



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Fenomenologia de férmions em junções de paredes de  
domínios**

**José Leonardo Paulino**

CAMPINA GRANDE

- Abril 2017 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Fenomenologia de férmions em junções de paredes de  
domínios**

**José Leonardo Paulino**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

CAMPINA GRANDE

- Abril 2017 -

P328f Paulino, José Leonardo.

Fenomenologia de férmions em junções de paredes de domínios / José Leonardo Paulino. – Campina Grande, 2021.

35 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".

Referências.

1. Física. 2. Paredes de Domínios. 3. Férmions. 4. Junções.  
I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

CDU 53(043)

**JOSÉ LEONARDO PAULINO**

**FENOMENOLOGIA DE FÉRMIONS EM JUNÇÕES DE PAREDES DE DOMÍNIOS**

Dissertação aprovada em 27/04/2017

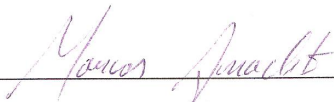
**BANCA EXAMINADORA**



---

(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



---

(Membro interno)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



---

(Membro externo)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Morgana Lígia de Farias Freire  
Departamento de Física - UEPB

*Aos meus pais e irmã.*

# Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, por toda a dedicação, esforço e, principalmente, paciência ao longo do nosso trabalho.

À minha família por todo o apoio que venho recebendo desde sempre.

Aos meus amigos pela força e incentivo.

Aos professores da Unidade Acadêmica de Física (UAF) pela minha formação.

Aos meus colegas do mestrado pela grata convivência.

À CAPES por todo o suporte financeiro.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão desse trabalho.

# Lista de Figuras

1.1	As três gerações de quarks e léptons. . . . .	2
1.2	Duas folhas bidimensionais (2-branas) intersectando para formar uma linha unidimensional (1-brana). . . . .	3
1.3	Dois cubos tridimensionais (3-branas) intersectando para formar uma folha bidimensional (2-brana). . . . .	3
4.1	Configuração padrão para 2 campos. . . . .	22
4.2	Configuração padrão para 3 campos. . . . .	22
4.3	Configuração para dois campos, resultante da modificação do superpotencial. . . . .	24
4.4	Configuração para três campos, resultante da modificação do superpotencial. . . . .	24
4.5	Caso onde $2^6 = 64 \rightarrow 21$ férmions ( $k = 1$ ). Férmions em azul e laranja. . . . .	27
4.6	Caso onde $2^5 = 32 \rightarrow 11$ férmions ( $k \rightarrow 0$ ). Férmions em azul e laranja. Seta tracejada indica a largura da parede de domínios. . . . .	27

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Tópicos em Teoria de Campos</b>	<b>5</b>
2.1 O campo escalar . . . . .	5
2.2 Método BPS . . . . .	6
2.3 Defeitos tipo Kink . . . . .	7
2.4 Estabilidade linear . . . . .	8
<b>3 Soluções de junções de paredes de domínios</b>	<b>10</b>
3.1 O modelo supersimétrico . . . . .	10
3.2 Modos fermiônicos em paredes de domínios . . . . .	12
3.3 O exemplo com dois campos escalares . . . . .	14
3.4 A lagrangeana 10-dimensional . . . . .	16
<b>4 Junções de paredes de domínios com modificação do superpotencial</b>	<b>21</b>
4.1 Superpotencial modificado . . . . .	21
4.2 Estados fermiônicos e energias das junções . . . . .	25
4.3 Acoplamento de Yukawa e o decaimento do próton . . . . .	28
<b>5 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>30</b>





# Resumo

O nosso universo observável é dito como sendo  $(3+1)$ -dimensional. Porém, acredita-se que certas propriedades observadas na natureza podem ser resultado de dimensões extras, quase como uma “herança invisível”. Entre tais propriedades, estão os sabores e hierarquias de massa dos férmions fundamentais (quarks e léptons). Tendo isso em mente, estudar a relação que o nosso universo  $(3+1)$ -dimensional teria com possíveis dimensões extras pode ser uma boa forma de entendermos melhor as propriedades naturais que nos cercam. Dessa forma, chegamos até a Teoria de Super Cordas, que, entre outras coisas, propõe a existência de um universo  $(9+1)$ -dimensional, onde estaríamos inseridos. Sabendo disso, propomos aqui uma análise fenomenológica dos férmions em junções de paredes de domínios. Onde essas junções são mecanismos que compõem um método de redução dimensional, que nos permite obter o nosso universo observável  $(3+1)$ -dimensional a partir de um universo  $(9+1)$ -dimensional, enquanto procuramos por graus de liberdade, energias e decaimentos envolvendo os férmions em meio a essas paredes de domínios.

Palavras-chave: Paredes de domínios - Férmions - Junções.

# Abstract

Our observable universe is said to be (3+1)-dimensional. However, it's believed that certain properties observed in nature may be the result of extra dimensions, almost as an “invisible inheritance”. Among such properties are the flavors numbers and mass hierarchies of the fundamental fermions (quarks and leptons). With this in mind, studying the relation that our universe could have with those extra dimensions may be a way of better understanding the natural properties that surround us. This idea lead us to the Theory of Super Strings, which, among other things, proposes the existence of a (9+1)-dimensional universe, where we would be inserted. Knowing this, we propose here a phenomenological analysis of the fermions in junctions of domains walls. Where these junctions are mechanisms that make up a dimensional reduction method, which allows us to obtain our observable (3+1)-dimensional universe from a (9+1)-dimensional universe, while we looking for degrees of freedom, energies, and decays involving fermions living in these domain walls.

Keywords: Domain walls - Fermions - Junctions.

# Capítulo 1

## Introdução

O nosso conhecimento comum nos diz que vivemos em um universo tri-dimensional. Porém, se levarmos em conta o tempo, são quatro dimensões que compoem o nosso universo observável, de modo que o nosso espaço-tempo possui  $(3, 1)$ , ou  $(3+1)$ , dimensões. É necessário, porém, mencionar que, segundo algumas teorias, existem fenômenos observados no nosso mundo que são manifestações de dimensões extras. A Teoria de Supercordas [1] nos traz uma possibilidade interessante: Um universo com nove dimensões espaciais e uma dimensão temporal. Dessa forma, imaginando que o nosso universo com  $(3, 1)$  dimensões é o resultado de um universo com  $(9, 1)$  dimensões, é perfeitamente lógico supor que certas propriedades físicas do nosso universo sejam uma “herança” do nosso universo 10-dimensional.

No nosso caso em particular, estamos interessados nas propriedades que cercam os férmions fundamentais, ou seja, quarks e léptons. Quarks são partículas fundamentais, responsáveis por formar a matéria bariônica (matéria observável) que compõe o nosso universo [2]. Prótons e neutrons, por exemplo, são compostos por três quarks cada. Quarks possuem uma propriedade conhecida como “sabor”, que nada mais é do que os tipos diferentes de quarks que podem ser encontrados na natureza. Existem seis sabores diferentes de quarks, ou seja, existem seis tipos de quarks diferentes. São eles: up, down, strange, charm, botton e top. Cada um com sua respectiva massa e carga. Voltando ao exemplo anterior, prótons são compostos por dois quarks up e um down, enquanto neutrons são compostos por dois quarks down e um up. Sendo os quarks os responsáveis pela carga e massa dos prótons e neutrons. Quarks também possuem outra propriedade intrinseca: a cor. Existem três cores de quarks: vermelho, verde e azul. A cor é semelhante a carga

elétrica, sendo responsável pela atração que mantém os quarks unidos, por exemplo, no interior do próton.

Léptons são também partículas fundamentais [2]. Assim como os quarks, Léptons possuem também seis sabores. São eles: elétron, neutrino elétron, múon, neutrino múon, tau e neutrino tau. Possuindo cargas e massas distintas. Quarks e léptons são separados por gerações, de modo que cada geração é composta por um par de isospin. Existe uma primeira geração de quarks e léptons, assim como uma segunda e uma terceira (ver figura 1.2). Físicos se perguntam até hoje o motivo de termos exatamente três gerações de quarks e léptons, ao invés de duas ou quatro, por exemplo. Sendo essa uma das motivações para estudarmos modelos como o  $(9 + 1)$ -dimensional, afinal de contas, tais características podem ser contribuições de dimensões extras.

		Fermions		
Quarks		<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top
		<b>d</b> down	<b>s</b> strange	<b>b</b> bottom
Leptons		<b><math>\nu_e</math></b> electron neutrino	<b><math>\nu_\mu</math></b> muon neutrino	<b><math>\nu_\tau</math></b> tau neutrino
		<b>e</b> electron	<b><math>\mu</math></b> muon	<b><math>\tau</math></b> tau
		I	II	III

Figura 1.1: As três gerações de quarks e léptons.

Ainda precisamos de algo que relacione o nosso universo de  $(3, 1)$  dimensões com o universo de  $(9, 1)$  dimensões, e esse algo é o método de compactação via junções. Estudando sistemas de campos escalares reais onde ocorre quebra espontânea de simetria, nos deparamos com o surgimento de estruturas conhecidas como “paredes de domínios”. Paredes de domínios nada mais são do que defeitos, que podem ser topológicos (tipo kink) ou não topológicos (tipo lump). Nesse trabalho, focaremos nos defeitos do tipo topológico (kink). Utilizando paredes de domínios, é possível construir um método de compactação por junções [3]. Tal método consiste em utilizar junções de paredes de domínios com o intuito de reduzir a dimensionalidade de um espaço-tempo qualquer, e funciona da seguinte forma: se duas paredes de domínios com dimensão  $(D, 1)$  intersectam, elas geram uma

junção com  $(D - 1, 1)$  dimensões. Ou, em outras palavras, se duas  $D$ -branas intersectam, elas geram uma  $(D - 1)$ -brana. Onde  $p$ -branas são objetos que surgem da Teoria das Cordas em  $p$  dimensões [1]. Dessa forma, se imaginarmos duas paredes de domínios com duas dimensões espaciais (duas folhas, ou duas 2-branas), a intersecção das duas gera uma linha com uma dimensão espacial, uma 1-brana (ver figura 1.2). Do mesmo modo, a intersecção de dois cubos (duas 3-branas), gera uma folha, que possui duas dimensões espaciais, ou seja, uma 2-brana (ver figura 1.3).

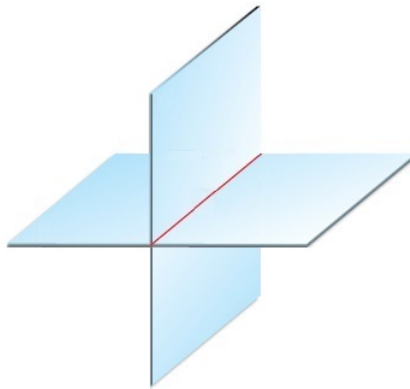


Figura 1.2: Duas folhas bidimensionais (2-branas) intersectando para formar uma linha unidimensional (1-brana).

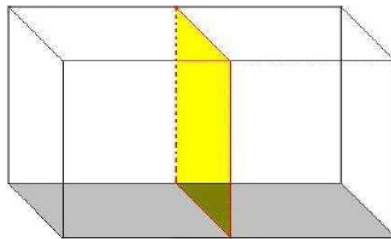


Figura 1.3: Dois cubos tridimensionais (3-branas) intersectando para formar uma folha bidimensional (2-brana).

Desta forma, o nosso objetivo inicial é utilizar essas junções de defeitos como um método de compactação espacial que nos permita localizar partículas (férmions) em um cenário que envolve dimensões espaciais extras [4][5]. Depois, partindo dessa configuração inicial, iremos propor certas modificações nas junções, a fim de analisar o impacto que isso pode causar a esse modelo.

Os capítulos posteriores estão divididos da seguinte forma: No capítulo 2, temos uma revisão de conceitos referentes à Teoria Clássica de Campos, onde falamos sobre campos escalares reais (especialmente em  $1 + 1$  dimensões). Trazemos também algumas considerações sobre o método de Bogomol'nyi e análise da estabilidade linear. Além de uma breve análise sobre defeitos do tipo kink, onde apresentamos o conceito de corrente topológica.

No capítulo 3, apresentamos o modelo de redução de dimensões. Partindo do pressuposto que o nosso universo  $(3 + 1)$ -dimensional está imerso em um espaço-tempo  $(9 + 1)$ -dimensional, devemos ter seis paredes de domínio (branas) 8-dimensionais intersectando, a fim de gerar uma junção espacial 3-dimensional. Dito isso, utilizaremos o modelo de compactação via junções, com o objetivo de localizar estados fermiônicos massivos e sem massa, vivendo inicialmente em seis  $p$ -branas geradas por seis campos do tipo  $\phi^4$ . A intersecção das paredes de domínios nos fornece um número de modos férmionicos bem definido, o que nos permite explicar, até certo ponto, o número de sabores observados para os quarks e léptons que existem no nosso universo  $(3 + 1)$ -dimensional.

No capítulo 4, estão os resultados desse trabalho, que são a nossa contribuição particular para o estudo desenvolvido até agora. Aqui, nós alteramos o superpotencial utilizado no capítulo anterior, e analisamos as mudanças que esse novo potencial causou, como o surgimento de uma nova configuração de junções. Analisamos as energias e os modos fermiônicos associados a essas novas junções. Além disso, fizemos também uma breve discussão sobre o cálculo do acoplamento de Yukawa e o decaimento do próton.

Por fim, no capítulo 5, deixamos os nossos comentários finais sobre os resultados obtidos nesse trabalho.

# Capítulo 2

## Tópicos em Teoria de Campos

Em teoria de campos, defeitos topológicos são soluções estáveis, com densidade de energia localizada [6] [7]. Neste capítulo, iremos nos focar em defeitos topológicos unidimensionais, também conhecidos como kinks. Nosso interesse, nesse momento, são modelos descritos por campos escalares, assim como sistemas aos quais adicionaremos campos fermiônicos a serem localizados.

### 2.1 O campo escalar

Sistemas clássicos são descritos por dois elementos chaves: o conjunto clássico de coordenadas espaciais  $x^i$  e a lagrangeana [7]. Como o estado do sistema depende do tempo  $t$ , que é um parâmetro clássico absoluto, as coordenadas espaciais são também funções do tempo  $x^i(t)$ . A teoria clássica de campos descreve certos sistemas físicos como objetos clássicos infinito-dimensionais cujos estados precisam de tantas coordenadas clássicas quanto há pontos no espaço. Para modelos com apenas um campo escalar real  $\phi$ , podemos escrever a ação

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.1)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, \dots, D$  e  $D+1$ , ou  $(D, 1)$ , é a dimensão do espaço-tempo. A dinâmica deste tipo de modelo, para um único campo escalar, é descrita por uma densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.2)$$

onde  $V(\phi)$  é o potencial escalar que caracteriza a teoria. A densidade lagrangeana acima é real, invariante de Lorentz e quadrática nas derivadas. Vamos considerar teorias de



campos relativísticas que obedecem a métrica de Minkowski  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$  para sistemas quadri-dimensionais. A partir do princípio da mínima ação, é possível obter a equação de movimento do campo

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.3)$$

também conhecida como equação de Euler-Lagrange. Agora, substituindo a densidade lagrangeana (2.2) na equação de Euler-Lagrange, obtemos a equação de movimento

$$\square \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.4)$$

onde  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial/\partial t - \nabla^2$ . Vamos considerar  $D = 1$ , de modo que tenhamos um modelo em (1,1) dimensões. Para  $\phi$  estático, ou seja,  $\phi = \phi(x)$ , a equação acima se torna

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.5)$$

## 2.2 Método BPS

O método BPS foi desenvolvido independentemente por Bogomol'nyi em 1976 e por Prasad e Sommerfield em 1975 [8] [9]. Esse método é utilizado com o intuito de obter soluções para as equações de movimento em segunda ordem, a partir de equações de primeira ordem. Além disso, o método também nos permite encontrar a energia mínima, não nula, do sistema, conhecida como energia BPS ( $E_{BPS}$ ). A solução estática,  $\phi = \phi(x)$ , da equação (2.5) possui a seguinte energia

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.6)$$

Completando um quadrado perfeito na equação acima, obtemos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \mp \sqrt{2V(\phi)} \right]^2 dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx. \quad (2.7)$$

Como o primeiro termo da integral acima não pode ser negativo, a energia só será mínima quando o primeiro termo for nulo, ou seja, se

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.8)$$

então

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx. \quad (2.9)$$

Isso nos dá uma solução de primeira ordem para a equação (2.5). Além disso, se o potencial não for nulo, podemos escrevê-lo em termos de um superpotencial  $W(\phi)$ , de modo que

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 \quad (2.10)$$

Dessa forma, a equação de primeira ordem (2.8) se torna

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (2.11)$$

enquanto a energia BPS do sistema passa a ser

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} W_\phi \right) dx = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]| \quad (2.12)$$

Podemos encontrar este limite se conhecermos a forma como o superpotencial  $W(\phi)$  é definido, além do comportamento assintótico da solução  $\phi(x)$ .

## 2.3 Defeitos tipo Kink

Em teoria clássica de campos, defeitos do tipo kink são descritos pelo potencial conhecido como  $\phi^4$  [7], de modo que

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2, \quad (2.13)$$

onde  $\lambda$  tem dimensão de energia e  $a$  é adimensional. Substituindo o potencial acima na equação (2.10), obtemos

$$W_\phi = \pm\lambda(\phi^2 - a^2), \quad (2.14)$$

que nos permite reescrever a equação (2.11) como

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\lambda(\phi^2 - a^2) \quad (2.15)$$

Integrando ambos os lados da equação acima, em termos de  $dx$  e  $d\phi$ , obtemos as seguintes soluções

$$\phi_\pm(x) = \pm a \tanh(\lambda ax), \quad (2.16)$$

que são denominadas kink(+) ou antikink(-). A carga topológica  $Q_T$  é dada por

$$Q_T = \phi(\infty) - \phi(-\infty) \quad (2.17)$$

Deste modo, vemos que as soluções dadas em (2.16) são topológicas, ou seja, possuem carga topológica não nula, uma vez que  $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$ . Kinks também podem estar imersos em duas ou mais dimensões espaciais. Quando isso acontece, eles são denominados paredes de domínios.

## 2.4 Estabilidade linear

Nesta sessão, faremos uso de pequenas perturbações com o intuito de analisar a estabilidade de uma solução estática de equações de movimento [7] [10] [11]. Desta forma, vamos supor que a equação (2.4) admita uma solução perturbada pelo termo  $\eta(x, t)$ , de modo que

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t). \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) em (2.4), em (1,1) dimensões, obtemos

$$\frac{\partial^2(\phi_s + \eta)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\phi_s + \eta)}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi(x,t)} = 0. \quad (2.19)$$

Expandindo  $\frac{dV}{d\phi}$  em série de Taylor, e considerando o caso estático ( $\phi = \phi(x)$ ), temos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s} = 0, \quad (2.20)$$

onde os termos com  $\eta^2$  ou superior foram ignorados. De (2.5), temos que  $-d^2 \phi/dx^2 + dV/d\phi|_{\phi=\phi_s} = 0$ , logo, a equação acima se torna

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.21)$$

Agora, usando o método de separação de variáveis, assumimos que

$$\eta(x, t) = \eta_n(x)Z(t), \quad (2.22)$$

de modo que a equação (2.21) resulta em

$$-\frac{d^2 \eta_n(x)}{dx^2} Z(t) + U(x) \eta_n(x) Z(t) = -\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} \eta_n(x), \quad (2.23)$$

onde  $U(x) \equiv \frac{d^2 V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s}$ .

Dividindo (2.23) por (2.22), e reorganizando os termos resultantes, obtemos as seguintes soluções

$$(I) \quad \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} - K Z(t) = 0, \quad (2.24)$$

$$(II) \quad -\frac{d^2 \eta_n(x)}{dx^2} + U(x) \eta_n(x) = -K \eta_n(x), \quad (2.25)$$

onde  $K$  é uma constante a ser determinada. Da primeira solução, temos que

$$Z(t) = e^{\pm i\sqrt{-K}t}. \quad (2.26)$$

Neste caso, vemos que para a equação acima não divergir,  $K < 0$ . Isso nos permite escrever  $K = -\omega^2$ , de maneira que  $Z(t)$  seja oscilatório, resultando em

$$Z(t) = \cos(\omega t). \quad (2.27)$$

Já a segunda equação é uma equação de autovalores, tipo Schrödinger, da forma  $\hat{H}\eta_n(x) = \omega_n^2\eta_n(x)$ , onde  $\eta_n$  representa o conjunto de autofunções desta equação e  $\hat{H}$  é o hamiltoniano. Como  $\hat{H}$  é um operador linear, a solução geral da equação (2.22) deve ser dada por

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.28)$$

que tem sua estabilidade linear garantida desde que  $\hat{H}$  seja não-negativo. Logo, para  $\omega_n^2 > 0$ , a nossa solução é estável por estabilidade linear.

# Capítulo 3

## Soluções de junções de paredes de domínios

Neste capítulo, abordamos as soluções de junções de paredes de domínios, com o intuito de analisar os estados fermiônicos associados a essas junções [4]. Partindo de uma configuração de universo com (9,1) dimensões [12] [13] [14] [15] [16], e usando o mecanismo de “relaxamento” [3], é possível obter uma configuração de universo com (3,1) dimensões, semelhante ao nosso. O número de dimensões é sugerido pela teoria de supercordas, onde, nesse contexto, branas seriam soluções de paredes de domínios clássicas 8-dimensionais imersas num espaço-tempo 10-dimensional. Deste modo, logo a seguir, veremos que junções de defeitos tipo paredes de domínios são candidatas à estruturas de confinamento tanto de férmions chirais sem massa como de modos massivos fermiônicos.

### 3.1 O modelo supersimétrico

A teoria adotada aqui é uma teoria supersimétrica “suavemente quebrada” [17], já que está sob a ação de um parâmetro de perturbação  $\varepsilon$ . Desse modo, a lagrangeana supersimétrica suavemente quebrada é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_m \phi^i \partial^m \phi^i + \bar{\psi}^i \Gamma^m \partial_m \psi^i + W_{\phi^i \phi^j} \bar{\psi}^i \psi^j - V(\phi^i) - \frac{1}{2} \varepsilon F(\phi^i), \quad (3.1)$$

onde  $m = 0, 1, 2, \dots, D - 1$  e  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . O potencial escalar  $V$  é dado em termos do superpotencial  $W$  [18] [19] [20] [21] [22] [23], de modo que

$$V(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N) = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \frac{\partial W}{\partial \phi^1} + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \frac{\partial W}{\partial \phi^2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^N} \frac{\partial W}{\partial \phi^N}, \quad (3.2)$$

Aqui, consideramos que  $\varepsilon \ll 1$  e ainda que:

$$W_{\phi^i \phi^j} = \delta_{\phi^i \phi^j} W_{\phi^i \phi^i} \quad (3.3)$$

com o potencial  $V$  escrito da seguinte forma

$$V(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N) = V(\phi^1) + V(\phi^2) + \dots + V(\phi^N). \quad (3.4)$$

Assumindo que paredes de domínios individuais existam, admitimos que, a fim de se formar junções estáveis, suas tensões devem satisfazer a seguinte desigualdade [4] [5]

$$|T_{i_1} + T_{i_2} + \dots + T_{i_N}| < |T_{i_1}| + |T_{i_2}| + \dots + |T_{i_N}|, \quad (3.5)$$

onde  $i_1, i_2, \dots, i_N = 1, 2, \dots, N$  e  $T_i = \Delta W_i$ , que se comporta tal como um vetor ao longo de linhas retas em diferentes direções no espaço dos campos  $(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N)$ . A fim de incluir o parâmetro de deformação  $\varepsilon$  [3], reorganizamos a desigualdade anterior, de modo que

$$|T_{i_1} + T_{i_2} + \dots + T_{i_N}| < |T_{i_1}| + |T_{i_2}| + \dots + |T_{i_N}| + \varepsilon \lambda < |T_{i_1}| + |T_{i_2}| + \dots + |T_{i_N}| \quad (3.6)$$

onde  $\varepsilon < 0$ , e  $\lambda$  é um número real cujo valor depende da escolha de  $F(\phi^i) = \sum_{j>i}^N F(\phi^i, \phi^j)$ . No nosso caso,

$$F(\phi^i, \phi^j) = \frac{1}{2}(\phi^{i^4} + \phi^{j^4}) - 3\phi^{i^2} \phi^{j^2} + \frac{9}{2}. \quad (3.7)$$

As equações de movimento para campos bosônicos e fermiônicos resultantes de (3.1) são

$$\square \phi^i + \frac{\partial V}{\partial \phi^i} - W_{\phi^i \phi^i \phi^i} \bar{\psi}^i \psi^i + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial F}{\partial \phi^i} = 0, \quad (3.8)$$

$$\Gamma^m \partial_m \psi^i + W_{\phi^i \phi^i} \psi^i = 0. \quad (3.9)$$

Uma escolha conveniente do superpotencial nos permite encontrar soluções individuais de paredes de domínios no setor bosônico, cuja dinâmica é governada pelas equações de movimento

$$\square \phi^i + \frac{\partial V}{\partial \phi^i}, \quad (3.10)$$

onde o termo multiplicado por  $\varepsilon$  foi desconsiderado por ser pequeno demais para afetar os campos escalares. Estamos interessados em soluções de paredes de domínios que se cruzem ortogonalmente para formar junções estáveis. Sendo assim, vamos considerar que cada campo escalar depende de apenas uma coordenada espacial  $x^k$ , de modo que

$$\phi(x^1, x^2, \dots, x^N) \rightarrow \phi^k(x^k) \in \{\phi^1(x^1), \phi^2(x^2), \dots, \phi^N(x^N)\}, \quad (3.11)$$

onde  $x^k$  é uma coordenada espacial transversal à parede de domínios. Desta forma, paredes de domínios estáticas são governadas pelas equações

$$\frac{d^2 \phi^k}{dx_k^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi^k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.12)$$

Como mostrado anteriormente, a equação acima pode ser reduzida a uma equação de primeira ordem, tal que

$$\frac{d\phi^k}{dx^k} = \frac{\partial W}{\partial \phi^k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.13)$$

Um ponto importante a ser discutido nesse momento, é a inclusão da gravidade. Se as junções de paredes de domínios forem realmente um mecanismo de compactação de  $(9+1)\text{D}$  para  $(3+1)\text{D}$ , então a gravidade deve estar contida nas junções [24] [25] [26] [27] [28] [29]. Assumindo que a nossa estrutura é um espaço tempo AdS, é necessário mostrar que a contante cosmológica  $\Lambda$  possui sinal negativo. De (3.1) e (3.2), temos que

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\partial_{\phi_i} W)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon F(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N), \quad (3.14)$$

onde a função  $F(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N) = F(\phi^1, \phi^2) + F(\phi^1, \phi^3) + F(\phi^{N-1}, \phi^N)$ . Usando a forma explícita do superpotencial [3] dada por  $W(\phi_i) = r\phi_i - \phi_i^3/3r$ , com  $r = \sqrt{3/2}$ , e  $F(\phi^i, \phi^j)$  dado por (3.7), encontramos que os vácuos do potencial são dados da forma  $\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 = \dots = \bar{\phi}_N = \pm(3/[2 - 3(N-1)\varepsilon])^{1/2}$ . Deste modo, a constante cosmológica definida como  $\Lambda \equiv V_\varepsilon(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_N)$  é dada por

$$\Lambda = -(27/8)N(N-1)^2\varepsilon^2/[2 - 3(N-1)\varepsilon], \quad (3.15)$$

para  $N > 1$ . A equação acima nos garante que  $\Lambda$  é sempre negativo, já que  $\varepsilon$  precisa ser negativo de modo que as junções sejam estáveis.

## 3.2 Modos fermiônicos em paredes de domínios

Na presença de parede de domínios [30] [31] [32] [33] [34], a equação de movimento (3.9) pode ser escrita em termos de  $\psi_\pm^i$ . As soluções fermiônicas, nesse caso, são dadas na forma

$$\psi^k = e^{ip_\mu^{(k)} x^\mu} \chi^k(x^k), \quad (3.16)$$

onde  $p_\mu^{(k)}$  é o quadrimomento e  $\mu = 1, 2, 3, \dots, D - 2$  são índices que indicam coordenadas ao longo da parede de domínios (ou, no “Volume-mundo”). Excluindo o termo  $x^k$  da soma, e substituindo (3.16) em (3.9), encontramos

$$i\Gamma^\mu p_\mu^{(k)} \chi^k + \Gamma^k \partial_k \chi^k + W_{\phi^k \phi^k} \chi^k = 0. \quad (3.17)$$

Consideremos nosso sistema num referencial de repouso, de modo que o quadrimomento tenha apenas componente temporal:  $p_\mu^{(k)} = (E^k, 0, 0, \dots, 0)$ . Desse modo, a equação (3.17) se torna

$$iE^k \Gamma^0 \chi^k + \Gamma^k \partial_k \chi^k + W_{\phi^k \phi^k} \chi^k = 0. \quad (3.18)$$

Agora, usando as propriedades das matrizes gamma, nós temos que  $\Gamma^k \chi_\pm = \pm \chi_\pm$  e  $i\Gamma^0 \chi_\pm = \chi_\mp$ , o que nos leva ao sistema de equações

$$(\partial_k + W_{\phi^k \phi^k}) \chi_+^k = -E^k \chi_-^k, \quad (3.19)$$

$$(\partial_k - W_{\phi^k \phi^k}) \chi_-^k = E^k \chi_+^k. \quad (3.20)$$

Aplicando  $(\partial_k - W_{\phi^k \phi^k})$  à equação (3.19), e reorganizando os termos, chegamos às seguintes equações tipo Schrödinger

$$[-\partial_k^2 + U_\mp^k(x^k)] \chi_\pm^k = -E_k^2 \chi_\pm^k, \quad (3.21)$$

onde

$$U_\mp^k(x^k) = W_{\phi^k \phi^k}^2(x^k) \mp W'_{\phi^k \phi^k}(x^k). \quad (3.22)$$

Essas equações governam a dinâmica de férmions associados à paredes de domínios independentes. Logo, para descrever as junções de paredes de domínios, precisamos considerar a equação tipo Schroedinger na forma

$$[-\nabla^2 + U_{junc}] \psi_{\pm(n_1 \dots n_N)} = E_{(n_1 \dots n_N)junc}^2 \psi_{\pm(n_1 \dots n_N)}, \quad (3.23)$$

onde

$$U_{junc} = U_\mp^1(x^1) + U_\mp^2(x^2) + \dots + U_\mp^N(x^N), \quad (3.24)$$

$$E_{(n_1 \dots n_N)junc}^2 = E_{(n_1)1}^2 + E_{(n_2)2}^2 + \dots + E_{(n_N)N}^2, \quad (3.25)$$

$$\psi_{\pm(n_1 \dots n_N)} = \chi_{\pm(n_1)}^1(x^1) \times \chi_{\pm(n_2)}^2(x^2) \times \dots \times \chi_{\pm(n_N)}^N(x^N), \quad (3.26)$$

com as componentes  $\chi_{+(n_i)}^i(x^i)$  e  $\chi_{-(n_i)}^i(x^i)$  sendo funções normalizáveis. Consideramos aqui  $n_i = 0, 1$ , ou seja, dois estados ligados que podem ser encontrados tanto em paredes de domínios individuais quanto em junções.



### 3.3 O exemplo com dois campos escalares

Tomemos o exemplo com  $N = 2$  campos escalares formando paredes de domínios independentes, que se unem formando uma junção num espaço-tempo com  $D = 3 + 1$  dimensões. Considere o seguinte superpotencial

$$W(\phi_1, \phi_2) = \lambda_1 \left( \frac{\phi_1^3}{3} - a^2 \phi_1 \right) + \lambda_2 \left( \frac{\phi_2^3}{3} - a^2 \phi_2 \right). \quad (3.27)$$

O potencial acima é o mesmo utilizado no cálculo da constante cosmológica, sendo que aqui  $r$  é dado em termos de  $\lambda$  e  $a$ . Para o caso de dois campos escalares, a equação (3.13) se torna

$$\frac{d\phi^1}{dx^1} = \frac{\partial W}{\partial \phi^1}, \quad \frac{d\phi^2}{dx^2} = \frac{\partial W}{\partial \phi^2}. \quad (3.28)$$

As soluções que satisfazem essas equações são dadas por

$$\phi^1(x^1) = -a \tanh(\lambda_1 a x^1), \quad \phi^2(x^2) = -a \tanh(\lambda_2 a x^2). \quad (3.29)$$

Substituindo (3.27) em (3.22) e considerando as soluções dadas por (3.29), obtemos os seguintes potenciais com sinal positivo

$$U_+^1(x^1) = 4\lambda_1^2 a^2 - 6\lambda_1^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a x^1), \quad (3.30)$$

$$U_+^2(x^2) = 4\lambda_2^2 a^2 - 6\lambda_2^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a x^2), \quad (3.31)$$

Esses são potenciais modificados de Pöschl-Teller [35], que tem sua forma geral dada por  $U(x^k) = A - B \operatorname{sech}^2(x^k)$  para  $k = 1, 2$ , com  $A$  e  $B$  sendo constantes reais. Os estados ligados normalizados têm as seguintes energias

$$E_n = A - \left[ \sqrt{B + \frac{1}{4}} - \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2, \quad (3.32)$$

onde

$$n = 0, 1, \dots < \sqrt{B + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

Substituindo as equações (3.30) e (3.31) em (3.21), obtemos

$$\{-\partial_k^2 + [4\lambda_{1,2}^2 a^2 - 6\lambda_{1,2}^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_{1,2}^2 a^2 x^{1,2})]\chi_-^{1,2}\} = -E_{1,2}^2 \chi_-^{1,2}, \quad (3.34)$$

onde, fazendo a substituição de variável  $\lambda_{1,2} a x^{1,2} \rightarrow y^{1,2}$  e reorganizando alguns termos, encontramos a equação

$$\left\{ -\frac{d^2}{d^2 y^{1,2}} + [4 - 6 \operatorname{sech}^2(y^{1,2})]\chi_-^{1,2} \right\} = \frac{-E_{1,2}^2 \chi_-^{1,2}}{\lambda_{1,2}^2 a^2}. \quad (3.35)$$

Agora, comparando a equação acima com a forma geral do potencial de Pöschl-Teller e utilizando (3.32) e (3.33), determinamos que o espectro discreto é composto por dois estados ligados, o modo zero e o modo excitado, de maneira que

$$E_{(0)1,2}^2 = 0, \quad (3.36)$$

$$\chi_{(0)}^{1,2} = C_0 \operatorname{sech}^2(\lambda_{1,2} a x^{1,2}), \quad (3.37)$$

$$E_{(1)1,2}^2 = 3\lambda_{1,2}^2 a^2, \quad (3.38)$$

$$\chi_{(1)}^{1,2} = C_1 \tanh(\lambda_{1,2} a x^{1,2}) \operatorname{sech}(\lambda_{1,2} a x^{1,2}). \quad (3.39)$$

Esse é o espectro referente aos férmions ligados à parede de domínios. O espectro associado a uma junção de paredes de domínios é obtido considerando a equação (3.23). Sabendo que existem apenas quatro combinações possíveis usando o modo zero e o estado excitado, temos

$$E_{(00)junc}^2 = 0, \quad (3.40)$$

$$\psi_{(00)} = C_1 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a x^1) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a x^2), \quad (3.41)$$

$$E_{(01)junc}^2 = 3\lambda_2^2 a^2, \quad (3.42)$$

$$\psi_{(01)} = C_2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a x^1) \times \tanh(\lambda_2 a x^2) \times \operatorname{sech}(\lambda_2 a x^2), \quad (3.43)$$

$$E_{(10)junc}^2 = 3\lambda_1^2 a^2, \quad (3.44)$$

$$\psi_{(10)} = C_3 \tanh(\lambda_1 a x^1) \times \operatorname{sech}(\lambda_1 a x^1) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a x^2), \quad (3.45)$$

$$E_{(11)junc}^2 = 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) a^2, \quad (3.46)$$

$$\psi_{(11)} = C_4 \tanh(\lambda_1 a x^1) \times \operatorname{sech}(\lambda_1 a x^1) \times \tanh(\lambda_2 a x^2) \times \operatorname{sech}(\lambda_2 a x^2). \quad (3.47)$$

Agora, vamos aplicar a teoria de perturbação às soluções tipo kink  $\phi_s^k$ , escrevendo-as como uma soma de todos os modos normais de vibração [6] [7] para  $k = 1, 2$ , de modo que

$$\phi_s^k(x^k, y^\mu) = \phi_s^k(x^k) + \sum_n \eta_n^k(x^k) \xi_n(y^\mu), \quad (3.48)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$  designa as coordenadas no “volume-mundo” da junção. Substituindo (3.48) na equação de movimento (3.10), obtemos

$$-\frac{d^2 \eta_{n_k}^k}{dx_k^2} + V_{k_j} \eta_{n_j}^k = E_{(n_k)_k}^2 \eta_{n_k}^k, \quad k = 1, 2 \quad (3.49)$$

onde utilizamos  $\square \xi_n^k(y^\mu) = E_{(n_k)_k}^2 \xi^k(y^\mu)$ . Aqui,  $V_{kj}$  são componentes da matriz

$$V = \begin{pmatrix} V_{\phi^1\phi^1} & V_{\phi^1\phi^2} \\ V_{\phi^2\phi^1} & V_{\phi^2\phi^2} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Utilizando o valor de  $V$  dado pela equação (3.2), obtemos

$$V_{\phi^1\phi^1} = 4\lambda_1^2 a^2 - 6\lambda_1^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a x^1), \quad (3.51)$$

$$V_{\phi^2\phi^2} = 4\lambda_2^2 a^2 - 6\lambda_2^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a x^2), \quad (3.52)$$

$$V_{\phi^1\phi^2} = V_{\phi^2\phi^1} = 0. \quad (3.53)$$

Estes valores são os mesmos obtidos para o modo fermiônico. Dessa forma, seguindo a mesma ideia usada no caso fermiônico, temos novamente que o espectro discreto é composto por dois estados ligados, o modo zero e o modo excitado, de modo que

$$E_{(0)1,2}^2 = 0, \quad (3.54)$$

$$\eta_{(0)}^{1,2} = C_0 \operatorname{sech}^2(\lambda_{1,2} a x^{1,2}), \quad (3.55)$$

$$E_{(1)1,2}^2 = 3\lambda_{1,2}^2 a^2, \quad (3.56)$$

$$\eta_{(1)}^{1,2} = C_1 \tanh(\lambda_{1,2} a x^{1,2}) \operatorname{sech}(\lambda_{1,2} a x^{1,2}). \quad (3.57)$$

Esse é o espectro referente aos campos escalares ligados à parede de domínios. O espectro associado a uma junção de paredes de domínios é encontrado, novamente, usando a equação (3.23), levando aos mesmos resultados obtidos para o setor fermiônico.

Esses resultados obtidos em  $D = 3 + 1$  dimensões também podem ser úteis em cenários de investigação cosmológica, como pode ser visto nas referências [36] [37].

### 3.4 A lagrangeana 10-dimensional

A ideia aqui é a mesma das sessões anteriores, sendo que, agora, iremos aplicá-la a um modelo com seis campos escalares em dez dimensões. Já que a teoria aqui utilizada é de (9,1) dimensões e o nosso Universo é descrito por (3,1) dimensões, precisamos encontrar uma teoria efetiva quadridimensional para campos localizados na junção de 6 paredes de domínios 8-dimensionais (8-brana), em dez dimensões. A lagrangeana para estados fermiônicos localizados na junção 4-dimensional é dada por

$$\mathcal{L}_{4d}^F = \int \mathcal{L}_{10d}^F dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6, \quad (3.58)$$

onde a dinâmica dos férmions e o acoplamento de Yukawa são dados pela densidade lagrangeana 10-dimensional

$$\mathcal{L}_{10d}^F = \bar{\Psi}\Gamma^M\partial_M\Psi + (W_{\phi^1\phi^1} + \dots + W_{\phi^6\phi^6})\bar{\Psi}\Psi. \quad (3.59)$$

Os campos escalares e fermiônicos são obtidos através da seguinte decomposição espectral

$$\begin{aligned} \phi - \phi_s &= \eta(y^\mu; x_1, \dots, x_6) \\ &= \sum_{n_1 \dots n_6} \xi_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu) \psi^{n_1 \dots n_6}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\Psi(y^\mu; x_1, \dots, x_6) = \sum_{n_1 \dots n_6} \tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu) \psi^{n_1 \dots n_6}, \quad (3.61)$$

onde  $n_i = 0, 1$  e  $\psi^{n_1 \dots n_6} = \chi^{n_1}(x^1) \times \chi^{n_2}(x^2) \times \dots \times \chi^{n_6}(x^6)$ , e  $\chi(x_i)$  são funções que satisfazem a equação (3.23). Válidas tanto para férmions quanto para bósons. Desde que o sistema permita dois estados ligados, então devemos ter  $2^N$  parceiros supersimétricos. No nosso caso,  $N = 6$  nos dá  $2^6 = 64$  escalares quadridimensionais  $\xi_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu)$  e  $2^6 = 64$  férmions de Dirac quadridimensionais  $\tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu)$  vivendo nas junções. Substituindo (3.61) e (3.60) em (3.59) e tendo em mente a relação dada por (3.18), obtemos a seguinte lagrangeana 4-dimensional

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4d}^F &= \overline{\tau_{0 \dots 0}^{junc}} \Gamma^\mu \partial_\mu \tau_{0 \dots 0}^{junc} + \sum_{n_1 \dots n_6} \overline{\tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}} (\Gamma^\mu \partial_\mu - E_{junc}^{n_1 \dots n_6}) \tau_{n_1 \dots n_6}^{junc} + \\ &+ \sum_{l_1 \dots l_6} \sum_{m_1 \dots m_6} \sum_{n_1 \dots n_6} g \xi_{l_1 \dots l_6}^{junc} \overline{\tau_{m_1 \dots m_6}^{junc}} \tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

O primeiro termo da equação acima descreve os férmions quadridimensionais sem massa, enquanto o segundo termo descreve os massivos. Os acoplamentos de Yukawa são controlados pela constante  $g$ , que é obtida integrando os acoplamentos de Yukawa nas seis dimensões extras.

Para uma interseção de  $N = 6$  paredes de domínio com dois estados ligados, existem  $2^6$  estados ligados na junção. O primeiro corresponde ao modo zero, com energia nula, e os restantes correspondem aos modos massivos com energia  $m = \sqrt{3}\lambda a$  dados por: 6 estados com energia  $m$ , 15 estados com energia  $\sqrt{2}m$ , 20 estados com energia  $\sqrt{3}m$ , 15 estados com energia  $\sqrt{4}m$ , 6 estados com energia  $\sqrt{5}m$  e um único estado com energia  $\sqrt{6}m$ . Deste modo, podemos escrever a seguinte distribuição

$$\begin{aligned} (N_f, m) &= \{(1, 0), (6, m), (15, \sqrt{2}m), (20, \sqrt{3}m), \\ &(15, \sqrt{4}m), (6, \sqrt{5}m), (1, \sqrt{6}m)\}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Assim, percebemos que os férmions possuem uma espécie de “hierarquia” de massa na lagrangeana, que é a dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4d}^F = & \bar{\tau}_0^{(0)} \Gamma^\mu \partial_\mu \tau_0^{(0)} + \sum_{s=1}^6 \sum_{n=1}^{N_s} \bar{\tau}_n^{(s)} (\Gamma^\mu \partial_\mu - \sqrt{s}m) \tau_n^{(s)} + \\ & + \sum_{l,l'} \sum_{m,m'} \sum_{n,n'} g^{ll'mm'n} \xi_l^{(l')} \bar{\tau}_m^{(m')} \tau_n^{(n')}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde  $N_1 = 6$ ,  $N_2 = 15$ ,  $N_3 = 20$ ,  $N_4 = 15$ ,  $N_5 = 6$ ,  $N_6 = 1$  e  $l', m', n' = 0, 1, \dots, 6$ .

Se considerarmos a nossa configuração como sendo um gás de junções de seis paredes de domínios 8-dimensionais, nós podemos encontrar a função de partição ao considerarmos a energia de todos os estados fermiônicos de um gás com  $6M$  paredes de domínios 8-dimensionais em (9,1) dimensões

$$\tilde{E} = \sum_{i=1}^{6M} n_i \epsilon_i, \quad \epsilon_i = 0, \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, 6M \quad (3.65)$$

onde  $\epsilon = 3$  e  $\tilde{E} = E^2/\lambda^2 a^2$ . Assim, a função partição é dada na forma

$$Z = \sum_{n_1, \dots, n_{6M}} = \exp \left[ -\tilde{\beta} \sum_{i=1}^{6M} n_i \epsilon_i \right] = \left[ \sum_{n=0}^1 \exp(-\tilde{\beta} n \epsilon) \right]^{6M}. \quad (3.66)$$

A energia média por junção é dada por

$$\tilde{u}_{junc} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \left( \frac{\ln Z}{M} \right) = 6\epsilon \frac{e^{-\tilde{\beta}\epsilon}}{1 + e^{-\tilde{\beta}\epsilon}}, \quad (3.67)$$

onde  $\tilde{\beta} = 1/\tilde{T}$ ,  $\tilde{T} = \kappa T$ . Neste caso, estamos trabalhando com  $E$  e  $\beta$  adimensionais, tanto na equação (3.65) quanto na equação (3.66). Percebemos que para temperaturas suficientemente altas ( $\tilde{\beta} \ll 1$ ),  $\tilde{u}_{junc} \rightarrow 3\epsilon$ . Tendo em vista que, apesar da temperatura ser alta, ela não é suficiente para permitir que os modos “escapem” da junção.

Neste regime a energia da junção por parede de domínio é exatamente a mesma energia encontrada na junção de três paredes de domínios excitadas, intersectando três paredes de domínios no seu estado fundamental ( $\epsilon = 0$ ). Fazendo a média das massas não-nulas dos férmions sob a distribuição (3.63), obtemos

$$\langle m \rangle = \frac{\sum_{s=1}^6 N_s \sqrt{s}m}{\sum_{s=1}^6 N_s} = 1,709 \simeq \sqrt{3}m. \quad (3.68)$$

Este resultado nos mostra que a classe  $N_3 = 20$  férmions distintos com massas  $\sqrt{3}m$  é favorecida. Isso significa que em um gás de paredes de domínios em dez dimensões, a

probabilidade de uma junção ser formada pela superposição de 20 estados massivos através da combinação de três paredes de domínios 8-dimensionais em seu estado fundamental, e três paredes de domínios 8-dimensionais em seu primeiro estado excitado é maior do que qualquer outra combinação.

Deste modo, os férmions observados em nosso mundo 4-dimensional são regidos pela lagrangeana média

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4d}^F = & \bar{\tau}_0^{(0)} \Gamma^\mu \partial_\mu \tau_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{20} \bar{\tau}_n^{(3)} (\Gamma^\mu \partial_\mu - \sqrt{3}m) \tau_n^{(3)} + \\ & + \sum_{l,l'} \sum_{m,m'} \sum_{n,n'} g^{l'l'm'm'n'n'} \xi_l^{(l')} \bar{\tau}_m^{(m')} \tau_n^{(n')}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Considerando que esses estados fermiônicos possam ser organizados num vetor coluna que se transforma sob o grupo local SU(3)

$$q_n = \begin{pmatrix} \tau_n^1 \\ \tau_n^2 \\ \tau_n^3 \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

podemos, então, atribuir  $N_c = 3$  cores a seis quarks ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ), sabendo que o número de sabor dos quarks é  $N_F = 6$ . Deste modo, temos que  $N_c N_F = 18$  graus de liberdade fermiônicos. Nos resta ainda dois graus de liberdade, além do modo zero (primeiro termo da lagrangeana). Esses três podem ser associados a férmions sem cor do tipo esquerdo, ou seja, três léptons. Isso nos mostra que o modelo simples (3.69) parece ser uma boa aproximação para descrever a geração de seis quarks e três léptons. Outra possibilidade seria considerar os seis quarks do tipo direito e os seis quarks do tipo esquerdo, junto com os seis léptons do tipo esquerdo e os três léptons do tipo direito. O que também nos daria um resultado envolvendo 21 férmions.

Por fim, a dinâmica dos modos bosônicos é descrita pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_{10d}^B = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \eta (-\nabla^2 + U_{junc}) \eta \quad (3.71)$$

$$- \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^6 V'''(\phi_k) \eta^3 - \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^6 V''''(\phi_k) \eta^4. \quad (3.72)$$

Integrando essa lagrangeana nas coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , como fizemos anterior-

mente, nós obtemos a lagrangeana 4-dimensional

$$\mathcal{L}_{4d}^B = \frac{1}{2} \sum_{n_1 \dots n_6} \partial_\mu \xi_{n_1 \dots n_6}^{junc} \partial^\mu \xi_{n_1 \dots n_6}^{junc} - V(\xi), \quad (3.73)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_0^{(0)} \partial^\mu \xi_0^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{20} \partial_\mu \xi_n^{(3)} \partial^\mu \xi_n^{(3)} - V(\xi). \quad (3.74)$$

O potencial escalar é responsável por dar soluções não triviais de vácuo aos 21 escalares, que devem ser responsáveis pela produção dos quarks e léptons na Lagrangeana (3.69). Deste modo, a ideia de que a física do Modelo Padrão pode ser uma manifestação de dimensões extras esta completa, já que os 21 graus de liberdade podem derivar da exigência de que a física de altas dimensões pode se manifestar como uma física quadridimensional na junção.

# Capítulo 4

## Junções de paredes de domínios com modificação do superpotencial

As junções de paredes de domínios vistas até agora resultavam sempre de uma configuração onde os mínimos do potencial eram equidistantes, ou seja, as distâncias entre os mínimos eram sempre iguais, gerando paredes de domínios de mesmo tamanho e largura. Agora, neste capítulo, iremos analisar um outro tipo de configuração, resultando em paredes de domínios que podem ou não ser iguais. Tal junção será resultado de uma modificação do superpotencial (3.27), que irá resultar num “relaxamento” diferente do que vimos no capítulo anterior.

### 4.1 Superpotencial modificado

No capítulo anterior, nós trabalhamos com um superpotencial dado na seguinte forma

$$W(\phi_N) = \lambda_N \left( \frac{\phi_N^3}{3} - a^2 \phi_N \right) \quad (4.1)$$

onde  $a$  e  $\lambda$  também podem ser escritos em termos de  $r$  [3]. Esse superpotencial nos garante que os mínimos do potencial (3.14) são sempre iguais e equidistantes, de modo que

$$\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 = \dots = \bar{\phi}_N = \pm \sqrt{\frac{3}{2 - 3(N-1)\varepsilon}} \quad (4.2)$$

Para dois campos escalares, por exemplo, os mínimos são dados por

$$\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 = \pm \sqrt{\frac{3}{2 - 3\varepsilon}} \quad (4.3)$$



Para uma solução como essa, com mínimos equidistantes, nós temos uma configuração semelhante à ilustrada na figura 4.1.

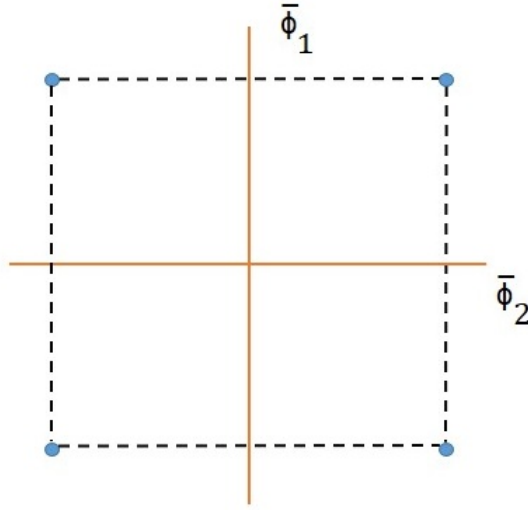


Figura 4.1: Configuração padrão para 2 campos.

Na figura 4.1, vemos duas paredes de domínios do tipo 1-brana (em laranja) intersectando ortogonalmente para formar uma junção tipo 0-brana. Como podemos ver, as paredes de domínios coincidem com os próprios eixos do sistema. Os pontos que formam os vértices do quadrado são os pontos de mínimo do potencial  $\left(\sqrt{\frac{3}{2-3\epsilon}}, \sqrt{\frac{3}{2-3\epsilon}}\right)$ ,  $\left(\sqrt{\frac{3}{2-3\epsilon}}, -\sqrt{\frac{3}{2-3\epsilon}}\right)$ ,  $\left(-\sqrt{\frac{3}{2-3\epsilon}}, \sqrt{\frac{3}{2-3\epsilon}}\right)$  e  $\left(-\sqrt{\frac{3}{2-3\epsilon}}, -\sqrt{\frac{3}{2-3\epsilon}}\right)$ . Se estendermos o exemplo acima para três campos, teremos novamente os mínimos equidistantes, sendo que, agora, teremos uma configuração em três dimensões, como mostra a figura 4.2.

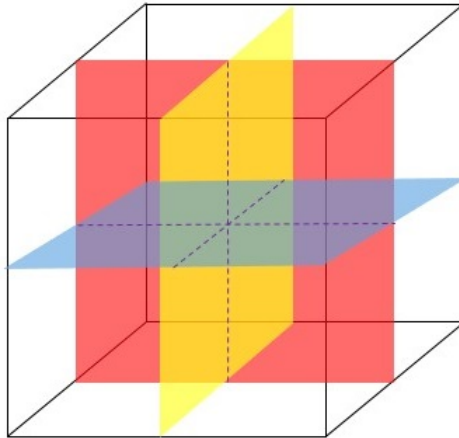


Figura 4.2: Configuração padrão para 3 campos.

Na figura 4.2 temos uma configuração onde três paredes de domínios tipo 2-brana intersectam ortogonalmente para formar uma junção tipo 0-brana. Aqui, novamente, os vértices do cubo são os mínimos do potencial. Esse tipo de configuração vista nas figuras 4.1 e 4.2 só é possível porque os mínimos do potencial que estamos trabalhando são equidistantes, garantindo que as paredes de domínios possuam as mesmas dimensões.

Porém, agora, considere que o superpotencial (4.1) seja dado da seguinte forma

$$W(\phi_N) = \lambda_N \left( \frac{\phi_N^3}{3} - a_N^2 \phi_N \right) \quad (4.4)$$

onde  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N$  e  $a_1 = ka_2 = ka_3 \dots = ka_N$ . Nesse novo modelo,  $k$  é um número real definido no limite  $(0,1)$ , de modo que  $\Delta_1 = 1/\lambda_1 a_1 = 1/k \lambda_1 a_1$ , onde  $\Delta_1$  é a largura da brana situada entre os mínimos de  $\phi_1$ . Ou seja, quanto menor o valor de  $k$ , maior a largura da brana.

Vamos escrever  $\lambda$  e  $a$  em termos de  $r$  [3] de modo que  $\lambda_N = -1/r$ ,  $a_1 = kr$  e  $a_2 = a_3 = a_4 \dots = r$ . Calculando os mínimos desse potencial, para  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ , obtemos

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(45 \varepsilon^2 - 3 \varepsilon - 4) (-18 \varepsilon + 3 k^2 \varepsilon - 4 k^2)} \sqrt{6}}{45 \varepsilon^2 - 3 \varepsilon - 4} \quad (4.5)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{54 k^2 \varepsilon + 36 \varepsilon + 24}{45 \varepsilon^2 - 3 \varepsilon - 4}} \quad (4.6)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{54 k^2 \varepsilon + 36 \varepsilon + 24}{45 \varepsilon^2 - 3 \varepsilon - 4}} \quad (4.7)$$

Essas soluções nos mostram que os mínimos do potencial são distintos, logo, eles não são mais equidistantes, como no caso que vinha sendo estudado até então. A configuração das junções para esse novo caso está ilustrada nas figuras 4.3 e 4.4.

A configuração mostrada na figura 4.3 é para dois campos. Agora, não temos mais duas simples 1-brana intersectando para formar uma 0-brana. A parede de domínio horizontal possui uma dimensão extra, resultante da aproximação dos mínimos de  $\phi_1$ . Se imaginarmos que as duas paredes de domínios, para o caso com dois campos, tinham apenas uma única dimensão, então podemos considerá-las como sendo simples linhas. Agora, no caso do superpotencial modificado, a linha horizontal foi alongada, mas não no sentido do seu comprimento, e sim no da sua (até então inexistente) largura. Desse modo, vemos que a linha horizontal deixa de ter uma única dimensão, passando a ter uma dimensão extra referente a sua largura. Isso faz com que a intersecção das duas paredes

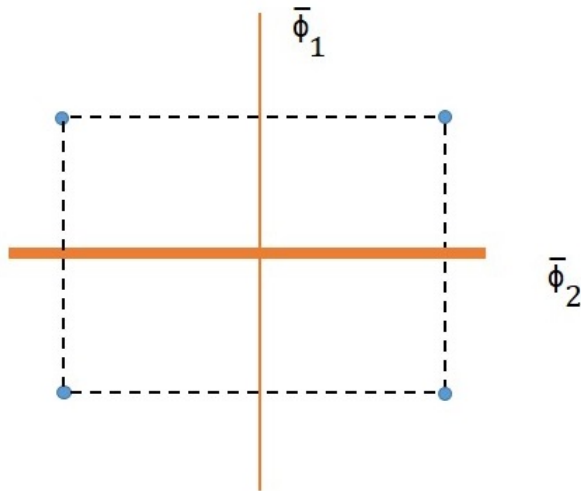


Figura 4.3: Configuração para dois campos, resultante da modificação do superpotencial.

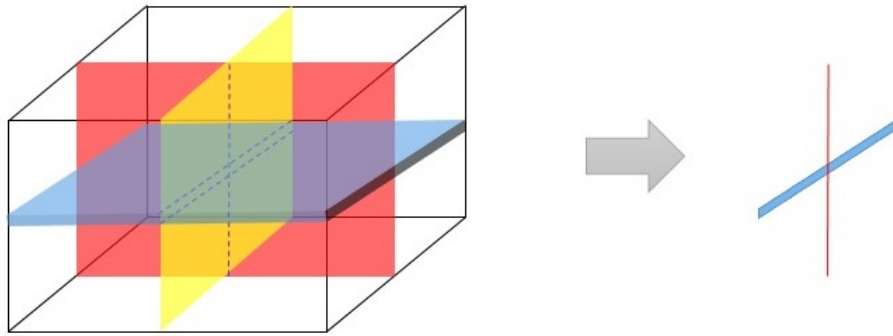


Figura 4.4: Configuração para três campos, resultante da modificação do superpotencial.

deixe de produzir uma simples 0-brana (que seria um ponto, já que estamos imaginando a 1-brana como uma linha), e passe a gerar uma brana com uma dimensão extra.

Para três campos, temos a configuração dada pela figura 4.4. No caso em que vínhamos trabalhando, para três campos escalares, tínhamos uma configuração com três 2-brana (que podem ser interpretadas como folhas) imersas em um cubo tridimensional, intersectando e gerando uma 0-brana. Agora, não temos mais um cubo, temos um retângulo. E além disso, uma das paredes de domínios possui uma dimensão extra, fazendo com que a junção não resulte mais numa 0-brana. Com isso, mostramos que ao se interferir nos mínimos do potencial, podemos alterar todo o mecanismo de “relaxamento” e, conseqüentemente, os seus resultados.

## 4.2 Estados fermiônicos e energias das junções

Agora, vamos rever alguns dos resultados citados no capítulo anterior. Já que a nossa configuração mudou, devido a alteração do superpotencial, isso pode nos levar a mudanças tanto nas energias quanto nos graus de liberdade da lagrangeana final. A primeira mudança significativa ocorre no cálculo da constante cosmológica (3.15). Para o novo superpotencial, os vácuos do potencial são dados por (4.5), (4.6) e (4.7), de modo que

$$\Lambda = \frac{9}{4} \frac{\varepsilon (135 \varepsilon^2 + 21 \varepsilon + 15 k^4 \varepsilon + 12 k^2 - 2 k^4 - 10)}{45 \varepsilon^2 - 3 \varepsilon - 4}, \quad (4.8)$$

para três campos. Isso nos mostra que  $\Lambda$  continua negativa, já que  $\varepsilon < 0$  [24] [25] [26] [27] [28] [29]. Poderíamos ainda calcular a constante cosmológica geral, para  $N$  campos, como foi feito no capítulo anterior. Mas como nosso único objetivo é mostrar que  $\Lambda$  é negativa, não vimos necessidade disso.

Agora, vamos analisar a energia dos estados ligados (3.32). Considerando a nossa nova configuração, temos, num primeiro momento, que os mínimos de (3.28) são dados por

$$\phi^1(x^1) = -a_1 \tanh(\lambda_1 a_1 x^1), \quad \phi^2(x^2) = -a_2 \tanh(\lambda_2 a_2 x^2). \quad (4.9)$$

o que nos leva à

$$U_+^1 = 4\lambda_1^2 a_1^2 - 6\lambda_1^2 a_1^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1^2 a_1^2 x^1), \quad (4.10)$$

$$U_+^2 = 4\lambda_2^2 a_2^2 - 6\lambda_2^2 a_2^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_2^2 a_2^2 x^2), \quad (4.11)$$

onde, como citado anteriormente,  $a_1^2 = k^2 a_2^2$ . Agora, os espectros discretos e contínuos derivados da equação (3.32) são dados por

$$E_{(0)1,2}^2 = 0, \quad (4.12)$$

$$\chi_{(0)}^{1,2} = C_0 \operatorname{sech}^2(\lambda_{1,2} a_{1,2} x^{1,2}), \quad (4.13)$$

$$E_{(1)1,2}^2 = 3\lambda_{1,2}^2 a_{1,2}^2, \quad (4.14)$$

$$\chi_{(1)}^{1,2} = C_1 \tanh^2(\lambda_{1,2} a_{1,2} x^{1,2}) \operatorname{sech}^2(\lambda_{1,2} a_{1,2} x^{1,2}). \quad (4.15)$$

Dos resultados acima, obtemos o espectro associado a uma junção de paredes de domínios. Que, nesse novo caso, será

$$E_{(00)junc}^2 = 0, \quad (4.16)$$

$$\psi_{(00)} = C_1 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a_1 x^1) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a_2 x^2), \quad (4.17)$$

$$E_{(01)_{junc}}^2 = 3\lambda_2^2 a_2^2, \quad (4.18)$$

$$\psi_{(01)} = C_2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a_1 x^1) \times \tanh^2(\lambda_2 a_2 x^2) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a_2 x^2), \quad (4.19)$$

$$E_{(10)_{junc}}^2 = 3\lambda_1^2 a_1^2, \quad (4.20)$$

$$\psi_{(10)} = C_3 \tanh^2(\lambda_1 a_1 x^1) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a_1 x^1) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a_2 x^2), \quad (4.21)$$

$$E_{(11)_{junc}}^2 = 3\lambda_1^2 a_1^2 + 3\lambda_2^2 a_2^2, \quad (4.22)$$

$$\psi_{(11)} = C_4 \tanh^2(\lambda_1 a_1 x^1) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a_1 x^1) \times (\lambda_2 a_2 x^2) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a_2 x^2). \quad (4.23)$$

que é o mesmo espectro para o caso bosônico. Vemos que, para  $k = 1$ , os resultados acima são os mesmos para o caso abordado no capítulo anterior, já que  $a_1 = ka_2 = ka$ . Agora, vamos analisar o número de estados ligados na lagrangeana quadridimensional (3.62). No capítulo anterior, nós tínhamos  $2^6 = 64$  escalares quadridimensionais  $\xi_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu)$  e  $2^6 = 64$  férmions de Dirac quadridimensionais  $\tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu)$  vivendo nas junções. Para  $k = 1$ , isso continua sendo válido, já que recuperamos a configuração do capítulo anterior. Porém, para  $k < 1$ , esse número tende a mudar.

Vamos considerar o mínimo extremo, no limite em que  $k \rightarrow 0$ . Nesse ponto, vemos que os estados de energia dependentes de  $k$  não vão mais existir. Logo, para o nosso caso atual, as distribuições de energia são dadas na forma: 5 estados com energia  $m$ , 10 estados com energia  $\sqrt{2}m$ , 10 estados com energia  $\sqrt{3}m$ , 5 estados com energia  $\sqrt{4}m$  e 1 estado com energia  $\sqrt{5}m$ . Contando com o modo zero, que possui energia nula, são 32 estados ligados. Ou seja, para a nossa configuração atual, nos temos  $N = 6$  paredes de domínio intersectando, o que nos dá  $2^5 x 2^k$  estados ligados na lagrangeana quadridimensional. Para  $k = 1$ , temos  $2^5 x 2^1 = 2^6 = 64$ , que é o mesmo valor obtido no capítulo anterior. Já para  $k \rightarrow 0$ , temos  $2^5 x 2^0 = 2^5 = 32$ , que foi o resultado que acabamos de obter. Seguindo os passos do capítulo anterior, temos

$$(N_f, m) = \{(1, 0), (5, m), (10, \sqrt{2}m), (10, \sqrt{3}m), (5, \sqrt{4}m), (1, \sqrt{5}m)\}. \quad (4.24)$$

Agora, a “hierarquia” de massa dos férmions é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4d}^F &= \bar{\tau}_0^{(0)} \Gamma^\mu \partial_\mu \tau_0^{(0)} + \sum_{s=1}^5 \sum_{n=1}^{N_s} \bar{\tau}_n^{(s)} (\Gamma^\mu \partial_\mu - \sqrt{s}m) \tau_n^{(s)} + \\ &+ \sum_{l,l'} \sum_{m,m'} \sum_{n,n'} g^{l'm'mn'} \xi_l^{(l')} \bar{\tau}_m^{(m')} \tau_n^{(n')} \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde  $N_1 = 5$ ,  $N_2 = 10$ ,  $N_3 = 10$ ,  $N_4 = 5$ ,  $N_5 = 1$  e  $l', m', n' = 1, 2, \dots, 5$ .

Por fim, a média das massas não-nulas dos férmions é dada por

$$\langle m \rangle = \frac{\sum_{s=1}^5 N_s \sqrt{sm}}{\sum_{s=1}^5 N_s} = 1,570 \simeq \frac{\sqrt{3}m + \sqrt{2}m}{2} \quad (4.26)$$

Isso nos mostra que a classe favorecida é  $N_2 = N_3 = 10$  férmions distintos com massas entre  $\sqrt{2}m$  e  $\sqrt{3}m$ . Ou seja, não temos mais uma configuração bem determinada, como no capítulo anterior. Agora, devemos trabalhar com médias e/ou possibilidades diversas. Se considerarmos que temos 10 férmions com energia entre  $\sqrt{2}m$  e  $\sqrt{3}m$ , mais o modo zero, então são 11 férmions. Isso nos mostra que, para  $k = 1$ , voltamos a ter 21 férmions (configuração anterior), enquanto para  $k \rightarrow 0$ , temos apenas 11.

Podemos justificar essa “perda” considerando que os férmions que não apareceram estão deslocalizados, ou seja, para  $k \rightarrow 0$ , existe um determinado número de férmions que não podem ser localizados nas junções (ver figuras 4.5 e 4.5).

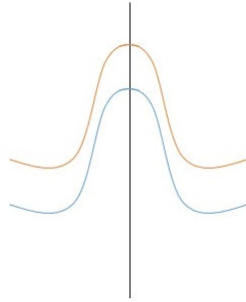


Figura 4.5: Caso onde  $2^6 = 64 \rightarrow 21$  férmions ( $k = 1$ ). Férmions em azul e laranja.

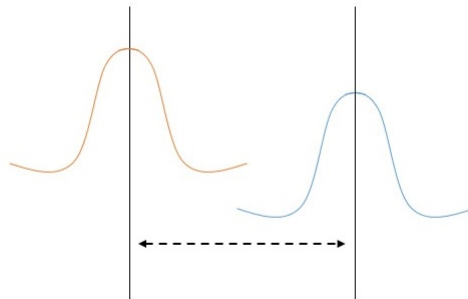


Figura 4.6: Caso onde  $2^5 = 32 \rightarrow 11$  férmions ( $k \rightarrow 0$ ). Férmions em azul e laranja. Seta tracejada indica a largura da parede de domínios.

### 4.3 Acoplamento de Yukawa e o decaimento do próton

Nesta seção, vamos introduzir o cálculo do acoplamento de Yukawa e o decaimento do próton [38]. O problema da hierarquia sugere a existência de uma relação praticamente exponencial entre as massas dos quarks e léptons, o que também sugere uma interação de Yukawa muito pequena.

O acoplamento de Yukawa mede a interação entre férmions e o campo de Higgs (um escalar com a propriedade gerar massa para as demais partículas). No nosso trabalho, o acoplamento será devido a intersecção ortogonal de seis 8-brana imersas em (9,1) dimensões. No entanto, a título de ilustração, tomamos a intersecção ortogonal de duas 2-brana em 3+1 dimensões, sendo uma delas com uma largura suficientemente maior que a da outra. Também por simplicidade, vamos considerar apenas o modo zero.

Assim, o acoplamento de Yukawa na junção unidimensional (tipo linha, no presente exemplo) neste caso é obtido da forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Yukawa} &= \xi_{00}\bar{\tau}_{00}\tau_{00} \int \psi^{00} \times \psi^{00} \times \psi^{00} dx_1 dx_2 \\ &= \xi_{00}\bar{\tau}_{00}\tau_{00}\end{aligned}\quad (4.27)$$

onde consideramos (com constantes redefinidas)

$$\psi^{00} = C_1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^1}{\Delta_1}\right) \times \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^2}{\Delta_2}\right), \quad \Delta_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{a_2}\quad (4.28)$$

tal que  $\Delta_{1,2}$  são interpretados como a largura da 2-brana.

Para entender o problema da hierarquia consideramos os léptons em regiões distintas ao longo da largura de uma das branas. Vamos admitir que a espessura de uma delas se alongue na direção  $x_1$ , tal que um lépton fique na posição  $x_1$  e o outro na posição  $x_1 - r$ . Assim temos que

$$g \sim \int dx_1 dx_2 \operatorname{sech}^4\left(\frac{x^1}{\Delta_1}\right) \times \operatorname{sech}^6\left(\frac{x^2}{\Delta_2}\right) \times \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^1 - r}{\Delta_1}\right)\quad (4.29)$$

Para  $r/\Delta_1 = 8$  e  $\Delta_2 = 1$ , temos que  $g_e \simeq 1,28 \times 10^{-6}$  que é o acoplamento para o elétron. Para  $r \gg \Delta_1$  temos de fato uma dependência explicitamente dada por  $g \sim e^{-2r/\Delta_1}$ .

O decaimento do próton é obtido por operadores quadrilineares entre quarks e léptons (interação entre quatro férmions). Neste caso, trabalhamos de maneira similar considerando bilineares invariantes de Lorentz tipo  $\Psi_1^T C_n \Psi_2$  (bilinear de Majorana [38]), onde  $C_n$  é uma matriz que depende da dimensão do espaço-tempo. Por exemplo,  $C_4 =$

$\gamma^0\gamma^2$  em 3+1,  $C_5 = \gamma^0\gamma^2\gamma^5$  em 4+1 (cinco dimensões) e assim por diante. Onde  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac.

Para obter o decaimento do próton integramos o operador  $(\Psi_1^T C_n \Psi_2)^\dagger (\chi_1^{cT} C_n \chi_2^c)$ , onde  $\chi^c$  é o ‘carga-conjugado’ do spinor  $\chi$ . Usando as mesmas definições de spinores na junções acima, obtemos através do produto de três spinores (quarks) na posição  $x_1$  e um spinor (lépton) em  $x_1 - r$  temos o decaimento:

$$\begin{aligned} \delta &= \int dx_1 dx_2 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x^1}{\Delta_1}\right) \times \operatorname{sech}^8\left(\frac{x^2}{\Delta_2}\right) \times \operatorname{sech}^2\left(\frac{x^1 - r}{\Delta_1}\right) \\ &\sim 1,06 \times 10^{-34} \end{aligned} \tag{4.30}$$

o que é um valor aceitável na escalar de 1TeV [38]. Aqui usamos  $r/\Delta_1 = 40$  e  $\Delta_2 = 1$ .



# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho tivemos como objetivo analisar o comportamento dos férmions fundamentais em soluções de junções de paredes de domínios, onde as junções faziam parte do método de “relaxamento” utilizado para reduzir um modelo do tipo (9+1)-dimensional até obter um modelo (3+1)-dimensional, semelhante ao nosso. Tal ideia surgiu do fato de que certas características do nosso universo atual, como os sabores e hierarquia de massas dos férmions, poderiam ser resultado de influências de dimensões extras.

Tendo isso mente, começamos nosso estudo no capítulo 2, desenvolvendo o conceito de campos escalares dentro da Teoria Clássica de Campos, com o objetivo de encontrar soluções topológicas para um determinado conjunto de equações de segunda ordem dado por (2.5). Mostramos que tais equações podem ser resolvidas utilizando o método de Bogomol’nyi, e, posteriormente, introduzimos o conceito de corrente topológica, com o intuito de classificar as nossas soluções como topológicas ou não-topológicas. Por fim, estudamos a estabilidade linear dessas soluções, diante de pequenas flutuações.

Tais conceitos foram utilizados no capítulo 3, onde o foco era o método de redução de (9,1) dimensões para (3,1) dimensões. Aqui foi introduzida a lagrangeana supersimétrica, de onde retiramos nossas equações de movimento, responsáveis por nos fornecer equações tipo Schrödinger que descrevem a dinâmica dos férmions localizados nas paredes de domínios. Conseguimos, através de comparações com o potencial de Pöschl-Teller, determinar o número de estado ligados para o modelo que estávamos trabalhando, o que nos permitiu identificar uma quantidade bem definida de modos massivos, e um modo zero fermiônico, totalizando assim 21 férmions. Tais modos foram introduzidos à nossa lagrangeana 4-dimensional, nos dando assim uma boa ideia de como descrever as gerações

de quarks e léptons em termos dos modos fermiônicos obtidos.

Tendo em mente os resultados vistos no capítulo 3, no capítulo 4, adotamos uma análise semelhante, sendo que, agora, o nosso foco era estudar novas configurações de junções, geradas por uma modificação no superpotencial. Tal mudança nos trouxe novas interpretações para as junções, mostrando que, por exemplo, dependendo das posições dos mínimos, é possível obter junções onde objetos bidimensionais intersectando geram um objeto unidimensional com uma dimensão extra. Também estudamos os impactos que essa nova configuração traz para a análise dos modos fermiônicos, onde, para valores de  $k \rightarrow 0$ , obtemos apenas 11 férmions, ao invés de 21, como no capítulo anterior. Isso nos mostrou que, para valores muito pequenos de  $k$ , certos fermions acabam sendo deslocalizados nas junções. Além disso, também determinamos a constante de acoplamento de Yukawa, e o decaimento do próton, mostrando que ele é bem pouco favorável.

Como perspectiva, fica a possibilidade de calcular a relação  $2^5 \times 2^k$ , com o intuito de analisar como os estados fermiônicos mudam para qualquer valor de  $k$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] ZWIEBACH, B. **A first course in string theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [2] CLOSE, F. **The new cosmic onion: quarks and the nature of the universe**. Boca Raton: CRC Press, 2006.
- [3] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; LOSANO, L. Relaxing to three dimensional brane junction. **Europhysics Letters**, v. 76, n. 3, p. 374-380, 2006.
- [4] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; FONSECA, R. Fermion states on domain wall junctions and the flavor number. **European Physical Journal C**, v. 63, n. 1, p. 163–170, 2009.
- [5] FONSECA, R. C. Localização de estados fermiônicos em junções de pares de domínios. 2009. 58f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Paraíba, Paraíba. 2009.
- [6] JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. **Reviews of Modern Physics**, v. 49, n, 3, p. 681-706, 1977.
- [7] RAJARAMAN, R. **Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982.
- [8] BOGOMOL' NYI, E. The stability of classical solutions. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 24, n. 4, p. 449-454, 1976.
- [9] PRASSAD, M.; SOMMERFIELD, C. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. **Physical Review Letters**, v. 35, n. 12, p. 760-762, 1975.

- [10] GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. 2. ed. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [11] SAKURAI, J. J. **Advanced Quantum Mechanics**. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1985.
- [12] GIBBONS, G. W.; LAMBERT, N. D. Domain walls and solitons in odd dimensions. **Physics Letters B**, v. 488, n. 1, p. 90-96, 2000.
- [13] SKENDERIS, K.; TOWNSEND, P. K. Gravitational Stability and Renormalization-Group Flow. **Physics Letters B**, v. 468, n. 1-2, p. 46-51, 1999.
- [14] BRITO, F. A.; CVETIC, M.; YOON, S. From a thick to a thin supergravity domain wall. **Physical Review D**, v. 64, n. 6, 2001.
- [15] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; NASCIMENTO, J. R. S. Super-gravity brane worlds and tachyon potentials. **Physical Review D**, v. 68, n. 8, 2003.
- [16] BRITO, F. A.; CRUZ, F. F.; OLIVEIRA, F. N. Accelerating universes driven by bulk particles. **Physical Review D**, v. 71, n. 8, 2005.
- [17] ALMEIDA, C. A. G.; BAZEIA, D.; LOSANO, L. Exploring the vicinity of the Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield bound. **Journal of Physics A**, v. 34, n. 16, p. 3351-3362, 2001.
- [18] ABRAHAM, E. R. C.; TOWNSEND, P. K. Intersecting extended objects in supersymmetric field theories. **Nuclear Physics B**, v. 351, n. 1-2, p. 313-332, 1991.
- [19] WESS, J.; BAGGER, J. **Supersymmetry and Supergravity**. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1992.
- [20] EDELSTEIN, J. D. et al. **Physical Review D**, v. 57, n. 12, p. 7561-7569, 1998.
- [21] NASTASE, H. et al. Topological boundary conditions, the BPS bound and elimination of ambiguities in quantum mass of solitons. **Nuclear Physics B**, v. 542, n. 1-2, p. 471-514, 1999.
- [22] GRAHAM, N.; JAFFE, R. L. Energy, central charge, and the BPS bound for 1 + 1-dimensional supersymmetric solitons. **Nuclear Physics B**, V. 544, P. 432-447, 1999.

- [23] SHIFMAN, M.; VAINSHTEIN, A.; VOLOSHIN, M. Anomaly and quantum corrections to solitons in two-dimensional theories with minimal supersymmetry. **Physical Review D**, v. 59, n. 4, 1999.
- [24] ARKANI-HAMED, N. et al. Infinitely large new dimensions. **Physical Review Letters**, v. 84, n. 4, p. 586-589, 2000.
- [25] SAKI, C.; SHIRMAN, Y. Brane junctions in the Randall-Sundrum scenario. **Physical Review D**, v. 61, n. 2, 2000.
- [26] CARROLL, S. M.; HELLERMAN, S.; TRODDEN, M. BPS domain wall junctions in infinitely large extra dimensions. **Physical Review D**, v. 62, n. 4, 2000.
- [27] ODA, I.; Localization of matters on a string-like defect. Phys. **Physics Letters B**, v. 496, p. 113-121, 2000.
- [28] SAKAI, N.; TOMIZAWA, S. Our world as an intersection of walls and a string. **Nuclear Physics B**, v. 602, n. 3, p. 413-433, 2001.
- [29] FITZPATRICK, A. L.; RANDALL, L. Localizing gravity on the triple intersection of 7-branes in 10D. **Journal of High Energy Physics**, v 2006, n. 1, 2006.
- [30] ITO, K.; NAGANUMA, M.; ODA, H.; SAKAI, N. Nonnormalizable zero modes on BPS junctions. **Nuclear Physics B**, v. 586, n. 1-2, p. 231-260, 2000.
- [31] JACKIW, R.; REBBI, C. Solitons with fermion number 1/2. **Physical Review D**, v. 13, n. 12, p. 3398-3409, 1976.
- [32] KAPLAN, D. B.; SCHMALTZ, M. Domain wall fermions and the  $\eta$ -invariant. **Physics Letters B**, v. 368, n. 1-2, p. 44-52, 1996.
- [33] MORRIS, J.R.; BAZEIA, D. Supersymmetry breaking and Fermi balls. **Physical Review D**, v. 54, n. 8, p. 5217-5222, 1996.
- [34] STOJKOVIC, D. Fermionic zero modes on domain walls. **Physical Review D**, v. 63, 2001.
- [35] MORSE, P. M.; FESHBACH, H. **Methods of Theoretical Physics**. New York: McGraw-Hill Educationl, 1953.

- [36] ALMEIDA, C. A. G.; BAZEIA, D.; LOSANO, L. Exploring the vicinity of the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield bound. **Journal of Physics A**, v. n, 16, p. 3351-3362, 2001..
- [37] BAZEIA, D.; BRITO, F.A. Tiling the Plane without Supersymmetry. **Physical Review Letters**, v. 84, n. 6, p.1094-1097, 2000.
- [38] ARKANI-HAMED, N.; SCHMALTZ, M. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. **Physical Review D**, v. 61, n. 3, 2000.