencial do oscilador harmônico é da forma:

$$A(z) = -\frac{kz^2}{2}, \quad (4.1)$$

em que a mudança de variáveis da forma $\Phi_{ij} = e^{-cA(z)}\psi(z)M(x^\mu)$, essa mudança leva em um potencial da Equação (2.16) acrescido de constantes c e c^2 como:

$$U(z) = -cA''(z) + c^2A'^2(z), \quad (4.2)$$

c pode ser positivo ou negativo, em que recupera-se o potencial da Equação (2.16) com $c = -3/2$. Para estudar uma equação tipo oscilador harmônico em que $m_n^2 \alpha n$ e c é positivo. Tem-se uma motivação para escolher um potencial ($A(z)$) na forma da Equação (4.1), pois este será o responsável pela interação entre quarks (férmion), ou seja, a interação entre férmions por intercâmbio de um bóson denominado glúon (Figura 4.1). Assim, podemos escrever a Equação utilizando o potencial da Equação (4.2) utilizando (*warp factor*) da Equação (4.1).

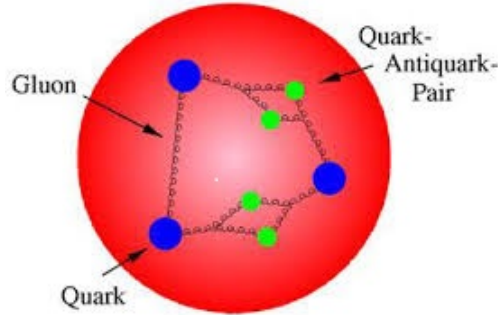


Figura 4.1: Esquema da interação entre quarks.

$$\begin{aligned} -\partial_z^2 \psi(z) + U(z)\psi(z) &= m_q^2 \psi(z) \\ \Rightarrow -\frac{\partial_z^2}{2m^*} \psi(z) + \frac{(ckz)^2}{2m^*} \psi(z) &= \left(\frac{m_q^2}{2m^*} - \frac{ck}{2m^*} \right) \psi(z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

O fator $2m^*$ é utilizado para reduzir a dimensão de energia na Equação (3.9), pois estamos com dimensão de energia ao quadrado e para uma analogia com a equação do oscilador harmônico quântico que não possui energia com essa característica nós efetuamos tal procedimento. Podemos reescrever a equação tipo Schrödinger para o oscilador harmônico usando a Equação (4.1) da seguinte forma:

$$-\frac{\partial_z^2}{2m^*}\psi(z) + \frac{(ckz)^2}{2m^*}\psi(z) = \bar{E}\psi(z), \quad (4.4)$$

Com $k = m^*\omega$, e a relação para \bar{E} é:

$$\bar{E} \equiv \frac{m_q^2}{2m^*} - \frac{ck}{2m^*} \quad (4.5)$$

onde m_q são as massas q-deformadas obtidas no capítulo 3. A Equação (4.4) é tipo oscilador harmônico quântico com operadores aniquilação e criação escritos, respectivamente, como:

$$\bar{Q}^+ = \frac{1}{\sqrt{2m^*\omega}} (\partial_z - m^*\omega cz) \quad (4.6)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{\sqrt{2m^*\omega}} (-\partial_z - m^*\omega cz) \quad (4.7)$$

O produto $\bar{Q}^+\bar{Q}$ é:

$$\bar{Q}^+\bar{Q} = \frac{1}{\omega} \left(-\frac{\partial_z^2}{2m^*} - \frac{c}{2} + \frac{(ckz)^2}{2m^*} \right) \quad (4.8)$$

em que podemos definir uma relação entre os operadores como $\bar{Q}^+\bar{Q} \equiv N$, análogo a um operador número, previsto em problemas usuais de mecânica quântica para o oscilador harmônico. Logo, podemos escrever a Equação (4.4) como:

$$\left(-\frac{\partial_z^2}{2m^*} + \frac{(ckz)^2}{2m^*} \right) = \omega \left(N + \frac{c}{2} \right). \quad (4.9)$$

Agora Hamiltoniana composta do termo tipo momento junto com o potencial é:

$$\bar{H} = \left(-\frac{\partial_z^2}{2m^*} + \frac{(ckz)^2}{2m^*} \right) = \omega \left(N + \frac{c}{2} \right). \quad (4.10)$$

Desta maneira temos uma equação de autovalor e autovetor para a equação tipo oscilador harmônico da mecânica quântica, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\bar{H}\psi(z) = \bar{E}\psi(z) \quad (4.11)$$

Daí, encontramos que espectro tipo oscilador harmônico quântico como a seguir:

$$\bar{E}_n = \omega \left(n + \frac{c}{2} \right); \quad \text{com} \quad \bar{E}_0 = \frac{c\omega}{2} \quad e \quad \psi_0(z) = \left(\frac{m^*\omega c}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}m^*\omega cz^2} \quad (4.12)$$

Implementando a deformação, como foi feito no capítulo 3 com o auxílio da Equação (4.5), à obtem-se uma relação na forma $m_{n,q}^2$, ou seja,

$$m_{n,q}^2 = 4 \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 (n+c). \quad (4.13)$$

Descreve uma espectroscopia de glueballs com $J = 2^{++}$. Em modelos de campos bosônicos no multiplete da supergravidade leva-se a 6 equações de onda independentes que contribuem para estados de glueball como $J^{PC} = 2^{++}, 1^{+-}, 1^{-+}, 0^{++}$ e 0^{-+} [58]. Ao incluir a derivada dos campos ϕ para encontrar a equação o espectro abra-se a possibilidade para partículas de Spin $J = 0$ e pode-se fazer uma comparação com o caso tipo de Regge:

$$m_n^2 = an + b. \quad (4.14)$$

Comparando as Equações (4.13) e (4.14), tem-se as relações entre os parâmetros como:

$$a = 4 \left(\frac{q-1}{\ln(q)} \right)^2 \quad e \quad ac = b. \quad (4.15)$$

Em que:

$$m_0^2 = b = (2.9)^2, \quad (4.16)$$

$$m_1^2 = a + b = (3.6)^2. \quad (4.17)$$

Resolvendo o sistema temos os valores como $b = 8.90186896$, $a = 4.34190768$ e $c = 2.05$ com $q = 1.084876780$.

$m_n^2 (\text{GeV})^2$	Predição Teórica	Experimental (PDG)	Predição Teórica (PDG)	Números Quânticos $I^G(J^{PC})$
n=0	2.9	2,9836 $\eta_c (1S)$		$0^+(0^{-+})$
n=1	3,6392	3,6392 $\eta_c (2S)$		$0^+(0^{-+})$
n=2	4,193528862	X(?????)	X(4,140)	$0^+(?^{?+})$
n=3	4,6826906680	X(?????)	X(4,350)	$0^+(?^{?+})$
n=4	5,125378004	X(?????)	X(?????)	$?^?(?^{??})$

Figura 4.2: Resultados obtidos comparados com o grupo de dados de partículas (PDG).

Nota-se ainda que na Equação (4.13) para $c = 1$ e $q \rightarrow 1$ recuperamos o caso estudado por Karch [57] e mais precisamente se $c = 2$ como foi mostrado e $q \rightarrow 1$ temos a relação de espectro para o gráviton que é uma partícula de spin 2, ou seja, desta forma c passa um significado físico. Nota-se que ao invés de utilizar a Equação (3.9), mas de posse das Equações (3.53) e (3.54) obteríamos o mesmo resultado na Equação (4.12) na variável z' , mas com a função de onda do estado fundamental $\psi_0(z')$. Este fato sugere que podemos trabalhar com uma geometria q -deformada a priori, tal que na correspondência AdS/QCD foi trabalhada com esse tipo geometria, ou seja a Equação (4.1). Das relações de comutação entre os operadores aniquilação e criação, temos:

$$[\bar{Q}^+, \bar{Q}^+] = 0 \quad e \quad [\bar{Q}, \bar{Q}] = 0 \quad (4.18)$$

e

$$[\bar{Q}^+, \bar{Q}] = -c \quad e \quad [\bar{Q}, \bar{Q}^+] = c. \quad (4.19)$$

Estas relações de comutação são semelhantes ao do oscilador harmônico usual para $c = 1$.

4.3 Correspondência AdS/QCD

Os princípios de correspondência AdS/CFT e AdS/QCD [56], são usados para descrever correspondências entre teorias em um 'background' AdS ou modificado em $d+1$

dimensões e teorias de campos conformes ou confinantes em d dimensões, respectivamente. O potencial de quark pesado é observado basicamente para confinamento. Ele tem sido medido na simulação de rede e revelou resultados de acordo com o conhecido potencial de Cornell [59]:

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{r}{a^2} + C. \quad (4.20)$$

Onde os coeficientes são ajustados para fitar o espectro de charmonium com $k \approx 0.48, a \approx 2.34 \text{ GeV}^{-1}, C = -0.25 \text{ GeV}$. Os fatores dados por: k e $1/a^2$ podem ser interpretados como $4\alpha_s/3$ e a tensão na corda, respectivamente [60].

Desde a descoberta da correspondência *AdS/CFT*, uma concreta realização das ideias de holografia nas teorias com gravidade, podem ser descritas por teorias sem gravidade em uma dimensão a menos, um grande esforço tem sido investigar o estudo destas e de outras dualidades holográficas. Uma área em que a dualidade holográfica é muito usada consiste na descrição do universo jovem, especialmente para a inflação. Uma implicação importante da correspondência *AdS/CFT* [61] é que ela resume uma interessante descrição na determinação das interações fortes entre cordas [60].

Na aproximação fenomenológica conhecida como *AdS/QCD* inicia-se com uma teoria de campos efetiva de 5-dimensões de alguma maneira motivada pela teoria de cordas e a *QCD* dentro do possível [60]. Assumi-se a linearidade assintótica das trajetórias de Regge surge de alguns *backgrounds* [62, 57]. Tais *backgrounds* são reduzidos para o *background* padrão *AdS* no *UV*, mas difere para o *IR*. Este último acaba por ser crucial para linearidade. Assim, é natural, esperar, que as interações entre quark sejam dominantes no termo de Coulomb a curtas distâncias bem como o termo linear domina em grandes distâncias.

Neste trabalho foi proposto um *background* métrico com um *warp factor* gaussiano

que gera uma simetria não AdS_5 , ou seja, não conforme dando origem a um potencial entre-quarks confinante (interações fortes entre quarks) diferente do obtido por Andreev [60] AdS_5 , que é conforme com um termo de Coulomb e linear para o potencial. Porém, a caminho que tomamos para calcular a energia de configuração é o mesmo usado em [60] e [61]. Assim, o *background* métrico de Karch [9] com $A(z) = -k_q z^2/2$ para obter o potencial entre quarks nos domínios da AdS/QCD das interações que carregam o fator q , podem ser fortes ou não.

4.4 Calculando o potencial

Consideremos o Loop de Wilson retangular C [60] existente na fronteira ($z = 0$) do espaço de 5-dimensões como apresentado na Figura 4.3. Ess loop de Wilson é um importante operador que aparece em teorias de calibre, por conta da correspondência AdS/CFT , ter uma ligação íntima com o comportamento dos quarks. De modo que auxilia na determinação do potencial quark-antiquark via correspondência AdS/CFT e a lei das áreas vai indicar se a teoria possui caráter confinante. Assim, o quark e anti-quark são estabelecidos em $x = r/2$ e $x = -r/2$, respectivamente. Tomando o limite $T \rightarrow \infty$ permite a leitura de energia de um par de valores esperados do loop de Wilson, ou seja, $\langle W(C) \rangle \approx e^{-TE(r)}$ [60]. Dado o elemento de linha da forma [9]:

$$ds^2 = e^{3A(z)/2}(\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2), \quad (4.21)$$

onde a escolha $A(z) = -\frac{k_q z^2}{2}$ torna o espaço não conforme, ou seja, não AdS . Neste cenário considerando a geometria euclideana, tem-se:

$$ds^2 = G_{nm}dx^n dx^m = e^{3A(z)/2}(dx^i dx^i + dz^2). \quad (4.22)$$

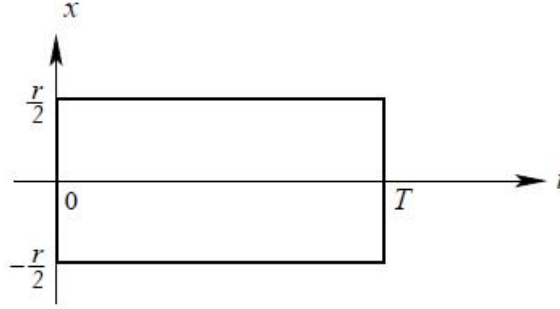


Figura 4.3: Loop de Wilson retangular.

O valor esperado do loop de Wilson. Fazendo uso da ação de Nambu-Goto com o *background* métrico da Equação (4.21), obtem-se que:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\xi^2 \sqrt{\det(G_{nm} dx^n dx^m)} = \frac{T}{2\pi\alpha'} \int_{-r/2}^{+r/2} dx e^{3A(z)/2} \sqrt{1 + (dz/dx)^2} \quad (4.23)$$

onde $\xi^1 = \tau$ e $\xi^2 = x$. Para determinar a equação de movimento para z , devemos considerar as seguintes equações

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} = 0, \quad (4.24)$$

$$L = e^{3A(z)/2} \sqrt{1 + z'^2} \quad (4.25)$$

e

$$z'' - \frac{3k_q z}{2} (z'^4 - 1) = 0 \quad (4.26)$$

Usamos as equações de Euler-Lagrange (Equação 4.24) aplicadas na Equação (4.25) e como resultado foi obtido a Equação (4.26), sendo as derivadas de z são com respeito a x . A primeira integral produz:

$$H = L - \frac{\partial L}{\partial z'} z' \quad (4.27)$$

ou

$$H = \frac{e^{-3k_q z^2/4}}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{constante}. \quad (4.28)$$

A integral constante na Equação (4.28) pode expressar um valor máximo para z . Isto ocorre quando z atinge $x = 0$. Dessa forma, a distância entre quarks é [63]:

$$\bar{L}(\tau, z) = 2 \int_{\frac{\epsilon}{z_0}}^1 dz \left(\frac{g(\tau, z)}{f(\tau, z)} \frac{f(\tau, z_0)}{\sqrt{f(\tau, z)^2 - f(\tau, z_0)^2}} \right) \quad (4.29)$$

onde $f(\tau, z) = \sqrt{g_{\tau\tau}g_{xx}}$ e $g(\tau, z) = \sqrt{g_{\tau\tau}g_{zz}}$, tal que $g_{ij} = e^{3A(z)/2}$ e $i, j = 0, 1, 2, 3, 5$.

Porém, em $z = 0$ ocorre uma divergência, desta forma introduzimos o corte (ϵ) afim de regularizar tal singularidade. Para uma expansão em ϵ , tem-se:

$$\bar{L} = \left(2\sqrt{\frac{\lambda}{k_q}} \int_0^1 dv e^{-\frac{3\lambda}{4}} (e^{3\lambda(1-v^2)/2} - 1)^{-1/2} - \frac{e^{-\frac{3\lambda}{4}} \epsilon}{z_0 \sqrt{e^{3\lambda/2} - 1}} + \vartheta(\epsilon^2) \right) \quad (4.30)$$

e

$$L = 2\sqrt{\frac{\lambda}{k_q}} \int_0^1 dv e^{-\frac{3\lambda}{4}} (e^{3\lambda(1-v^2)/2} - 1)^{-1/2} \quad (4.31)$$

onde $v = z/z_0$, $\lambda = k_q z_0^2$, e $z_0 = z|_{x=0}$. A integral da Equação (4.31) é real para $\lambda < 3/2$ [60]. Desenvolve-se uma singularidade logarítmica uma singularidade em $\lambda = 2$ e torna-se complexo para λ grande [60]. Assim, o limite superior máximo no valor máximo de z é:

$$z_0 < \sqrt{\frac{2}{k_q}}, \quad (4.32)$$

k_q tendendo à z_0 não é um limite, como deveria ser para o espaço *AdS*. Como função de z , a tensão efetiva da corda atinge um mínimo em $z = z_0$ [60]. Assim, existe um tipo de horizonte que é uma característica genérica das teorias de confinamento. Realizando uma expansão em λ até a primeira ordem na Equação (4.31) podemos mostrar que:

$$L = 2\sqrt{\frac{\lambda}{k_q}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6\lambda}} - \frac{5}{16} \sqrt{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{\lambda} \right), \quad (4.33)$$

onde esta equação permite estudar o confinamento de uma par quark e anti-quark. Para encontrar a energia de configuração foi utilizada a Equação (4.23). Porém, a integral

para configuração de energia diverge em $z = 0$, assim é preciso fazer uma regularização impondo um corte ϵ como proposto em L , de modo que:

$$S = \frac{T}{2\pi\alpha'} \int_{z_0}^z dz \frac{f(\tau, z)g(\tau, z)}{\sqrt{f(\tau, z)^2 - f(\tau, z_0)^2}} \quad (4.34)$$

e a configuração de energia como

$$\bar{E}(\bar{L}) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\frac{\epsilon}{z_0}}^1 dz \frac{f(\tau, z)g(\tau, z)}{\sqrt{f(\tau, z)^2 - f(\tau, z_0)^2}}. \quad (4.35)$$

Esta relação pode ser encontrada também no trabalho de Barosi [63]. Logo, teremos que:

$$\bar{E}(\bar{L}) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{\frac{\lambda}{k_q}} \int_{\frac{\epsilon}{z_0}}^1 dv e^{3\lambda(1/2-v^2)/2} (e^{3\lambda(1-v^2)/2} - 1)^{-1/2} \quad (4.36)$$

realizando uma expansão em ϵ ,

$$\bar{E}(\bar{L}) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{\frac{\lambda}{k_q}} \left(\int_0^1 dv e^{3\lambda(1/2-v^2)/2} (e^{3\lambda(1-v^2)/2} - 1)^{-1/2} - \frac{e^{3\lambda/2}\epsilon}{z_0 \sqrt{e^{3\lambda/2} - 1}} + \vartheta(\epsilon^2) \right) \quad (4.37)$$

em que houve uma mudança de variáveis que tanto para a expressão de E e de L o corte ϵ é arbitrário. Assim, podemos encontrar que $E(L)$:

$$E(L) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{\frac{\lambda}{k_q}} \int_0^1 dv e^{3\lambda(1/2-v^2)/2} (e^{3\lambda(1-v^2)/2} - 1)^{-1/2}. \quad (4.38)$$

O comportamento assintótico não é mais próximo de 2 [60], mas sim próximo de 3/2.

No caso de L pequeno expandindo a Equação (4.38) em termos das potencias de λ em segunda ordem, temos:

$$E(L) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{\frac{\lambda}{k_q}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6\lambda}} - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{\lambda} \right). \quad (4.39)$$

Agora escrevendo a energia de configuração E em termos de L obtemos:

$$E(L) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\frac{4\pi}{5\sqrt{6k_q}} + \frac{L}{10} \right). \quad (4.40)$$

onde a expressão (4.40) descreve a interação entre quarks para pequenas distâncias em função de L . Foi realizada uma comparação com o potencial de Cornell (4.20), e reescreveu-se

$$C_q \equiv \frac{4\pi}{5\sqrt{6k_q}} \text{ e } A^2 \equiv 10.$$

$$E(L) = \sigma \left(C_q + \frac{L}{A^2} \right); \quad \text{com } \sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (4.41)$$

As excitações de mésons podem ser pensadas como um par quark-antiquark executando um movimento semiclássico em um potencial crescendo linearmente com a separação (devido ao confinamento do fluxo do tubo) [57]. Com o momento e energia típica do movimento do quark relacionada para a massa do méson como:

$$P = E = \frac{m_n}{2} \quad (4.42)$$

foi assumido que $L \gg C_q$, para este caso, tem-se:

$$E(L) \approx \sigma \frac{L}{A^2} \quad (4.43)$$

Em que foi usado a aproximação *WKB*, como:

$$\int p dx \approx n \quad (4.44)$$

Encontra-se que:

$$m_n^2 \approx \frac{4\sigma n}{A^2} \quad (4.45)$$

É a relação para uma estimativa do tamanho do méson (glueball). Tal que, esse comportamento é também observado no limite de *t' Hooft* em (1+1) dimensões onde o confinamento linear pode ser demonstrado analiticamente [57].

Capítulo 5

Conclusão

Apresentamos a aplicação da q -álgebra nos cenários de localização de gravidade e correspondência espaço tempo Anti de-Sitter com a cromodinâmica quântica (AdS/QCD) e como os resultados encontrados foram afetados pela q -deformação, assim para as flutuações encontramos como as massas são reescaladas por um fator global: este por sua vez consiste em uma constante cosmológica efetiva reescalada de 4-dimensões. Tal correção para um potencial Newtoniano equivale ao caso da correção da constante cosmológica do bulk de 5-dimensões em Randall e Sundrum. Este reescalamto para Λ_{5d}^q modifica o raio da dimensão extra do espaço Anti-de Sitter de 5-d (AdS_5), que isto resulta em reescalar L . Nos cenários de *Karch e Randall* fizemos uma correção na constante cosmológica da brana. Todas essas modificações são munidas de um fator da q -álgebra devido a aproximação de primeira ordem da expansão do número básico para o operador de Jackson. Assim, todos os resultados para este cenário retornam ao caso usual no limite em $q \rightarrow 1$.

Para um estudo do confinamento linear de mésons (glueballs) foi proposto os possíveis candidatos para o cenário gravitacional $J^{PC} = 2^{++}$ foi observado que para $c = 1$ recuperamos o caso estudado em literaturas que foram utilizadas neste trabalho, porém

com a correção do fator global que torna o resultado não usual e devido a uma analogia com o caso de Regge c é algo da ordem do $Spin$ do gráviton, que é uma partícula de spin 2. No estudo do confinamento no cenário holográfico para λ pequeno mostramos que a q -deformação devido a introdução de um *warp factor* gaussiano afeta a parte constante da energia de configuração entre quarks. Para as excitações de mésons pensadas como um par quark-antiquark executando um movimento semiclássico em um potencial crescendo linearmente com a separação (devido ao confinamento do fluxo do tubo). Estimou-se o tamanho do méson. Tal que, esse comportamento é também observado no limite de *t'Hooft* em $(1 + 1)$ dimensões onde o confinamento linear pode ser demonstrado analiticamente.

Referências Bibliográficas

- [1] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. *An Alternative to Compactification*. Phys. Rev. Lett., v.83, p. 4690, 1999; [arXiv:hep-th/9906064].
- [2] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*. Phys. Rev. Lett., v.83, p. 3370, (1999); [arXiv:hep-ph/9905221].
- [3] CVETIC, M.; GRIFFIES, S.; SOLENG, H. H. *Local and global gravitational aspects of domain wall space-time*. Phys. Rev. D, v.48, p. 2613-2634, (1993); [arXiv:gr-qc/9306005].
- [4] CVETIC, M.; WANG, J. *Vacuum Domain Walls in D-dimensions: Local and Global Space-Time Structure*. Phys. Rev. D, v.61, p. 124020, (2000); [arXiv:hep-th/9912187].
- [5] KALOOPER, N. *Bent Domain Walls as Braneworlds* Phys. Rev. D, v.60, p. 123506, (1999); [arXiv:hep-th/9905210].
- [6] KIM, H. B.; KIM, H. D. *Inflation and Gauge Hierarchy in Randall-Sundrum Compactification* Phys. Rev. D, v.61, p. 064003, (2000); [arXiv:hep-th/9909053].
- [7] NIHEI, T. *Inflation in the five-dimensional universe with an orbifold extra dimension* Phys. Lett. B 465, v.465, p. 81-85, (1999); [arXiv:hep-ph/9905487].

- [8] DEWOLFE, O.; FREEDMAN, D. Z.; GUBSER, S. S.; KARCH, A. *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity* Phys. Rev. D 62, v.62, n.4, p. 046008, (2000); [arXiv:hep-th/9909134].
- [9] KARCH, A.; RANDALL, L. *Locally Localized Gravity*. JHEP, v.8, n.5, p. 008, (2001); [arXiv:hep-th/0011156].
- [10] CSAKI, C.; ERLICH, J.; HOLLOWOOD, T. J.; SHIRMAN, Y. *Universal aspects of gravity localized on thick branes*. Nucl. Phys. B, v.581, p. 309-338, (2000); [arXiv:hep-th/0001033].
- [11] GREMM, M. *Thick domain walls and singular spaces*. Phys. Rev. D, v.62, p. 044017, (2000); [arXiv:hep-th/0002040].
- [12] FLANAGAN, E. E.; TYE, S. H.; WASSERMAN, I. *Brane world models with bulk scalar fields*. Phys. Lett. B, v.522, p. 155165, (2001); [arXiv:hep-th/0110070].
- [13] KOBAYASHI, S.; KOYAMA, K.; SODA, J. *Thick Brane Worlds and Their Stability*. Phys. Rev. D, v.65, n.6, p. 064014, (2002); [arXiv:hep-th/0107025].
- [14] WANG, A. *Thick de Sitter 3-Branes, Dynamic Black Holes and Localization of Gravity*. Phys. Rev. D, v.66, p. 024024, (2002); [arXiv:hep-th/0201051].
- [15] SASAKURA, N. *A de-Sitter thick domain wall solution by elliptic functions*. JHEP, v.0202, p. 026 (2002); [arXiv:hep-th/0201130].
- [16] SASAKURA, N. *Analytic continuations of de Sitter thick domain wall solutions*. Phys. Rev. D, v.66, p. 065006, (2002); [arXiv:hep-th/0203032].

- [17] FELISOLA, O. C.; MELFO, A.; PANTOJA, N.; RAMIREZ, A. *Localizing gravity on exotic thick 3-branes* Phys. Rev. D, v.70, n.10, p. 104029, (2004); [arXiv:hep-th/0404083].
- [18] PORRATI, M. *No van Dam-Veltman-Zakharov discontinuity in AdS space*. Phys. Lett. B, v.498, p. 92-96, (2001); [arXiv:hep-th/0011152].
- [19] KOGAN, I. I.; MOUSLOPOULOS, S.; PAPAZOGLU, A. A. *The $m \rightarrow 0$ limit for massive graviton in dS_4 and AdS_4 How to circumvent the van Dam-Veltman-Zakharov discontinuity*. Phys. Lett. B, v.503, p. 173-180, (2001); [arXiv:hep-th/0011138].
- [20] A.A. MARINHO; F. A. BRITO; C. CHESMAN *Thermal properties of a solid through q -deformed algebra*. Physica A, v.391, p. 3424-3434, (2012); [arXiv:hep-th/1109.0570].
- [21] KOGAN, I.I; MOUSLOPOULOS, S.; PAPAZOGLU, A. A. *new bigravity model with exclusive positive branes*. Phys. Lett. B, v.501, p. 140-149, (2001); [arXiv:hep-th/0011141].
- [22] KALLOSH, R.; LINDE, A. *Supersymmetry and the Brane World*. Journal of High Energy Physics, JHEP 0002, n.005, v.2000, (2000); [arXiv:hep-th/0001071].
- [23] BEHRNDT, K.; CVETIC, M. *Anti-de Sitter vacua of gauged supergravities with 8 supercharges* Phys. Rev. D, v.61, p. 101901, (2000); [arXiv:hep-th/0001159].
- [24] MALDACENA, J.; NUNEZ, C. *Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem*. Int. J. Mod. Phys. A, v.16, p. 822-855, (2001); [arXiv:hep-th/0007018].
- [25] KARCH, A.; RANDALL, L. *Localized Gravity in String Theory*. Phys. Rev. Lett., v.87, p. 061601, (2001); [arXiv:hep-th/0105108].

- [26] CVETIC, M.; LU, H.; POPE, C. M. *Domain walls with localized gravity and domain-wall/quantum field*. Phys. Rev. D, v.63, p. 086004, (2001); [arXiv:hep-th/0007209].
- [27] PORITZ, J. F. V. *Massive gravity on a nonextremal brane*. JHEP, v.2001, n.030, p.0112, (2001); [arXiv:hep-th/0110299].
- [28] BHERNDT, K.; DALL'AGATA, G. *Vacua of $N=2$ gauged supergravity derived from nonhomogenous quaternionic spaces*. Nucl. Phys. B, v.627, p. 357-380, (2002); [arXiv:hep-th/0112136].
- [29] ODA, I. *Locally localized gravity models in higher dimensions*. Phys. Rev. D, v.64, p. 026002, (2001); [arXiv:hep-th/0102147].
- [30] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; GOMES, A. R. *Locally localized gravity and geometric transitions*. JHEP, v.4, n.11, p. 070, (2004); [arXiv:hep-th/0411088].
- [31] KACHRU, S.; KALLOSH, R.; LINDE, A.; TRIVEDI, S. P. *de Sitter Vacua in String Theory*. Phys. Rev. D, v.68, p. 046005 (2003); [arXiv:hep-th/0301240].
- [32] PERMUTTER, S. et al. *MEASUREMENTS OF Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae* The Astrophysical Journal, v.517, n.2, p. 565, (1999); [arXiv:astro-ph/9812133].
- [33] RIESS, A. G. et al. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*. The Astrophysical Journal, v.116, n.3, p. 1009, (1998); [arXiv:astro-ph/9805201].
- [34] CHAICHIAN, M.; FELIPE, R. G.; MONTONEN, C. *Statistics of Q -Oscillators, Quons and Relation to Fractional Statistics*. J. Phys. A, v.26, n.16, p. 4017-4034, (1993).

- [35] POLCHINSKI, J.; STRASSLER, M. J. *Hard Scattering and Gauge/String Duality*. Phys. Rev. Lett. v.88, p. 031601 (2002).
- [36] MIGDAL, A. A. *Multicolor QCD as a Dual-Resonance Theory*. Annals Phys. 109, p. 365-392, (1977); *ibid* 110, 46.
- [37] SON, D. T.; STEPHANOV, M. A. *QCD and dimensional deconstruction*. Phys. Rev. D, v.69, p. 065020, (2004).
- [38] ERLICH, J.; KRIBS, G. D.; LOW, I. *Emerging holography*. Phys. Rev D, v.73, p. 096001, (2006).
- [39] SANTOS, P.S. *Localização de Gravidade e Defeitos em Branas*. 2015. Dissertação (Mestrado em Física), Programa de Pós Graduação em Física Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2015
- [40] FONSECA, R.C. *Localização de Gravidade 4D em Branas SUZY*. 2013. 98 f. Tese (Doutorado em Física), Programa de Pós Graduação em Física Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [41] ZWIEBACH, B. A. *First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [42] KALUZA, T. *On The Unification Problem In Physics*. Tradução para o inglês. In: *Sitzungsberichte of the Prussian Acad. of Sci.*, p. 966, 1921.
- [43] KLEIN, O. *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity*. Z. F.Phys., v. 37, n. 12, p. 895-906, 1926.
- [44] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*. Phys. Lett. B, v. 429, n. 3-4, p. 263-272, 1998; [hep-ph/9803315v1].

- [45] LARSSON, D.; SILVESTROV, S. D. *Burchnall-Chaundy Theory for q -Difference Operators and q -Deformed Heisenberg Algebras*. J.N.M.Phys, v.19, p. 95-106 (2003).
- [46] MARINHO, A. A. A. *Aplicações da q -Álgebra em Física da Matéria Condensada*. 2014. Tese de Doutorado (Mestrado em Física) Programa de Pós Graduação em Física Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.
- [47] MARINHO, A. A. A. *Diamagnetismo de Landau q -Deformado Imerso em D -dimensões*. 2010. Dissertação (Mestrado em Física), Programa de Pós Graduação em Física Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2010.
- [48] BRITO, F. A.; CVETIC, M.; YOON, S. C. *From a thick to a thin supergravity domain wall*. Phys. Rev. D, v.64, p. 064021, (2001); [arXiv:hep-ph/0105010].
- [49] CVETIC, M.; SOLENG, H. H. *Supergravity domain walls*. Phys. Rept., v.282, p. 159-223, (1997); [arXiv:hep-th/9604090].
- [50] CVETIC, M. *Domain wall world(s)*. Int. J. Mod. Phys. A, v.16, p. 891-899, (2001); [arXiv:hep-th/0012105].
- [51] MIEMIEC, A. *A Power law for the lowest eigenvalue in localized massive gravity*. Fortsch Phys., v.49, p. 747-755, (2001); [arXiv:hep-th/0011160].
- [52] SCHWARTZ, M. D. *The Emergence of localized gravity*. Phys. Lett. B, v.502, p. 223-228, (2001); [arXiv:hep-th/0011177].

- [53] GREGORY, R.; RUBAKOV, V. A.; SIBIRYAKOV, S. M. *Opening up extra dimensions at ultra large scales*. Phys. Rev. Lett. B, v.84, p. 5928-5931, (2000); [arXiv:hep-th/0002072].
- [54] DVALI, G.; GABADADZE G.; PORRATI, M. *Metastable gravitons and infinite volume extra dimensions*. Phys. Lett. B, v.484, p. 112-118, (2000); [arXiv:hep-th/0002190].
- [55] DVALI, G.; GABADADZE G.; PORRATI, M. *A Comment on brane bending and ghosts in theories with infinite extra dimensions* Phys. Lett. B, v.484, p. 129-132, (2000); [arXiv:hep-th/0003054].
- [56] BRODSKY, S. J.; CAO F. G.; TÉRAMOND G. F. *AdS/QCD and Applications of Light-Front Holography* Commun. Theor. Phys., v.57, n.4, p. 641-664, (2012); [arXiv:hep-th/11085718].
- [57] KARCH, A.; KATZ, E.; SON, D. T.; STEPHANOV, M. A. *Linear Confinement and AdS/QCD*. Phys.Rev.D, v.74, p. 015005. (2006) ; [arXiv:hep-ph/0602229].
- [58] BROWER, C. R.; MARTHUR, S. D. *Glueball Spectrum for QCD from AdS Supergravity Duality*. Nuclear.Phys.B, v.587, p. 249-276. (2000) ; [arXiv:hep-ph/0003115].
- [59] EICHEN, E.; GOTTFRIED, K.; KONOSHITA, T.; LANE, K. D.; YAN T. M. *Charmonium: The Model* Phys.Rev. D, v.17, P. 3090, (1978).
- [60] ANDREEV, O.; ZAKHAROV V. I. *Heavy-quark potentials and AdS/QCD*. Phys.Rev. D, v.74, p. 025023, (2012); [arXiv:hep-th/0604204].
- [61] MALDACENA, J. *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity* Int.J.Theor.Phys., v.38, p. 1113-1133, (1999); [arXiv:hep-ph/9803002].

- [62] ANDREEV, O. $1/q^2$ corrections and gauge/string duality. Phys.Rev.D, v.73, p. 107901. (2006); [arXiv:hep-th/0603170].
- [63] BAROSI, L.; BRITO, F. A.; QUEIROS, A. R. *Holographic Description of Heavy-Quark Potentials in an Inflationary Braneworld Scenario*. JHEP, v.030, (2009); [arXiv:hep-th/0812484]