



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Complementaridade de Buracos Negros e a Conexão entre
Emaranhamento e Geometria**

Ildemar Barreto Veloso

CAMPINA GRANDE

- Setembro 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Complementaridade de Buracos Negros e a Conexão entre
Emaranhamento e Geometria**

Ildemar Barreto Veloso

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

CAMPINA GRANDE

- Setembro 2016 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

V443c Veloso, Ildemar Barreto.
 Complementariedade de buracos negros e a conexão entre emaranhamento e geometria / Ildemar Barreto Veloso. – Campina Grande, 2016.
 44 f. : il. color.

 Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
 "Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".
 Referências.

 1. Buracos Negros. 2. Emaranhamento. 3. Pontes de Einstein-Rosen. 4. Geometria. I. Brito, Francisco de Assis. II. Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande (PB). III. Título.

CDU 524.882:514(043)

COMPLEMENTARIDADE DE BURACOS NEGROS E A
CONEXÃO ENTRE EMARANHAMENTO E GEOMETRIA

ILDEMAR BARRETO VELOSO

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

Unidade Acadêmica de Física-UFCG

(Presidente)

Prof^a. Dr^a. Morgana Lígia de Farias Freire

Departamento de Física-UEPB

(Membro Externo)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto

Unidade Acadêmica de Física-UFCG

(Membro Interno)

*“A medida de um homem é o que
ele faz com o poder.”*

Platão.

Agradeço a Deus, que está comigo o tempo todo guiando os meus passos. Sem ele, eu não seria nem conseguiria nada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Brito, que sempre me ajudou bastante durante o decorrer deste trabalho, dedicando várias horas de disponibilidade para atendimento, fazendo sempre de forma motivadora. Um exemplo de profissional a seguir.

Aos meus pais, Ademar e Erotilde, que sempre me incentivaram a estudar, ajudando nos momentos mais difíceis e transmitindo força para sempre seguir em frente. E também à minha irmã, Rita de Cássia, por todo apoio e torcida que sempre me concedeu.

Aos professores da Unidade Acadêmica de Física (UAF), pelos vários ensinamentos durante este curso.

A todos os meus colegas de mestrado, em especial Leonardo Colaço, Frankbelson, Gilvan Bonfim, João Gustavo, Edme, Douglas, Julielson, Deusalete e Hebertt pelo companheirismo e boas conversas.

A todos que me ajudaram de forma direta ou indireta.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

*Aos meus pais, Ademar Veloso e
Erotilde Barreto.*

Lista de Figuras

2.1	Campo gravitacional descrito pela teoria clássica e pela Relatividade Geral.	7
2.2	Diagrama de Penrose do buraco negro de Schwarzschild.	10
2.3	Relação entre as coordenadas de Minkowski e de Rindler.	14
3.1	Uma bomba dentro de um recipiente.	26
4.1	Dois pontos emaranhados no vácuo quântico separados por uma fronteira.	30
4.2	O emaranhamento entre duas (CFTs) causa o surgimento de um espaço-tempo descrito por um buraco negro.	35
4.3	Esquema das variações na entropia que provocam mudanças na área da superfície que separa as regiões.	37
4.4	Se a correlação decresce, a distância entre dois pontos aumenta.	37
4.5	Pontes de Einstein-Rosen: uma forma de emaranhamento.	38

Sumário

Lista de Figuras	vii
Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Revisão sobre Buracos Negros	4
2.1 Princípios da Relatividade Geral	5
2.2 A métrica de Schwarzschild	8
3 Entropia e Informação	16
3.1 Entropia Térmica e Entropia de Emaranhamento	16
3.2 Informação	23
3.3 Entropia e Informação de uma Bomba em um Recipiente	25
4 Complementaridade, Modificação de Geometrias a partir do Emaranhamento e a Conjectura $ER = EPR$	28
4.1 Alguns aspectos sobre a Conservação da Informação em Buracos Negros	29

4.2 Surgimento de Espaços-tempos a partir do Emaranhamento e a Conexão com as Pontes de Einstein-Rosen	34
5 Considerações Finais	40
Referências	42

Resumo

A Relatividade Geral, que foi construída baseada nos princípios da equivalência e da covariância, é a teoria da gravitação que admite um espaço-tempo não euclidiano. Ela permite que o espaço-tempo se torne curvo próximo à distribuições de matéria. Os buracos negros são objetos com imensas concentrações de matéria, que provocam grandes perturbações no espaço a sua volta. A métrica correspondente ao buraco negro que analisamos foi a de Schwarzschild. Tais objetos também podem ser analisados utilizando-se a termodinâmica, com a obtenção de variáveis como temperatura e entropia. Este último conceito, é de fundamental importância para entendermos a questão do emaranhamento entre dois sistemas físicos correlacionados e a teoria de informação. Assim, nosso objetivo foi analisar alguns fatores sobre o paradoxo da conservação da informação em buracos negros. Além do mais, também analisamos como o emaranhamento entre duas regiões desconectadas pode gerar espaços-tempos conectados, e qual sua relação com as pontes de Einstein-Rosen.

Palavras-chave: buracos negros; emaranhamento; pontes de Einstein-Rosen.

Abstract

The General Relativity, that was built on the equivalence and covariance principles, is the gravitation theory which admits a non-euclidean spacetime. It permits that the spacetime becomes curve near matter distributions. The black holes are objects with huge concentrations of matter, which cause major disruption in the space around it. The corresponding metric to the black hole that we reviewed it is the Schwarzschild metric. Such objects can also be analyzed using the thermodynamic concepts, to obtain variables such as temperature and entropy. This one, will be of fundamental importance to understanding the question of the entanglement between two related physical systems and the concept of information. So, our goal it is to examine some factors about the information conservation paradox in black holes. Moreover, also we analyzed as a entanglement between two disconnected regions can generate spacetime connected, and what is its relationship with Einstein-Rosen bridges.

Keywords: black holes; entanglement; Einstein-Rosen bridges.

Capítulo 1

Introdução

Um fato que vem sendo bastante pesquisado por físicos nas últimas décadas, é o que acontece com a informação em buracos negros. O próprio Stephen Hawking escreveu em seu famoso artigo de 1976, que a informação deveria ser perdida se um buraco negro evaporasse completamente [1]. No entanto, de acordo com a Mecânica Quântica a conservação da informação é dada através da unitariedade do operador evolução temporal [2]. Assim, torna-se importante encontrar algumas respostas para tentar resolver este paradoxo.

Outro acontecimento bastante interessante surge quando analisamos a questão do emaranhamento. Ele trata-se de um fenômeno com uma forte correlação que conecta dois sistemas físicos, como dois buracos negros, por exemplo. Um dos efeitos que ele pode causar, surge quando consideramos a correspondência entre teorias de campos conformes (CFTs) e espaços-tempos anti de-Sitter (AdS), que envolve uma relação entre a física quântica de sistemas correlacionados com a gravidade. Ela também é conhecida como *gauge/gravity correspondence* [3].

No segundo capítulo iniciamos este trabalho apresentando alguns aspectos da Te-

oria da Relatividade Geral. Ela surge da tentativa de estender a Relatividade Restrita para referenciais não-inerciais. Mais especificamente, ela estende a Relatividade Restrita de modo a incorporar a gravitação. A relatividade restrita foi formulada a partir de dois postulados: (1) as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Não existe nenhum referencial inercial preferencial; (2) que a luz viaja retilineamente com velocidade c em todas as direções, em qualquer referencial inercial [4]. A Relatividade Geral é uma teoria da estrutura do espaço-tempo e da dinâmica do universo [5]. A presença de um corpo ocasiona que o espaço-tempo se curve na sua vizinhança, de modo que ele se torne não euclidiano. Esta curvatura é equivalente ao campo gravitacional, que substitui o campo gravitacional clássico. Assim, a geometria se torna também um ramo da física [6]. Além disso, ela admite a existência de buracos negros. Neste trabalho, analisamos o seu modelo mais simples, o de Schwarzschild. Esta foi a primeira solução das equações da Relatividade Geral, que descreve um corpo massivo e esférico.

No terceiro capítulo, estudamos a entropia de emaranhamento utilizando o formalismo do operador densidade. Sendo assim, fizemos uma revisão para conhecermos algumas características deste operador em questão. Esta análise é de suma importância para definirmos o conceito de informação. Subsequentemente, estudamos por meio de uma situação, como a entropia e a informação podem ser aplicadas, tendo como objetivo uma compreensão significativa das mesmas.

Posteriormente, no quarto capítulo apresentamos o que pode acontecer com a informação em buracos negros, do ponto de vista de dois sistemas de referência, e também uma solução conjectural para o paradoxo da conservação da mesma. Comprovamos que o emaranhamento assume o papel de pivô fundamental tanto para entendermos o que acontece com a informação nesta presente descrição, quanto na correspondência existente

entre teorias de campo conforme e espaços-tempos anti de-Sitter. Em tal correspondência, vimos que há duas formas de interpretarmos um estado quântico descrevendo duas regiões sem perturbações. Além do mais, mostramos por meio de um sistema físico, o que pode acontecer com a sua geometria quando variamos o emaranhamento e a informação. Por conseguinte, analisamos o que pode acontecer a dois buracos negros que estão conectados entre si. Verificamos que esta conexão trata-se de uma ponte de Einstein-Rosen. Também analisamos a relação que existe entre essas pontes em referência e as correlações quânticas. Tal relação trata-se de uma equação simbólica, conhecida como $ER = EPR$ que é uma proposta feita por Juan Maldacena e Leonard Susskind [7]. E, no quinto capítulo apresentamos as nossas conclusões sobre o trabalho.

Capítulo 2

Revisão sobre Buracos Negros

Introduzimos neste capítulo alguns aspectos do que diz a Teoria da Relatividade Geral. Ela é a generalização da teoria clássica de Newton, e substitui a Relatividade Restrita para referenciais não-inerciais. Além do mais, ela propicia implicações no contexto do espaço-tempo, levando-se em conta, que a matéria (energia) é quem provoca uma curvatura do próprio espaço-tempo a sua volta. Isto nos remete a ideia de que a gravitação e a geometria estão intimamente relacionadas. A teoria é descrita pelas equações de campo de Einstein, a qual possui vários tipos de soluções.

Posteriormente apresentamos uma das soluções destas equações, a de Schwarzschild. Esta solução descreve um buraco negro massivo e esférico, que apresenta duas singularidades no seu elemento de linha obtido. Uma destas singularidades não pode ser evitada, porém a outra pode ser evitada caso seja realizada uma mudança de coordenadas adequada. Este último ponto referido, não se trata de uma singularidade real, ela delimita o *horizonte de eventos* do buraco negro, o qual realizamos uma mudança de coordenadas para explorar a região próxima a esta superfície.

2.1 Princípios da Relatividade Geral

Os buracos negros são soluções das equações da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Portanto, é desejável que devemos conhecer alguns dos princípios básicos desta famosa teoria.

Numa série de artigos, Einstein formulou a Teoria da Relatividade Geral, que generaliza a Teoria da Relatividade Restrita para referenciais não-inerciais. Dentre alguns aspectos dessa teoria, está o fato de que o campo gravitacional é representado pela geometria de um espaço-tempo não-euclidiano. Isto quer dizer que a presença de matéria provoca uma curvatura do espaço-tempo a sua vizinhança, tal que este se torne não-euclidiano [6]. Na Relatividade Geral, um objeto chamado tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, contém toda a informação geométrica do espaço-tempo, e, para determinarmos este tensor, devemos resolver as equações de Einstein. Tais equações são uma generalização da equação do campo gravitacional newtoniano, e possuem algumas particularidades que veremos a seguir.

Esta teoria foi formulada baseada principalmente em dois princípios, o **princípio da equivalência** e o **princípio da covariância geral**. O primeiro princípio diz que as forças gravitacionais e as forças inerciais atuando num corpo, são equivalentes, se considerarmos uma região local do espaço. Já o segundo, afirma que as leis da física devem ser as mesmas em todos os sistemas de coordenadas. Além disso, as equações que a descrevem devem ter forma tensorial e serem expressas no espaço-tempo de quatro dimensões de Riemann.

As equações que descrevem o campo gravitacional relativístico, são uma generalização do campo gravitacional Newtoniano, e devem retornar a ele se aplicarmos um limite apropriado. Além do mais, o campo gravitacional Newtoniano assume a existência

de apenas um potencial Φ que descreve a teoria. Enquanto isso, na Relatividade Geral são encontrados 10 potenciais.

Estes potenciais são identificados pelas componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Que, também depois de aplicado um certo limite, devemos obter a equação de Poisson, ou seja:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.1)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e ρ é a densidade de massa do corpo produzindo o campo gravitacional [8].

Como a presença de matéria deforma o campo gravitacional produzindo curvatura, na equação de campo devemos ter uma parte que representa a geometria do espaço-tempo deformado e outra que representa a fonte do campo gravitacional. Assim, devemos perceber que a componente 00 do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, é proporcional à densidade de massa ρ . Portanto este tensor deve ser visto como fonte nas equações de campo. A outra parte que representa a geometria curvada, deve ser construída a partir do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, já que ele contém derivadas de segunda ordem do tensor métrico.

Com base nestes fundamentos, após alguns anos de diversas tentativas, até o final de 1915, Einstein estabeleceu a relação entre geometria e matéria da seguinte forma [10]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde R é o escalar de Ricci e c é a velocidade da luz.

As quantidades do lado esquerdo da Eq.(2.2), são dadas por:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\rho}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^{\rho}. \quad (2.3)$$

e

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

sendo

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (2.5)$$

os símbolos de Christoffel.

A descrição do campo gravitacional pela teoria clássica de Newton e também pela Relatividade Geral, está representada na Figura 2.1.

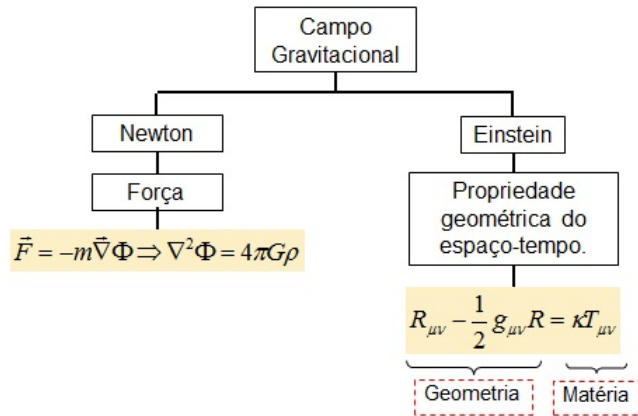


Figura 2.1: Campo gravitacional descrito pela teoria clássica e pela Relatividade Geral.

Fonte: elaborada pelo autor.

As equações de campo de Einstein apresentam algumas particularidades, a não-linearidade é uma delas. Este fato é verificado pela estrutura do tensor de Ricci. Com isso, elas não obedecem ao princípio da superposição. Isto significa que a soma das soluções de campo de Einstein não é uma solução.

Outro fato está expresso pela conservação da energia e momento ($\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$). Pois as equações de movimento da distribuição de matéria são descritas pelo tensor energia-momento considerado. Consequentemente, as equações de campo de Einstein contém as equações de movimento da matéria produzindo o campo gravitacional. Portanto, a distribuição e o movimento da matéria produzindo o campo gravitacional não podem ser determinados arbitrariamente [8, 11].

A distribuição e o movimento da matéria são determinados por funções do campo gravitacional, ou seja, pelas componentes do tensor métrico, e ao mesmo tempo o tensor métrico é determinado pela distribuição e movimento da matéria através das equações de campo de Einstein. Na relatividade geral não temos de assumir separadamente as equações do movimento e da matéria. Em vez disso, elas são consequências das identidades de Bianchi e da não-linearidade das equações de Einstein [8].

2.2 A métrica de Schwarzschild

Começaremos o nosso estudo utilizando o modelo mais simples de buraco negro, o de Schwarzschild. A métrica obtida deste caso descreve uma solução esfericamente simétrica e estática, em uma região do espaço-tempo onde o tensor energia momento $T_{\mu\nu}$ desaparece.

Todas as soluções das equações de campo de Einstein no vácuo são equivalentes a de Schwarzschild, pois ela é também a solução mais geral para simetrias deste tipo. O elemento de linha ($ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$) obtido neste caso é dado, em coordenadas esféricas, por [8, 9, 12]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.6)$$

onde podemos definir $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ como sendo o elemento de ângulo sólido, e M é a massa deste corpo gravitacional. Além do mais, por conveniência, estamos adotando $c = 1$.

A coordenada t é chamada de tempo de Schwarzschild, e representa o tempo registrado por um relógio padrão em repouso no infinito. O parâmetro r é a coordenada radial de Schwarzschild. Ela não mede a distância espacial própria a partir da origem, mas em

vez disso, é definida de tal forma que a área de uma 2-esfera é $4\pi r^2$. As coordenadas θ e ϕ são os ângulos polar e azimutal, respectivamente [12].

Este elemento de linha possui algumas características, perceba que se $M \rightarrow 0$ (que é o caso do campo gravitacional sem fontes), ou se $r \rightarrow \infty$ (que é o caso para pontos muito distantes da fonte do campo gravitacional) recuperamos o elemento de linha de Minkowski para o espaço plano, que é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.7)$$

Portanto, soluções no vácuo esfericamente simétricas são assintoticamente planas, necessariamente.

Podemos identificar a natureza estática dessa solução, por ela não apresentar termos que dependam explicitamente de t , nem termos cruzados com dt . Também, esta solução é invariante sob reflexão temporal, ou seja, pela troca $t \rightarrow t' = -t$. E também invariante por translação temporal, desde que obedeça à transformação $t \rightarrow t' = t + \text{constante}$ [13].

Além disso, devemos ficar atentos a dois valores de r em que o elemento de linha de Schwarzschild apresenta alguns problemas. Tais problemas é que nestes pontos, o elemento de linha pode apresentar algumas singularidades. Uma dessas singularidades pode ocorrer na superfície $r = 2MG$, que é conhecido como *Raio de Schwarzschild*.

Neste ponto, a componente da métrica g_{tt} desaparece, e a componente g_{rr} diverge. Assim, este ponto nos dá a impressão da existência de uma singularidade, que é algumas vezes chamada de *singularidade de Schwarzschild*.

Entretanto, podemos perceber que o determinante da métrica, $g = -r^4 \text{sen}^2\theta$, é regular em $r = 2MG$. Juntamente a isto, percebemos que a quantidade

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \approx \frac{M^2G^2}{r^6}, \quad (2.8)$$

permanece finita neste ponto.

Sendo assim, podemos evitar este tipo de singularidade a partir de uma escolha adequada de coordenadas. Como esta quantidade é um escalar, ela permanece invariante sob mudanças de coordenadas. Com isso, a verdadeira singularidade ocorre em $r = 0$. Já que esta singularidade não pode ser evitada, ela é conhecida como singularidade real, ou física, pois ela é independente do sistema de coordenadas que é utilizado [8, 9, 13].

A superfície correspondente a $r = 2MG$ delimita uma região importante do buraco negro de Schwarzschild, que é chamada de *horizonte de eventos*, e é vista por um observador externo como uma espécie de fronteira do universo [12].

A solução também pode ser representada através de um diagrama de Penrose (Figura 2.2). A região *I* corresponde ao exterior do buraco negro, ou seja $r > 2MG$. Enquanto que a parte interior é dada pela região *II*.

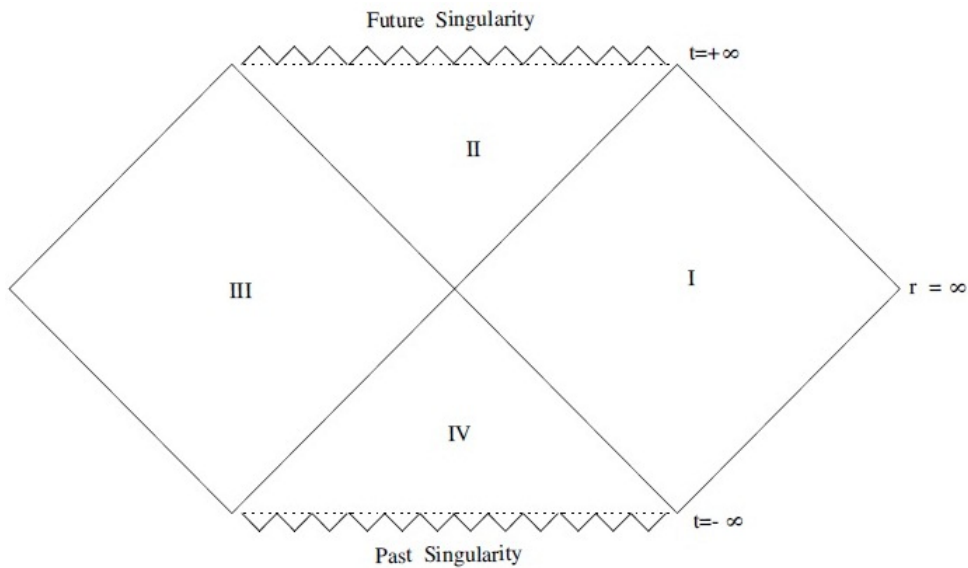


Figura 2.2: Diagrama de Penrose do buraco negro de Schwarzschild.

Fonte: SUSSKIND, L. LINDESAY, J. 2005. p16.

Os buracos negros são, em geral, caracterizados pelo fato de que tudo é sugado

para dentro dele, e nada consegue sair. Assim, a sua característica mais importante não é a singularidade no seu centro, mas o horizonte de eventos a sua volta. Um horizonte de eventos é uma superfície que separa pontos do espaço-tempo do tipo-tempo daqueles que não são [9].

Sendo assim, nos pontos que estão situados em $r > 2MG$, t é uma coordenada tipo-tempo e r tipo-espaço. Mas na região $r < 2MG$, as características das coordenadas t e r se revertem. Sendo agora t uma coordenada tipo-espaço e r uma coordenada tipo-tempo. Segue disto, que a topologia da solução de Schwarzschild não é euclidiana [13]. Quando $r \rightarrow 0$ as forças de maré divergem, e a curvatura do espaço-tempo aumenta tanto que as leis da física clássica falham nesse ponto [12].

Nesta região, a força gravitacional é tão forte que se um raio de luz se originasse lá, ele não poderia alcançar pontos que estão fora do horizonte de eventos. Um sinal de luz originando-se em $r = 2MG$, seria arrastado para o centro da singularidade [13]. Caso ele pudesse sair desta região, a velocidade de escape deveria ser maior do que a velocidade da luz.

Podemos realizar uma mudança de coordenadas em que a coordenada radial vai a menos infinito no horizonte, de modo que o sistema de coordenadas cobre toda a região $r > 2MG$. Assim, a coordenada r^* , chamada de *coordenada de tartaruga* é dada explicitamente por:

$$r^* = r + 2MG \ln \left(\frac{r - 2MG}{2MG} \right), \quad (2.9)$$

note-se que $r^* \rightarrow -\infty$ quando $r = 2MG$.

Com isso, a partir desta mudança de coordenadas, podemos obter que

$$g_{rr} dr^2 = g_{tt} (dr^*)^2, \quad (2.10)$$

ao qual nos permite escrever o elemento de linha de Schwarzschild da Eq.(2.6) na seguinte forma:

$$ds^2 = g_{tt}[dt^2 - (dr^*)^2] - r^2 d\Omega^2. \quad (2.11)$$

Onde $g_{tt} = (1 - 2MG/r)$ é o elemento temporal da métrica obtida da solução de Schwarzschild, e $g_{rr} = (1 - 2MG/r)^{-1}$ é o elemento radial desta mesma métrica.

O fato interessante é que agora a parte radial-temporal do elemento de linha assume uma forma particularmente simples, chamada de *conformemente plana*. Num espaço conformemente plano, o elemento de linha tem a seguinte forma:

$$ds^2 = F(x)dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

com $\eta_{\mu\nu}$ sendo a métrica de Minkowski. Qualquer espaço bidimensional é conformemente plano, e o espaço de Schwarzschild mantendo θ e ϕ fixos não é uma exceção a isto. Como a métrica na Eq.(2.11) possui essa característica, ela também é conformemente plana [12].

A região próxima ao horizonte de eventos pode ser explorada substituindo r por uma coordenada ρ que mede a distância própria a partir do horizonte, ou seja:

$$\rho = \int \sqrt{g_{rr}(r')} dr' \quad (2.13)$$

onde g_{rr} é o elemento radial da métrica de Schwarzschild definida anteriormente. Assim, podemos readaptar o elemento de linha e escreve-lo em termos de ρ e t . Fazendo isto, temos que:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r(\rho)}\right) dt^2 - d\rho^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2. \quad (2.14)$$

Ao resolver a integral da Eq.(2.13) nos limites de $2MG$ a r , encontramos:

$$\rho = \sqrt{r(r - 2MG)} + 2MG \operatorname{senh}^{-1} \left(\sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} \right). \quad (2.15)$$

Na região próxima ao horizonte de eventos, podemos fazer uma pequena expansão no raio de Schwarzschild ($r = 2MG + \epsilon$). Também devemos levar em consideração o fato de que $\sqrt{\epsilon/2MG} \ll 1$ [12]. Daí,

$$\begin{aligned}
\rho &\approx \sqrt{(2MG + \epsilon)[(2MG + \epsilon) - 2MG]} + 2MG \operatorname{senh}^{-1} \left(\sqrt{\frac{(2MG + \epsilon)}{2MG} - 1} \right) \\
&\approx [2MG(r - 2MG)]^{1/2} + 2MG \operatorname{senh}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2MG}} \right) \\
&\approx [2MG(r - 2MG)]^{1/2} + 2MG \sqrt{\frac{r - 2MG}{2MG}} \\
&\approx 2[2MG(r - 2MG)]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Além do mais, partindo da Eq.(2.16) para ρ , podemos obter a expressão

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= 4(2MG)(2MG + \epsilon) \left(1 - \frac{2MG}{r} \right) \\
\rho^2 \left(\frac{dt}{4MG} \right)^2 &= \left(1 - \frac{2MG}{r} \right) dt^2.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

E escrever o elemento de linha na forma que segue

$$ds^2 \cong \rho^2 \left(\frac{dt}{4MG} \right)^2 - d\rho^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2. \tag{2.18}$$

Além do mais, se estivermos interessados em analisar uma pequena região angular do horizonte de eventos, arbitrariamente centrada em $\theta = 0$, podemos substituir as coordenadas angulares por coordenadas cartesianas, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} X = 2MG\theta \cos\phi \\ Y = 2MG\theta \operatorname{sen}\phi \end{cases}. \tag{2.19}$$

Podemos introduzir uma variável temporal adimensional:

$$\omega = \frac{t}{4MG}, \tag{2.20}$$

e reescrevendo o elemento de linha como:

$$ds^2 = \rho^2 d\omega^2 - d\rho^2 - dX^2 - dY^2. \tag{2.21}$$

Dessa forma ρ e ω são variáveis radial e angular para um espaço plano de Minkowski, respectivamente. As coordenadas T e Z de Minkowski podem ser definidas por

$$\begin{cases} T = \rho \sinh \omega \\ Z = \rho \cosh \omega \end{cases}, \quad (2.22)$$

assim podemos obter o elemento de linha de Minkowski, ou seja:

$$ds^2 = dT^2 - dZ^2 - dX^2 - dY^2. \quad (2.23)$$

Obtemos a equação anterior, considerando uma região muito próxima ao horizonte de eventos, limitado por $2MG$, também levamos em consideração que a parte angular é muito pequena. Entretanto, isto demonstra que o horizonte é localmente não-singular. Portanto, para um buraco negro muito grande, percebemos que, localmente, ele é quase indistinguível de um espaço-tempo plano.

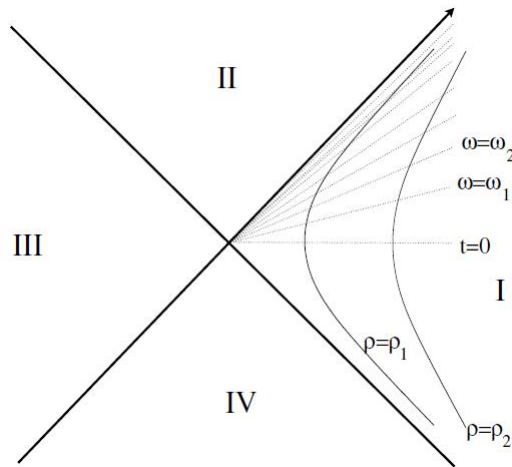


Figura 2.3: Relação entre as coordenadas de Minkowski e de Rindler.

Fonte: SUSSKIND, L. LINDESAY, J. 2005. p9.

A relação entre as coordenadas de Minkowski e as coordenadas ρ e ω é apresentada na Figura 2.3. O espaço de Minkowski é dividido em quatro quadrantes, *I*, *II*, *III* e *IV*. Apenas uma destas regiões, encontra-se fora do horizonte do buraco negro, que é

a região I . O próprio horizonte é a origem $T = Z = 0$. Percebe-se que ele é uma superfície bidimensional em um espaço-tempo quadridimensional. Isto pode parecer uma surpresa. Afinal, definimos o horizonte como sendo dado originalmente por $r = 2MG$, e portanto parece ser uma superfície tridimensional. Entretanto, não devemos esquecer que o horizonte é o lugar onde a componente temporal da métrica, g_{tt} , torna-se nula.

A aproximação da região próxima ao horizonte do buraco negro por espaço de Minkowski, é chamada de *aproximação de Rindler*. Em particular, a parte do espaço de Minkowski aproximada da região exterior do buraco negro é a região I , que é chamada de *espaço de Rindler*. A coordenada tipo-tempo ω , é o chamado tempo de Rindler. Uma translação da coordenada temporal de Rindler da forma $\omega \rightarrow \omega + \text{constante}$, é equivalente a um *boost* de Lorentz no espaço de Minkowski [6].

Fez-se esta aproximação levando-se em conta regiões locais do espaço-tempo; e com isso, o princípio da equivalência também se faz presente no espaço de Rindler.

Capítulo 3

Entropia e Informação

Neste capítulo apresentamos algumas propriedades termodinâmicas de buracos negros. Estes corpos, além de provocarem grandes perturbações no espaço-tempo devido à sua grande quantidade de massa, também possuem características desta natureza como a temperatura e a entropia. Logo após, definimos a entropia de Von Neumann, conhecida muitas vezes como entropia de emaranhamento. Esta entropia é definida em termos de um operador conhecido como operador densidade, o qual apresentamos as suas principais características. Com isso vimos que, ela é, juntamente com a entropia térmica, de fundamental importância na definição da informação contida num sistema.

A seguir apresentamos uma situação que consiste de uma aplicação, que serve de exemplo para compreendermos os significados das entropias térmica e de emaranhamento, e também da informação de um sistema.

3.1 Entropia Térmica e Entropia de Emaranhamento

A entropia é uma função de estado de fundamental importância física, e em teoria da informação. Ela é, em geral, primeiramente introduzida no contexto da termodinâmica.

Em mecânica estatística, a entropia é obtida utilizando a teoria de probabilidades em conjunção com as leis dinâmicas que governam o movimento dos constituintes microscópicos do sistema [14].

A entropia de *Von Neumann*, também conhecida como *entropia de emaranhamento*, é um pilar fundamental para entendermos a *teoria da informação*. No entanto, antes disso vamos associar a entropia a buracos negros.

Para encontrarmos a entropia relacionada à buracos negros primeiro devemos conhecer sua temperatura. Este último conceito mencionado, quando vista por um observador distante, pode ser calculada diretamente pela relação entre t e a variável temporal de Rindler ω explícita na Eq.(2.20). O parâmetro ω também pode ser interpretado como uma variável angular variando de zero à 2π . Por sua vez, o tempo euclidianizado corresponde ao inverso da temperatura β ,

$$\begin{aligned}\omega &= \left(\frac{1}{4MG}\right) t; \\ 2\pi &= \left(\frac{1}{4MG}\right) \beta; \\ T &= \frac{1}{8\pi MG}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

E além do mais, nesta relação o fator $1/4MG$ representa um déficit angular.

Se considerarmos que a energia deste buraco negro é produzida por sua massa, podemos encontrar a entropia utilizando a primeira lei da termodinâmica na forma:

$$dM = TdS,\tag{3.2}$$

que após substituírmos o valor da temperatura, e integrar a equação, encontramos para a entropia a expressão que segue:

$$S = 4\pi M^2 G.\tag{3.3}$$

Do capítulo anterior, temos que o raio de Schwarzschild é $2MG$ e a área do horizonte de eventos é $4\pi r^2$, em que r corresponde ao raio do horizonte de eventos. Utilizando estas

informações juntamente com a equação anterior, podemos encontrar que

$$S = \frac{A}{4G}, \quad (3.4)$$

onde A representa a área do horizonte de eventos.

Esta é a entropia de Bekenstein-Hawking, que é proporcional a área do horizonte de eventos. Este é um bom resultado, pois, de acordo com um observador externo, é onde toda a matéria caindo em direção ao buraco negro acumula-se. Esta entropia torna-se uma quantidade extensiva no sentido em que ela é proporcional à área do horizonte, e é representada como sendo o número de estados quânticos microscopicamente distintos que estão granulando-se no estado macroscópico que conhecemos como buraco negro [12].

Para compreendermos o significado da entropia de emaranhamento, partimos do formalismo de operador densidade, criado em 1927, por J. Von Neumann, que descreve quantitativamente situações físicas com ensembles mistos tanto quanto para ensembles puros (na literatura, o que chamamos de ensembles puros e mistos são frequentemente denominados estados puros e mistos). Neste formalismo, o operador densidade contém toda a informação fisicamente relevante que podemos obter a respeito do ensemble em questão [15].

Portanto, antes de introduzir o conceito de operador densidade, deve-se ter em mente o que são estados puros e mistos. Um estado puro é aquele caracterizado por um único vetor de estado. Enquanto isso, em estados mistos cada subsistema é representado por um vetor de estado referente a cada região.

Para um estado (ou ensemble) puro, por exemplo, o operador densidade pode ser escrito como:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (3.5)$$

Assim, neste caso específico, este operador é idempotente, e com isso podemos escrever

$\rho^2 = \rho$, ou equivalentemente, $\rho(\rho - 1) = 0$. Portanto, para o caso de ensembles puros temos, também, que:

$$\text{Tr}(\rho^2) = 1, \quad (3.6)$$

onde podemos perceber que os autovalores neste tipo de situação são zeros ou um [15].

Agora considere uma região do espaço que é descrita por um vetor de estado $|\Psi\rangle$ que possui operador densidade dado pela Eq.(3.5), do qual consta de duas subregiões A e B . Este vetor de estado pode ser representado por uma combinação linear dos subsistemas correspondentes:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha\beta} |A(\alpha)\rangle |B(\beta)\rangle, \quad (3.7)$$

em que as subregiões A e B são caracterizadas por $|A(\alpha)\rangle$ e $|B(\beta)\rangle$, respectivamente.

Pode-se representar, também, cada subsistema por um operador densidade. Para isto, devemos realizar a operação de traço sobre os graus de liberdade do outro subsistema [16]. Daí, uma descrição completa de todas as medidas de A pode ser provida pela matriz densidade ρ_A , ou seja:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho, \quad (3.8)$$

e, analogamente, todas as medidas realizadas em B , são descritas pela matriz densidade ρ_B

$$\rho_B = \text{Tr}_A \rho. \quad (3.9)$$

Ao relacionar estas subregiões descritas acima com o que apresentou-se no capítulo anterior sobre buracos negros, tem-se que uma delas corresponde ao interior do buraco negro, e a outra ao exterior, ou vice-versa.

As matrizes densidade em geral, possuem algumas propriedades descritas a seguir:

- $Tr\rho = 1$. A matriz densidade é normalizada a 1. Isto significa que todos os autovalores estão entre zero e um. Além disso, se um desses autovalores é igual a um, todos os outros devem ser nulos. Este caso em especial, trata-se de um estado puro. A operação de traço é independente da representação, com isso ela pode ser realizada usando qualquer base conveniente.
- $\rho = \rho^\dagger$. A matriz densidade é hermitiana.
- Todos os autovalores são positivos ou zero.

Uma medida quantitativa de um estado é provida pela entropia de Von Neumann como:

$$S = -Tr\rho \ln\rho. \quad (3.10)$$

Ela é zero, se e apenas se, os autovalores do operador densidade são zero. Além do mais, ela pode ser interpretada como uma medida de graus de liberdade entre A e B , e é conhecida geralmente como entropia de emaranhamento.

Emaranhamento refere-se a correlações quânticas entre o subsistema sob investigação e um outro subsistema. Mais precisamente, ele envolve dois ou mais subsistemas que estão ligados de alguma forma [12].

Desta forma, a entropia de emaranhamento para um dos subsistemas, A por exemplo, que descrevemos acima, é:

$$S_A = -Tr\rho_A \ln\rho_A. \quad (3.11)$$

Outra característica da entropia de emaranhamento é o fato de que as entropias dos subsistemas são iguais, ou seja, $S_A = S_B$. Esta igualdade é assegurada pelo fato das matrizes densidade das regiões A e B , ou seja, ρ_A e ρ_B possuírem os mesmos autovalores.

Esta relação que estabelece a igualdade entre estas entropias, é verdadeira apenas para o caso em que o estado combinado é puro [12].

Vale salientar que se a entropia dada pela Eq.(3.10) não for nula, ela apresenta o fato que no sistema global existem correlações cruzando a superfície que separa os diferentes lados que existem neste sistema [16].

Assim, podemos perceber que a entropia de Von Neumann é uma medida do número de estados que tem uma probabilidade apreciável no ensemble estatístico. Além disso, não devemos confundi-la com a entropia térmica da segunda lei da termodinâmica.

Para calcular o operador densidade, necessitamos de um sistema que pode ser dividido em subregiões A e B , que podem representar o interior e o exterior de um buraco negro, por exemplo. O funcional que descreve as regiões A e B , $\Psi(A, B)$, pode ser obtido via integral de caminho. Após o uso deste método, temos que:

$$\Psi(A, B) = 1/\sqrt{Z} \langle A | e^{-\pi H} | B \rangle. \quad (3.12)$$

Logo, o operador densidade pode ser calculado utilizando variáveis contínuas, como [12]:

$$\begin{aligned} \rho(B, B') &= \int \Psi^*(A, B) \Psi(A, B') dA \\ &= \frac{1}{Z} \int \langle B | e^{-\pi H} | A \rangle \langle A | e^{-\pi H} | B' \rangle dA \\ &= \frac{1}{Z} \langle B | e^{-2\pi H} | B' \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde A' e B' são outras subregiões.

Assim, identificamos que:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad (3.14)$$

onde $\beta = 2\pi$ e Z é a função de partição dada por $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$.

Claramente, a equação acima descreve um sistema com Hamiltoniana H que está em equilíbrio térmico com temperatura $T = 1/\beta$. Esta relação representa o operador

densidade térmica de Maxwell-Boltzmann,

$$\rho_{MB} = e^{-\beta H} / \text{Tr} e^{-\beta H}. \quad (3.15)$$

Com isso, a entropia térmica (S_T) deste caso em especial é:

$$S_T = -\text{Tr} \rho_{MB} \ln \rho_{MB}. \quad (3.16)$$

Vamos considerar um grande sistema de energia total E e que está em um estado puro com entropia nula. Ele é composto de vários pequenos subsistemas similares que interagem tão fracamente, que podemos desprezar esta interação. Cada subsistema tem uma energia média ϵ . O operador densidade térmica de cada subsistema é dada por:

$$\rho_i = e^{-\beta H_i} / Z_i, \quad (3.17)$$

onde H_i representa a energia do subsistema. A forma desta equação é a matriz densidade térmica que maximiza a entropia para uma dada energia média ϵ .

A *coarse grained entropy* (entropia de granulação grossa) ou entropia térmica, que representa do sistema composto, é definida pela soma das várias entropias dos pequenos subsistemas (σ_i), ou seja, $S_T = \sum_i S_i$. Esta entropia é a que usualmente pensamos no contexto da termodinâmica. Enquanto isso, a *fine grained entropy* (entropia de granulação fina) é também chamada de entropia de emaranhamento. Uma delas surge nos estudos da termodinâmica, e a outra quando tratamos sistemas emaranhados.

Para melhor compreender a entropia de emaranhamento, considere um subsistema arbitrário B de A que pode consistir de um, vários, ou de todos os subsistemas σ_i . Normalmente, a entropia de emaranhamento $S(B)$ de B com o outro subsistema remanescente $A - B$, é menor que a entropia térmica de B , ou seja, $S_T(B) > S(B)$. Quando B se aproxima de A , a entropia de emaranhamento tende a zero [12].

A entropia térmica e a entropia de emaranhamento, tem papel fundamental em teoria da informação, a qual vamos analisar a partir de agora.

3.2 Informação

Com as entropias térmica e de emaranhamento exploradas anteriormente, podemos definir o conceito de informação, visto que este conceito é definido utilizando-se os dois tipos de entropia mencionados. Entretanto, veremos primeiro como a informação pode ser conservada em um sistema.

Na mecânica clássica assim como na mecânica quântica, a informação não é perdida em um sistema fechado e isolado. Na mecânica clássica este princípio é confirmado pelo teorema de Liouville, que afirma que o volume de uma determinada região sob estudo é sempre conservado. Assim, se conhecemos o volume de um sistema que possui alguma determinada informação, ao evoluir no tempo, se o volume permanecer o mesmo, a informação será conservada.

Enquanto isso, do ponto de vista da mecânica quântica, a conservação da informação é expressa pela unitariedade do operador evolução temporal. O análogo do volume de um sistema descrito na mecânica clássica, é a dimensionalidade do subespaço N . A unitariedade da evolução temporal assegura que N é conservado com o tempo [12]. A definição desta teoria tem um grande impacto, pois ela encontra-se presente em uma contradição que vem perturbando grande parte dos físicos há muito tempo: o paradoxo da perda de informação em buracos negros. Este problema surge de um aparente conflito entre a *radiação de Hawking* de um buraco negro, e o fato que a evolução temporal na mecânica quântica é unitária. Enquanto o primeiro diz que a informação de um sistema indo em direção a um buraco negro desaparece, o segundo afirma que a informação deve

ser conservada [17, 18].

Após a análise de como a informação (I) pode ser conservada em um sistema físico, tem-se que esta pode ser definida pela diferença entre a entropia térmica e a entropia de emaranhamento, ou seja [12]:

$$I = S_T - S. \quad (3.18)$$

Se não existir emaranhamento, a informação (I) torna-se apenas a entropia térmica do sistema.

Pode-se pensar que a informação em um determinado sistema varia suavemente de zero (para o subsistema σ_i), até algum determinado valor. Entretanto, não é isso que acontece; na verdade, para subsistemas que são menores que a metade do sistema total, a informação é desprezível.

Considerando um sistema global A que é dividido em duas regiões, B e $A - B$. Então, pode-se perceber da última expressão, dada pela Eq.(3.18), que quando $B < (1/2)A$, a informação torna-se aproximadamente nula ($I \rightarrow 0$), e com isso obtemos $S_T(B) \cong S(B)$.

Para entender o comportamento da entropia para o caso de subsistemas que são maiores que a metade do sistema total, ou seja, $B > (1/2)A$, tem-se que levar em conta alguns fatos. Já mencionamos na seção anterior, que no caso que o sistema total é um estado puro, existe uma propriedade da entropia de emaranhamento entre dois subsistemas interagindo. Tal propriedade retrata que esta entropia em questão, torna-se igual para os dois subsistemas. Neste caso, para a situação a qual se descreve encontra-se que:

$$S(A - B) = S(B). \quad (3.19)$$

Com isso, tem-se também que $S(A - B) \cong S_T(A - B)$. E com estes resultados, obtemos que $S(B) \cong S_T(A - B)$.

A entropia térmica do subsistema $A - B$ é da ordem de $(1 - f)S_T(A)$, visto que $A - B$ é um subsistema de A , e f é uma fração dos graus de liberdade contidos em B . Assim, a informação torna-se desprezível para subsistemas menores que a metade do sistema total. Entretanto, considerando a outra situação em que o subsistema é maior que a metade sistema total, obtemos:

$$\begin{aligned}
 I(B) &= S_T(B) - S(B) \\
 &= S_T(B) - S_T(A - B) \\
 &= fS_T(A) - (1 - f)S_T(A) \\
 &= (2f - 1)S_T(A),
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

para a expressão da informação.

3.3 Entropia e Informação de uma Bomba em um Recipiente

Pode-se compreender o significado de entropia térmica, da entropia de emaranhamento e da informação, através de uma aplicação que consiste de um sistema com uma bomba no interior de um recipiente. O recipiente possui paredes que não permitem a troca de matéria e energia com o meio externo e um pequeno buraco no recipiente que conecta o interior com o exterior do recipiente (Figura 3.1). O sistema total consiste do subsistema A que representa o meio externo, e do subsistema B que corresponde ao interior do recipiente.

Inicialmente, a bomba está no interior do recipiente que possui entropia nula. Quando a bomba explode, ela preenche o recipiente com radiação e com isso a entropia térmica do recipiente aumenta, mas a entropia de emaranhamento ainda permanece nula,

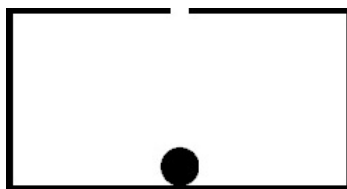


Figura 3.1: Uma bomba dentro de um recipiente.

Fonte: elaborada pelo autor.

daí, tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_T(B) \neq 0 \\ S(B) = S(A) = 0 \end{array} \right. . \quad (3.21)$$

Após preencher todo o recipiente, a radiação começa a escapar lentamente pelo buraco do recipiente até o meio externo. O resultado disto, é que os subsistemas A e B , correspondentes ao exterior e interior do recipiente, tornam-se emaranhados. A entropia de emaranhamento, que é igual para A e B , começa a aumentar. Assim, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\text{Emaranhamento}} \neq 0 \\ S_T(A) \neq 0 \\ S_T(B) \neq 0 \end{array} \right. . \quad (3.22)$$

Eventualmente, toda a radiação escapa do recipiente. A entropia térmica do interior bem como a de emaranhamento no recipiente tendem a zero. Mas a região exterior possuirá entropia não-nula. Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\text{Emaranhamento}} = 0 \\ S_T(A) \neq 0 \\ S_T(B) = 0 \end{array} \right. . \quad (3.23)$$

Ao mesmo tempo, a entropia térmica no exterior do recipiente tem aumentado até seu valor final. A segunda lei da termodinâmica assegura que a entropia no exterior é maior

que no interior do recipiente só depois da explosão. Mas, a entropia de emaranhamento desaparece, uma vez que os subsistemas não estão mais emaranhados.

Dessa forma a entropia de emaranhamento deve ser menor que a entropia térmica de A ou B . Além disso, quando a entropia térmica fora do recipiente aumenta até o ponto que se iguala à entropia em seu interior $S_T(A) = S_T(B)$. Neste ponto, temos também que a entropia de emaranhamento é igual a entropia térmica de qualquer um dos subsistemas. Assim, este é o ponto onde a informação fora do recipiente começa a crescer. Antes disso, uma boa quantidade de radiação tem escapado, mas nenhuma informação.

É útil definir este momento em que a informação começa a surgir. Este tempo é chamado de *information retention time* (tempo de retenção de informação). Ele é a quantidade de tempo que leva para recuperar alguma quantidade de informação sobre o estado inicial do recipiente.

Assim, ao observar como a entropia térmica e a entropia de emaranhamento surgem a partir da ilustração da Figura 3.1, observamos como a conservação da informação aparece para um sistema convencional. A consequência deste princípio é que a radiação final no exterior do recipiente deve estar em um estado puro.

A descrição da evolução de vários tipos de entropia segue de muitos princípios gerais. Isto também aplica-se à observações realizadas fora de um buraco negro que veremos no próximo capítulo.

Capítulo 4

Complementaridade, Modificação de Geometrias a partir do Emaranhamento e a Conjectura

$$ER = EPR$$

Neste capítulo se evidencia alguns fatos problemáticos que são encontrados sobre a conservação da informação de diferentes sistemas de referência que podem, ou não, cruzar o horizonte de eventos de um buraco negro. Para isto, tem-se que levar em consideração as ideias concernentes aos conteúdos que foram vistos nos capítulos anteriores. Também apresenta-se uma possível solução conjectural para o paradoxo da conservação da informação, proposta por Leonard Susskind, conhecida como complementaridade do buraco negro.

Posteriormente estudamos como um estado quântico que corresponde a espaços-tempos desconectados pode gerar um espaço-tempo que descreve um buraco negro através

do emaranhamento, e o que pode acontecer com a geometria quando varia-se tanto o emaranhamento quanto a informação.

A seguir, apresentamos de uma forma geral o que são as pontes de Einstein-Rosen e a sua relação com as correlações quânticas, através da solução conjectural de Juan Maldacena e Leonard Susskind [7, 21]. Esta foi proposta baseada no trabalho de Mark Van Raamsdonk [20], o qual relaciona emaranhamento e geometria. Também estudamos como a monogamia do emaranhamento desempenha seu papel na informação em buracos negros.

4.1 Alguns aspectos sobre a Conservação da Informação em Buracos Negros

Nesta seção mostramos quais são os principais problemas que podem ser encontrados com a conservação da informação, durante o processo de formação e evaporação de buracos negros. Veremos quais são os pontos de vista que podem ser analisados, e também suas consequências.

Contudo, antes de apresentar quais são as controvérsias encontradas para a explicação da conservação da informação em buracos negros, vale lembrar que estamos descrevendo sistemas com horizontes. Assim, dois pontos emaranhados no vácuo quântico (Figura 4.1) obedecem uma típica função de correlação, dada por:

$$\langle 0 | \Phi(x_A) \Phi(x_B) | 0 \rangle = \frac{1}{\Delta^2}. \quad (4.1)$$

A correlação diverge quando os dois pontos encontram-se na fronteira.

Os buracos negros são normalmente pensados como corpos altamente massivos que consomem toda a matéria que passa através de seus horizontes, sem qualquer esperança

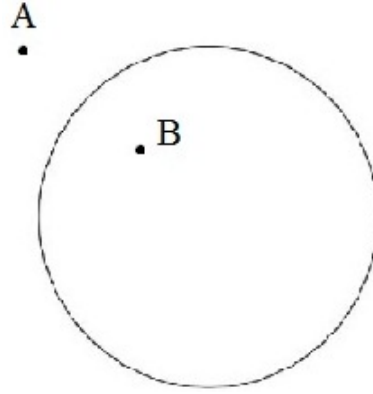


Figura 4.1: Dois pontos emaranhados no vácuo quântico separados por uma fronteira.

Fonte: elaborada pelo autor.

de recuperação. Essencialmente, eles agem como “ralos cósmicos” no espaço-tempo, removendo permanentemente matéria e energia do universo ao seu redor. De acordo com Hawking, este ponto de vista foi uma objeção. Segundo ele, depois de terem convertido tudo em radiação térmica, os buracos negros evaporam e eventualmente desaparecem [19].

O próprio Hawking em 1976, trouxe à tona a questão de se a informação de um sistema realmente é perdida durante o processo de formação e evaporação de buracos negros. A destruição da informação neste processo mostrou-se ser um problema, pois isto desafia as leis da mecânica quântica, que afirmam que a informação deve ser conservada.

Vejam os o que diz a mecânica quântica sobre a conservação da informação. De acordo com ela, a progressão de um estado inicial para um estado final é governada pelo operador unitário evolução temporal:

$$|\psi_{out}\rangle = S |\psi_{in}\rangle. \quad (4.2)$$

Uma forma de afirmar a conservação da informação é através da própria unitariedade deste operador em questão. Pois, o operador evolução temporal, que também pode ser representado matricialmente, possui uma inversa, então o estado inicial pode ser recuperado

do estado final

$$|\psi_{in}\rangle = S^\dagger |\psi_{out}\rangle. \quad (4.3)$$

Consideramos o ponto de vista de observadores que estão fora do horizonte de eventos. Como percebemos das relações acima, o operador evolução conecta os estados inicial e final. Todos os experimentos realizados em partículas que estão localizadas na região externa, podem ser descritos por uma matriz densidade, pois ela contém toda a informação física possível do sistema,

$$\rho_{out} = Tr_{singularity} |\psi_{out}\rangle \langle \psi_{out}|. \quad (4.4)$$

Onde $Tr_{singularity}$ significa o traço realizado sobre todos os estados na singularidade. Desse modo, o observador externo ao buraco negro verá um estado caracterizado por uma matriz densidade.

Além do mais, já vimos que o estado obtido por este observador é de natureza térmica. Do ponto de vista de um observador externo, nada pode ultrapassar o horizonte de eventos. Para ele, um sistema que se aproxima do buraco negro é termalizado no horizonte. Logo, o operador densidade referido é de natureza térmica.

Hawking passou a fazer argumentos em que a informação do estado poderia não ser restaurada se o buraco negro fosse completamente evaporado. Na verdade, o que poderia acontecer é que ela se perde durante o processo inteiro de formação e evaporação, ou ser restaurada para a região exterior no final deste processo, através da radiação térmica expelida pelo buraco negro [12].

Entretanto, como já estudamos no capítulo anterior, a informação pode ser oculta em um sistema através de sua entropia. Quando o buraco negro emite metade de seu valor original, temos que $S_{Termica} = S_{Emaranhamento}$ neste ponto. A partir deste ponto,

ele deve começar a emitir informação em forma de radiação térmica. Antes da entropia térmica tornar-se igual à entropia de emaranhamento, parte de sua entropia já tem sido eliminada, mas ainda nenhuma informação. Aqui também é válido o fato que a entropia de emaranhamento da radiação não pode ser maior que a entropia térmica remanescente do buraco negro. Assim, se toda a informação foi emitida no final do processo de evaporação, uma lei da natureza deveria ser violada do ponto de vista de um observador externo.

Em outras palavras, do ponto de vista de um observador externo, o horizonte emite a informação na radiação térmica. Já um sistema que cai livremente não observaria nada de anormal, ele cruzaria o horizonte juntamente com sua informação. Somente depois de atravessá-lo, ele encontraria uma grande barreira acima dele, chamada muitas vezes de *brick wall*. Isto impede que qualquer tipo de comunicação aconteça entre os dois observadores, uma vez que aquele que caiu livremente tenha cruzado o horizonte.

Por último deve-se levar em conta o *quantum xerox principle*, muitas vezes conhecido como princípio da não-clonagem. O princípio da conservação da informação requer que toda a informação deve ser retornada para fora durante a radiação térmica do buraco negro. O princípio da equivalência, por outro lado, afirma que a informação contida num sistema que cai livremente deve atravessar o horizonte. O princípio da não-clonagem se opõe a isto. Sendo assim, o horizonte não pode duplicar a informação, enviar uma cópia ao buraco negro e emitir uma segunda cópia para fora.

Com isso chegamos a um impasse. É aqui que se se faz presente o paradoxo. Parece que alguma lei da natureza deve ser violada, pelo menos para algum observador.

Uma solução que foi encontrada para resolver este problema, é a chamada complementaridade do buraco negro. Ela afirma que nenhum observador testemunha uma violação de alguma lei da natureza.

Para um observador externo, um buraco negro é um sistema complexo do qual a entropia é a medida da sua capacidade de armazenar informação. Esta entropia pode ser entendida como o número de microestados referentes aos graus de liberdade que correspondem ao buraco negro. Ela não nos informa o que são estes graus de liberdade, mas podemos estimar o seu número, que é da ordem da área do horizonte de eventos.

Além disso, o observador externo afirma que o buraco negro pode absorver, termalizar, e eventualmente emitir toda a informação em forma de radiação térmica. Em qualquer momento, a entropia de emaranhamento não pode ser maior que a entropia térmica do buraco negro. No final do processo de evaporação, toda a informação deve estar na radiação térmica que foi emitida.

Para um observador caindo livremente, a complementaridade do buraco negro assegura que o princípio da equivalência deve ser respeitado. Isto significa que contanto que o buraco negro seja muito maior que o sistema em queda livre, o horizonte é visto como um espaço-tempo plano. Nem altas temperaturas ou outras anomalias são encontradas [12].

Pode-se entender melhor o significado da complementaridade do buraco negro através de um exemplo. Considere dois observadores, Bob e Alice. Alice cai no buraco negro, e Bob permanece fora e testemunha a queda de Alice. De acordo com o princípio da equivalência de Einstein, Alice fica sujeita à um espaço-tempo plano quando ela se aproxima do buraco negro (assumindo um buraco negro suficientemente grande). No entanto, da perspectiva de Bob, Alice deve ser termalizada próximo ao horizonte, com a informação que está sendo levada com ela. Mas de acordo com a complementaridade, ambos os eventos podem ocorrer. Isso ocorre porque Alice e Bob nunca podem discordar da experiência de um ou do outro, uma vez que Alice cruzou o horizonte [19].

Nenhuma contradição óbvia é encontrada por um observador externo, desde que o observador em queda não pode enviar algum tipo de sinal de dentro do horizonte.

4.2 Surgimento de Espaços-tempos a partir do Emaranhamento e a Conexão com as Pontes de Einstein-Rosen

Agora analisamos como o emaranhamento pode estar ligado à geometria de certos sistemas físicos, e o que pode acontecer com ela se o emaranhamento entre algumas regiões deste sistema variar.

Com este objetivo, ao utilizar a dualidade existente entre teorias de gauge e gravidade, que corresponde a uma equivalência entre Teorias de Campo Conformes (CFTs) e espaço-tempo anti de-Sitter (AdS). A correspondência (AdS)/(CFT) representa uma dualidade entre duas teorias físicas, que são a teoria quântica de campos e a gravidade. A CFT é uma teoria de campo quântica que é invariante sob transformações conformes (que preserva ângulos localmente). Enquanto que o espaço-tempo AdS trata-se de uma variedade de Lorentz que corresponde à um hiperboloide [3].

Duas regiões são necessárias para descrever CFTs. Cada região é caracterizada por um vetor de estado correspondente, $|\Psi_A\rangle$ e $|\Psi_B\rangle$ por exemplo. Se estas regiões não estão emaranhadas, podemos representar o sistema total por:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle. \quad (4.5)$$

Contudo, a descrição do sistema total possui outra forma se existir emaranhamento entre

as regiões A e B , e neste caso tem-se

$$|\Psi(\beta)\rangle = \sum_i e^{-\beta H_i/2} |E_i\rangle \otimes |E_i\rangle, \quad (4.6)$$

onde $|E_i\rangle$ representa o autoestado de energia para cada região.

Aqui encontra-se um fato marcante, o estado representado pela Eq.(4.6) pode ser entendido de duas formas. A primeira é que ela representa uma superposição de espaços-tempos desconectados. A segunda interpretação é que este estado descreve o espaço-tempo de um buraco negro do tipo AdS. Pois, o emaranhamento entre as regiões A e B provocou o surgimento do espaço-tempo descrito pelo buraco negro. Isto pode ser visto na Figura 4.2.

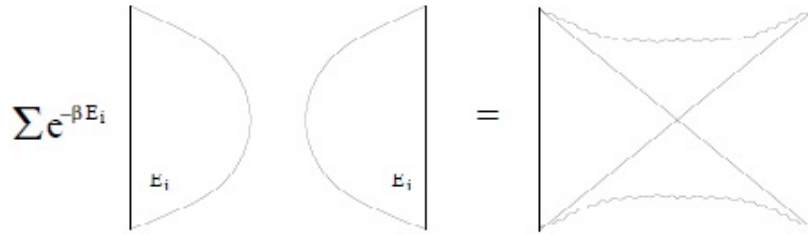


Figura 4.2: O emaranhamento entre duas (CFTs) causa o surgimento de um espaço-tempo descrito por um buraco negro.

Fonte: RAAMSDONK, M. V. 2010. p2.

Uma forma de comprovar a veracidade desta afirmação, pode ser dada se realizarmos a operação de traço na Eq.(4.6). Dessa forma, obtemos um operador densidade térmica. Ou seja, um observador em uma das regiões do buraco negro descrito acima (no espaço de Rindler, por exemplo), verifica que o estado correspondente é de natureza térmica, com temperatura $T = 1/\beta$. Daí,

$$\rho_T = Tr(|\Psi\rangle \langle\Psi|) = \sum_i e^{-\beta H_i} |E_i\rangle \langle E_i|. \quad (4.7)$$

Posteriormente, estudamos quais os efeitos que podem ser causados na geometria de um sistema, se acontecer variações na entropia de emaranhamento de uma região deste sistema.

Considerando que temos uma região que é dividida em duas partes e admitindo que exista uma correlação entre os subsistemas correspondentes, podemos calcular a entropia de emaranhamento S_A ou S_B , utilizando o operador densidade referente à cada subsistema.

Pode-se entender que esta entropia também pode ser representada pela expressão de Bekenstein-Hawking, que vimos anteriormente,

$$S = \frac{A}{4G}. \quad (4.8)$$

Onde A significa a área do horizonte de eventos.

Portanto, no contexto dos buracos negros a entropia de Bekenstein-Hawking pode ser entendida como a entropia de emaranhamento entre o interior e o exterior do próprio, separados pelo horizonte de eventos.

Ao analisar a proporcionalidade entre entropia e área da Eq. (4.8), comprovamos que o que acontece com um fator também acontecerá com o outro. Se a área diminuir, a entropia de emaranhamento também diminuirá. A relação geométrica do sistema que estamos tratando é vista na Figura 4.3.

Este mesmo efeito na geometria também pode ser provocado se considerarmos o conceito de informação. Consideramos uma subregião C , contida em A , e outra subregião D que está contida na região B . Neste caso, a informação concernente às duas subregiões é dada por:

$$I(C, D) = S(C) + S(D) - S(C \cup D). \quad (4.9)$$

Se a informação entre C e D se aproximar de zero, então uma correlação entre dois pontos X_C e X_D , situados nestas subregiões irá diminuir. Este decréscimo provocará

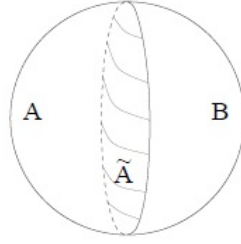


Figura 4.3: Esquema das variações na entropia que provocam mudanças na área da superfície que separa as regiões.

Fonte: RAAMSDONK, M. V. 2010. p3.

um aumento na distância entre os dois pontos em questão. Este fato é representado na Figura 4.4. E percebe-se isto ao analisar a relação abaixo,

$$\langle O_C(X_C), O_D(X_D) \rangle \cong \frac{1}{e^{mL}}. \quad (4.10)$$

Onde L é a distância entre os dois pontos.

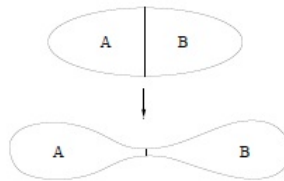


Figura 4.4: Se a correlação decresce, a distância entre dois pontos aumenta.

Fonte: RAAMSDONK, M. V. 2010. p5.

Estes conceitos tem uma grande implicação no estudo das pontes de Einstein-Rosen em que estuda-se a partir de agora. Contudo, apresentamos apenas algumas de suas principais características, não como chegar neste tipo de solução através das equações de Einstein.

Pontes de Einstein-Rosen podem ser imaginadas como túneis que conectam dois

buracos negros em diferentes regiões no espaço-tempo. Entretanto, é assumido que eles não podem ser atravessados.

Esta afirmação provém dos fatos que estudamos anteriormente entre o emaranhamento e a geometria. Se o emaranhamento diminuir, implicará que a “garganta” da ponte começará a se fechar, ao mesmo tempo, a distância entre os dois buracos negros começará a crescer.

Todavia, se o emaranhamento for consistente, pode-se conectar dois buracos negros por uma ponte de Einstein-Rosen. Neste caso, dois observadores, estando cada um próximo ao seu buraco negro, poderiam se encontrar se cada um cruzasse o seu respectivo horizonte de eventos. Porém, este encontro seria momentâneo, pois logo após eles cairiam na singularidade da ponte de Einstein-Rosen. Veja a Figura 4.5.

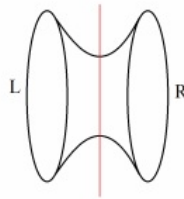


Figura 4.5: Pontes de Einstein-Rosen: uma forma de emaranhamento.

Fonte: MALDACENA, J., SUSSKIND, L. 2013. p15.

Deixa-se claro aqui a ideia que as pontes de Einstein-Rosen podem ser interpretadas como correlações quânticas. Também deve-se esclarecer o fato que estas correlações são monogâmicas. Se um sistema A está emaranhado com outro B , isto o impede de emaranhar com C .

Baseados nestes argumentos [20], Juan Maldacena e Leonard Susskind [7], apresentam a seguinte relação:

$$ER = EPR. \tag{4.11}$$

Mesmo assim, isto trata-se de uma conjectura. Não se pode afirmar com absoluta certeza se ela é de fato a solução deste problema.

Esta equação trata-se de uma relação simbólica e não uma fórmula matemática. As letras contidas nela significam as iniciais de alguns físicos. Assim, *ER* (Einstein-Rosen) retratam as pontes de Einstein-Rosen, enquanto que *EPR* (Einstein-Podolsky-Rosen) representam as correlações quânticas.

Agora estamos aptos a relacionar a monogamia do emaranhamento com a informação em buracos negros. Se um observador *A* está coletando informação referente à radiação do buraco negro *B*, um outro observador *C* não pode cruzar o horizonte de eventos e emaranhar com *B*. Em vez disso, Almheiri, Marolf, Polchinski e Sully (AMPS), propõem que existe uma espécie de *firewall* no horizonte que termaliza *C*, impedindo-o de emaranhar com *B*.

Assim, também podemos observar a conjectura $ER = EPR$ com a descrição de complementaridade do buraco negro. Se dois buracos estão conectados por uma ponte de Einstein-Rosen (emaranhados), não pode existir um 3º objeto para tentar emaranhar com alguns destes buracos negros. Deve existir alguns *firewalls* que não deixam isso acontecer [21].

Capítulo 5

Considerações Finais

Analisamos a proposta de Leonard Susskind para a explicação do paradoxo da conservação da informação em buracos negros. Enquanto que a informação atravessa o horizonte de eventos do ponto de vista de um observador, para o outro ela é retornada para fora na radiação térmica. Entretanto, o princípio da não clonagem não permite que isto aconteça; o horizonte não pode duplicar a informação.

Se dois sistemas de referência podem apresentar diferentes afirmações sobre o que acontece com a informação próxima a estes corpos gravitacionais. O observador que atravessa o horizonte não pode se comunicar com o que fica no exterior, uma vez que ele não pode enviar qualquer tipo de sinal quando atravessa esta região. Logo, nenhum pode discordar da experiência sofrida pelo outro.

Na questão do emaranhamento entre dois subsistemas, o estado que caracteriza o sistema total, que corresponde a dois espaços-tempos desconectados, também pode representar um buraco negro, caso haja emaranhamento entre estes dois subsistemas. Comprovamos esta dupla interpretação, a partir da correspondência entre duas teorias físicas: teorias de campos conformes e espaços-tempos anti de-Sitter. Para ter a certeza

que este estado, também, pode caracterizar um buraco negro, o traço realizado sobre este estado corresponde à um operador densidade térmica que descreve a região exterior ao horizonte de eventos. Sendo assim, a entropia de emaranhamento pode ser entendida como a de Bekenstein-Hawking, diretamente proporcional à área da superfície separando as regiões, e que se a entropia entre essas regiões variar, a geometria do sistema global será modificada.

O emaranhamento pode gerar espaços-tempos caracterizados por buracos negros e também causar modificações em determinadas geometrias, juntamente ao fato que o emaranhamento quântico é monogâmico. Além do mais, se existir emaranhamento entre dois buracos negros, a ponte de Einstein-Rosen é consistente. Contudo, se não existir nenhum tipo de correlação, ou mesmo se ela diminuir, a “garganta” da ponte é fechada, a distância entre estes dois corpos gravitacionais em questão pode tornar-se infinitamente longa, e assim desconecta os dois buracos negros.

Referências Bibliográficas

- [1] HAWKING, S. W., *The Information Paradox for Black Holes*. arXiv:1509.01147v1 [hep-th] 3 Sep 2015.
- [2] SUSSKIND, L.; THORLACIUS, L.; UGLUM, J., *The Stretched Horizon and Black Hole Complementarity* arXiv:hep-th/9306069v2 28 Jun 1993.
- [3] RAMALLO, A. V., *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. arXiv:1310.4319v3 [hep-th] 1 Nov 2013.
- [4] RINDLER, W., *Relativity Special, General, and Cosmological*. New York. Second Edition. Oxford University Press Inc., 2006.
- [5] HUGHSTON, L. P.; TOD, K. P., *An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 1990.
- [6] RESNICK, R., *Introdução à Relatividade Especial*. Universidade de São Paulo. Editora Polígono. 1971..
- [7] MALDACENA, J.; SUSSKIND, L., *Cool Horizons for Entangled Black Holes*. arXiv:1306.0533v2 [hep-th] 11 Jul 2013.
- [8] CARMELI, M., *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: John Wiley and Sons, 1982.

- [9] CARROL, S., *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Adison Wesley, 2004.
- [10] FERRARO, R., *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity*. Buenos Aires: Springer Science, 2007.
- [11] LANDAU, L.; LIFCHITZ, E., *Teoria de Campo*. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.
- [12] SUSSKIND, L.; LINDESAY, J., *An Introduction to Black Holes, Information, and the String Theory Revolution*. The Holographic Universe. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2005.
- [13] d'INVERNO, R., *Introducing Einstein's Relativity*. New York: Oxford University Press Inc., 1992.
- [14] MAZIERO, J., *Entendendo a entropia de Von Neumann*. arXiv: 1502.04489v2 [quant-ph] 3 Jun 2015.
- [15] SAKURAI, J. J., *Modern Quantum Mechanics*. San Fu Tuan Editor. 1994.
- [16] SOLODUKHIN, S., *Entanglement Entropy of Black Holes*. arXiv:1104.3712v1 [hep-th] 19 Apr 2011.
- [17] OKON, E.; SUDARSKY, D., *The Black Hole Information Paradox and the Collapse of the Wave Function*. arXiv:1406.2011v2 [gr-qc] 14 Feb 2015.
- [18] PAGE, D. N., *Information in Black Hole Radiation*. arXiv:hep-th/9306083v2 26 Aug 1993.
- [19] BRYAN, K. L. H.; MEDVED, A, J, M., *Black holes and Information: A New Take on an old Paradox*. arXiv:1603.07569v1 [hep-th] 24 Mar 2016.

[20] RAAMSDONK, M. V., *Building up spacetime with quantum entanglement*. arXiv:1005.3035v1 [hep-th] 17 May 2010.

[21] PRESKILL, J., Entanglement = Wormholes. Disponível em: <<https://quantumfrontiers.com/2013/06/07/entanglement-wormholes/>>. Acesso em 20 de Setembro de 2016.