UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estados Coerentes Para o Oscilador de Dirac via Álgebra de Wigner-Heisenberg

André de Lima Alves

CAMPINA GRANDE

Novembro

- 2017 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estados Coerentes Para o Oscilador de Dirac via Álgebra de Wigner-Heisenberg

André de Lima Alves

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo, apresentada ao curso de pós graduação em Física da Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

Novembro

- 2017 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

A474e Alves, André de Lima.
Estados coerentes para o oscilador de dirac via álgebra de Wigner-Heisenberg / André de Lima Alves. – Campina Grande, 2018.
68 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo, Prof. Dr. Rafael Lima Rodrigues".
Referências.

1. Estados Coerentes. 2. Álgebra de Wigner-Heisenberg. 3. Oscilador de Dirac. I. Bernardo, Bertúlio de Lima. II. Rodrigues, Rafael Lima. III. Título.

CDU 530.145(043)

A meus pais,
Severino Cassemiro (in memoriam)
e Ana Lima Alves, por todo apoio
e incentivo incondicional.
À minha família, por sua
capacidade de acreditar
e investir em minha formação, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a meu orientador Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo, pelo apoio, confiança neste trabalho e empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

Aos meus co-orientadores, Aércio Ferreira de Lima e Professor Rafael de Lima Rodrigues, pela ajuda frequente no transcorrer do curso pela co-orientação, ensinamentos, conselhos e incentivo.

A minha mãe dona Ana, pelo amor, incentivo e apoio incondicional nas horas difíceis.

Ao meu pai Severino Cassimiro, *In memoriam*, você foi em todos os momentos da minha vida o meu maior mestre.

A meus irmãos Aelson e Adriano, pela alegria e felicidade que vocês me proporcionam em todos os momentos.

A todos os meus familiares por acreditarem em mim, muito obrigado pela força e carinho que todos vocês me transmitem.

A minha noiva Adriele, obrigado pela paciência, e compreensão durante todos esses anos, obrigado por sua capacidade de me trazer paz na correria do dia-a-dia, com você tenho me sentido vivo de verdade.

Aos meus amigos que conquistei no curso por todos os momentos que passamos juntos ao longo dessa vida acadêmica.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Física e a Universidade Federal de Campina Grande - UFCG por viabilizar os meus estudos com toda sua infraestrutura e administração.

A CAPES, pelo financiamento deste trabalho.

"O oposto de uma afirmação
correta é uma afirmação falsa.
Mas o oposto de uma verdade
profunda pode ser outra verdade
profunda".
(Niels Bohr).

RESUMO

Os estados coerente são observados em uma gama muito grande de sistemas físicos, o que possibilita seu estudo e aplicações em varias áreas da ciência. Apresentaremos uma breve discussão histórica e uma pequena análise do tratamento algébrico para os estados coerentes do oscilador harmônico simples. Apresentaremos a álgebra de Wigner-Heisenberg (WH) e o método algébrico para o oscilador generalizado desenvolvido por Jayaraman e Rodrigues [1]. Neste trabalho, investigaremos os estados coerentes do oscilador de Dirac para o caso tridimensional no contexto da álgebra de Wigner-Heisenberg. Para isso, é estabelecida uma conexão entre o hamiltoniano de Dirac quadrático ($\tilde{H}_D$), e o hamiltoniano de Wigner (H_W) em perspectiva da determinação do espectro de energia e das autofunçoes do oscilador de Dirac. Utilizamos a técnica da supersimetria (SUSI), como recurso algébrico, evidenciando a relação existente entre o hamiltoniano de Wigner e o oscilador harmônico isotrópico tridimensional supersimétrico.

Palavras-chave: Estados coerentes, álgebra de Wigner-Heisenberg, oscilador de Dirac.

ABSTRACT

The coherent states are observed in a very wide range of physical systems, which enables their study and applications in various areas of science. We will present a brief historical discussion and a small analysis of the algebraic treatment for the coherent states of the simple harmonic oscillator. We will present the Wigner-Heisenberg algebra (WH) and the algebraic method for the generalized oscillator developed by Jayaraman and Rodrigues [1].In this work, we will investigate the coherent states of the Dirac oscillator for the three-dimensional case in the context of the Wigner-Heisenberg algebra. In doing so, a connection is established between the Dirac Hamiltonian ($\tilde{H}_D$), and the Wigner Hamiltonian (H_W) in perspective of the determination of the energy spectrum and the eigenfunctions of the Dirac oscillator. We use the supersymmetry technique (SUSY) as an algebraic resource to evidence the relationship between Wigner's Hamiltonian and the supersymmetric three-dimensional isotropic harmonic oscillator.

Keywords: Coherent states, Wigner-Heisenberg algebra, Dirac oscillator

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Os estados coerentes (EC) são os estados quânticos específicos do oscilador harmônico quântico, cuja dinâmica é bem semelhante ao comportamento oscilatório de um oscilador harmônico clássico. Esses estados foram estudados primeiramente por Ervin Schrödinger em 1926, quando analisava soluções da equação de Schrödinger que obedecem ao principio da correspondência, ou seja, o comportamento dos sistemas descritos pela teoria quântica reproduz a física clássica no limite de grandes números quânticos [2].

Schrödinger investigou a possibilidade de construir autofunções quânticas para um oscilador harmônico simples que apresentassem as seguintes características: fossem estados quânticos descritos por funções de onda gaussianas, em que a largura da gaussiana que descreve o estado fundamental possuíssem momento linear e energia arbitrária, seguissem a trajetória de uma partícula clássica no potencial e não mudassem sua forma com o tempo [3]. Dessa forma esses estados foram denominados, estados quase-clássicos devido ao fato de possuírem uma analogia clássica. Os estados coerentes descritos por Schrödinger, mostram que a probabilidade de encontrar o oscilador numa posição, significa que ela é uma função gaussiana que depende do tempo e da posição, centrada num ponto que oscila de forma análoga à posição horária do oscilador harmônico simples em mecânica clássica.

Após o surgimento do laser em 1960, diversos trabalhos sobre a interação da matéria com o campo eletromagnético foram publicados. Klauder [7], em 1960, usou os estados quasi-classicos e mostrou a equivalência da mecânica quântica e da mecânica semiclássica de feixes de luz com estatística arbitrária, não considerando efeitos não-lineares, desenvolvendo a eletrodinâmica quântica.

Em 1963, Glauber forneceu uma descrição completa da teoria quântica da coerência para o campo eletromagnético [4]. Ele tinha como objetivo mostrar uma descrição consistente da coerência óptica para a teoria quântica. Em outros trabalhos Glauber "consolidou" que os autoestados quânticos de um campo de radiação são exatamente os autoestados do operador de aniquilação dos quanta do campo eletromagnético e que essas funções podem ser obtidas a partir da ação de um operador de deslocamento atuando sobre o vácuo do campo eletromagnético, mostrando que essas definições são equivalentes aos estados de incerteza mínima descobertos por Schrödinger.
De forma independente, Klauder[7] e Sudarshan[8] relacionaram os estados coerentes ao campo da optica quântica. Borut e Girardello[9] e Perelomov[21] estenderam a ideia de estados coerentes de osciladores harmônicos para outros grupos de Lie.

Os estados coerentes desempenham um papel importante na teoria quântica, fornecendo uma relação entre as descrições clássia e quântica. Esses estados possuem uma série de propriedades que possibilitam diversas aplicações, como por exemplo, na teoria da quantização, na física da matéria condensada, na teoria da radiação, em cálculos quânticos, na gravidade quânticas, na física matemática, na matemática aplicada, com aplicações que vão desde a quantização até processamento de sinais e imagens [5]. Os estados coerentes tem sido objeto de vários estudos recentes.

Júnior [5], estudou os estados coerentes via álgebra de Wigner-Heisenberg e sua aplicação no oscilador de Celka-hussim, em que determinou o espectro completo de energia e autofunções do oscilador de Wigner e do oscilador de Celka-Kussim. Cunha [6], estudou os estados coerentes para o oscilador isotônico via a super-realização da álgebra de Wigner-Heisenberg, Lubo *et al.* [11] publicaram um trabalho em que estudam os estados coerentes SUSI e trajetórias clássicas, Amir e Naila [12] estudaram os estados coerentes para o oscilador harmônico não linear. Outras aplicações podem ser verificadas nas referências, [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20].

Dessa maneira, os estados coerentes associados ao oscilador harmônico quântico são também conhecidos como estados coerentes canônicos, estados coerentes gaussianos ou estados coerentes padrão.

Neste trabalho, utilizaremos método algébrico de Wigner-Heisenberg (WH) para o oscilador generalizado, ou álgebra de WH, desenvolvido por Jayaraman e Rodrigues [1], que é uma ferramenta algébrica efetiva para a resolução espectral de potenciais relacionados a sistemas em conexão com osciladores.

Este trabalho esta organizado da seguinte forma: No capítulo 2, faremos uma revisão dos estados coerentes, onde serão apresentadas algumas propriedades para o oscilador harmônico simples e mostraremos que e obedecem à equação de autovalor do operador de abaixamento do OHS, em seguida, mostraremos que os mesmos estados podem ser obtidos através de um operador deslocamento atuando sobre a função de onda do estado fundamental do oscilador, e possuem duas propriedades importantes: a não ortogonalidade e a completeza. Para finalizar o capítulo, mostraremos que os estados coerentes são estados de incerteza miníma e satisfazem o principio da incerteza de Heisenberg.

No capítulo 3, apresentaremos a álgebra de WH, utilizando a técnica de operadores escada, ou método algébrico de Wigner Heisenberg, desenvolvido por Jayaraman e Rodrigues, em que mostraremos as relações de comutação e anti-comutação que envolvem o Hamiltoniano de Wigner, assim obtendo uma realização em termos de coordenadas bosônicas e fermiônicas, seguindo uma breve introdução sobre mecânica quântica supersimétrica, para finalmente estabelecermos uma conexão existente entre o sistema de Wigner e um sistema supersimétrico tratado por Ui [10].

No capítulo 4, apresentaremos a equação de Dirac, começando por uma breve discussão histórica que deu origem à equação, apresentamos a solução da equação de Dirac para a partícula livre e em seguida chegamos ao modelo do oscilador de Dirac proposto por Moshinsk e Szezepaniak, mostrando suas principais características.

No capítulo 5, encontraremos os estados coerentes para o oscilador de Dirac tridimensional via operador de abaixamento. Na literatura, encontramos apenas uma referência em que os autores Nogami e Toyama estudaram o caso unidimensional para o oscilador de Dirac [22]. As autofunções e autoenergias do oscilador de Dirac são obtidas através de uma relação entre o hamiltoniano de Dirac e o hamiltoniano supersimétrico, com a super-realização dos operadores escadas da álgebra de Wigner. O problema espectral do oscilador de Dirac supersimétrico é também resolvido.

Capítulo 2

Estados Coerentes

Na mecânica quântica, um estado coerente (EC) é o estado quântico específico do oscilador harmônico quântico cuja dinâmica mais se assemelha ao comportamento oscilante de um oscilador harmônico clássico. Eles possibilitam uma gama de aplicações na descrição semiclássica de sistemas quânticos, na teoria de quantização, na física da matéria condensada, em computação quântica [24], etc. Por essa razão, são geralmente chamados de estados coerentes canônicos (CCS).

Os estados coerentes possuem duas importantes propriedades: a não-ortogonalidade e a completeza [23]. Como as autofunções que descrevem esses estados são gaussianas, eles possuem incerteza mínima, conforme à relação de incerteza de Heisenberg. Quando se considera os estados coerentes na descrição de Schrödinger, vê-se que a probabilidade de encontrar o oscilador numa posição tem de fato um significado especial: ela é uma função gaussiana que depende do tempo e da posição, centrada num ponto que oscila de forma análoga à posição horária do oscilador harmônico simples em mecânica clássica.

Na próxima seção, veremos algumas propriedades dos estados coerentes para o oscilador harmônico simples (OHS), definidos como sendo as autofunções do operador de abaixamento. Analisaremos os estados coerentes via um operador deslocamento atuando sobre à função de onda, e por fim os estados coerentes como sendo estados de incerteza mínima.

2.1 Estados Coerentes do Oscilador Harmônico Simples

Abordaremos agora algumas propriedades dos estados coerentes para o oscilador harmônico simples (OHS). Esses estados, que são uma superposição das autofunções do oscilador harmônico simples, são definidos como sendo as autofunções do operador de abaixamento do oscilador hamonico simples [23], ou seja, os EC satisfazem à equação de autovalor do operador de abaixamento dos níveis de energia do OHS. Neste trabalho utilizaremos a notação de bra-ket de Dirac, e o sistema de unidades naturais($\hbar = \omega = m = 1$), por simplicidade.

Partindo do hamiltoniano que governa o OHS, temos

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}}{2}, \tag{2.1.1}$$

onde $\hat{x}$ e $\hat{p}$ são hermitianos. Podemos definir os seguintes operadores não hermitianos

$$\hat{a}^- = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} + i \left(\frac{1}{2\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{p_x}, \tag{2.1.2}$$

e

$$\hat{a}^+ = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} - i \left(\frac{1}{2\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{p_x}. \tag{2.1.3}$$

Esses operadores são conhecidos como os operadores de abaixamento e levantamento dos níveis de energia do OHS, e com esses operadores podemos construir um operador número definido por $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}^-$, e mostrar que:

$$\hat{N} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}; \quad \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right). \tag{2.1.4}$$

Como $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$, eles podem ser diagonalizados simultaneamente. Assim, resolvendo

$\hat{N}|n\rangle$, obtemos $\hat{H}|n\rangle$, que por comparação fornece o espectro do oscilador em função de n, ou seja,

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.1.5}$$

com

$$\left[\hat{a}^-, \hat{a}^+\right]_- = 1, \quad a^\dagger = \left(\hat{a}^-\right)^\dagger \tag{2.1.6}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{a}^\pm\right]_- = \pm\hat{a}^\pm. \tag{2.1.7}$$

Agora podemos escrever o operador hamiltoniano da seguinte forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left[\hat{a}^-, \hat{a}^+\right] = \hat{a}^+\hat{a}^- + \frac{1}{2}. \tag{2.1.8}$$

Os operadores de abaixamento e levantamento dos níveis de energia do OHS geram os autoestados de número, pois atuando-os sobre um *ket* $|n\rangle$ obtém-se outro *ket* $|n\pm 1\rangle$. Para uma melhor compreensão do significado de $\hat{a}^-$, $\hat{a}^+$ e $\hat{N}$ considere as relações de comutação

$$[\hat{N}, \hat{a}^+] = [\hat{a}^+\hat{a}^-, \hat{a}^+] = \hat{a}^+[\hat{a}^-, \hat{a}^+] + [\hat{a}^+, \hat{a}^+]\hat{a}^- = \hat{a}^+, \tag{2.1.9}$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^-] = [\hat{a}^+\hat{a}^-, \hat{a}^-] = \hat{a}^+[\hat{a}^-, \hat{a}^-] + [\hat{a}^+, \hat{a}^-]\hat{a}^- = -\hat{a}^-. \tag{2.1.10}$$

Assim, temos o seguinte resultado

$$\hat{N}\hat{a}^+|n\rangle = \left([\hat{N}, \hat{a}^+] + \hat{a}^+\hat{N}\right)|n\rangle = \left(\hat{a}^+ + n\hat{a}^+\right)|n\rangle = (n+1)\,\hat{a}^+|n\rangle, \tag{2.1.11}$$

e

$$\hat{N}\hat{a}^-|n\rangle = \left([\hat{N}, \hat{a}^+] + \hat{a}^-\hat{N}\right)|n\rangle = \left(-\hat{a}^- + n\hat{a}^-\right)|n\rangle = (n-1)\,\hat{a}^-|n\rangle. \tag{2.1.12}$$

Estas relações, dadas pelas equações (3.1.30) e (2.1.12), implicam que $\hat{a}^+|n\rangle$ e $\hat{a}^-|n\rangle$

são também autovetores de $\hat{N}$ com autovalor aumentando ou diminuindo por uma unidade. Devido ao fato de que o aumento ou decréscimo de n por 1 equivale à criação ou destruição de um quantum de energia $\hbar\omega$ chamaremos $\hat{a}^-$ e $\hat{a}^+$ de operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Da Eq.(2.1.12) implica que $\hat{a}^-|n\rangle$ e $|n-1\rangle$ são os mesmos, a menos de uma constante multiplicativa. Ou seja

$$\hat{a}^-|n\rangle = c|n-1\rangle, \tag{2.1.13}$$

onde c é uma constante que pode ser determinada pela condição de normalização

$$\langle n|\hat{a}^+\hat{a}^-|n\rangle = |c|^2. \tag{2.1.14}$$

Do fato de que $\hat{a}^+\hat{a}^-$ é o operador número, temos

$$n = |c|^2, \tag{2.1.15}$$

sendo n um número real e positivo, isso nos leva a concluir que

$$\hat{a}^-|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \tag{2.1.16}$$

De forma análoga, se pode mostrar que

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \tag{2.1.17}$$

Caso continuemos aplicando o operador de destruição $\hat{a}^-$ em (2.1.16), temos:

$$\begin{aligned} (\hat{a}^-)^2|n\rangle &= \sqrt{n(n-1}|n-2\rangle \\ (\hat{a}^-)^3|n\rangle &= \sqrt{n(n-1)(n-2)}|n-3\rangle \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Podemos obter autovalores de operadores numéricos com valores de n cada vez menores. Sendo n real e positivo, ele precisa ser inteiro, pois só assim a série é interrompida, ao passar pela situação $\hat{a}^-|0\rangle = \sqrt{0}|-1\rangle = 0$, o que evita gerar um ket com autovalor negativo de $\hat{N}$. Como o menor valor de n é zero, concluímos que o estado fundamental do oscilador harmônico simples tem energia $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Conhecendo o estado fundamental $|0\rangle$, uma forma de obter os outros estados é a partir da relação (2.1.17), onde aplicando o operador de criação $\hat{a}^+$ sucessivamente no estado fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \hat{a}^+|0\rangle, \\ |2\rangle &= \left(\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^2}{\sqrt{2}}|0\rangle, \\ |3\rangle &= \left(\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{3}}\right)|2\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^3}{\sqrt{3!}}|0\rangle, \\ &\vdots \\ |n\rangle &= \frac{(\hat{a}^+)^n}{n!}|0\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

onde (2.1.19) é um autoestado de $\hat{H}$ e $\hat{N}$ com autovalores de energia $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ e n, respectivamente.

As equações (2.1.16) e (2.1.17) constituem a álgebra de Heisenberg-Weyl, sendo denominadas de métodos de fatorizarão ou método de operador em mecânica quântica [25]. Os estados coerentes podem ser representados como uma combinação linear dos autokets do OHS;

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle. \tag{2.1.20}$$

que obedece a equação de autovalor,

$$\hat{a}^-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{2.1.21}$$

Para resolvermos a Eq.(2.1.20), multiplicaremos a equação de auto valor (2.1.21) por $\langle n|$, assim temos que,

$$\langle n|\hat{a}^-|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle. \tag{2.1.22}$$

A partir do fato de que $\hat{a}^{+} = (\hat{a}^{-})^{\dagger}$, o lado esquerdo da Eq.(2.1.22) pode ser desenvolvido, obtendo

$$\sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle. \tag{2.1.23}$$

Assim, utilizando a relação de recorrência acima podemos escrever

$$\sqrt{n}\langle n|\alpha\rangle = \alpha\langle n-1|\alpha\rangle. \tag{2.1.24}$$

e usando a expressão (2.1.19), que representa o estado fundamental do oscilador, podemos escrever $\langle n|$, como sendo

$$\langle n| = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|(\hat{a}^{-})^{n}. \tag{2.1.25}$$

Substituindo em (2.1.23), chegamos em

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle, \tag{2.1.26}$$

representando $\langle n|\alpha\rangle$ por $c_n(\alpha)$, podemos reescrever (2.1.26) na seguinte forma

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}}c_0(\alpha). \tag{2.1.27}$$

Assim, os autokets do operador de abaixamento do OHS, $|\alpha\rangle$, são representados por

$$|\alpha\rangle = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{2.1.28}$$

Para determinarmos o valor da constante c_0, aplicamos a condição de normalização $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. Assim,

$$|c_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1, \tag{2.1.29}$$

onde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{|\alpha|}. \tag{2.1.30}$$

Dessa forma, o valor da constante fica $c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$. Substituindo em (2.1.28), obtemos os estados coerentes normalizados do oscilador harmônico simples como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^n}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{2.1.31}$$

2.2 Estados Coerentes Via Operador Deslocamento

Faremos agora uma abordagem alternativa para obter os estados coerentes. Para isso consideremos o n-ésimo autoestado excitado do OHS, que é obtido a partir do autoestado fundamental atuando o operador de levantamento n-vezes. Da Eq.(2.1.19) temos

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle. \tag{2.2.32}$$

Da equação acima, podemos analisar a probabilidade de encontrar o oscilador no n-ésimo nível dos estados coerentes $|\alpha\rangle$ através da seguinte equação

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \tag{2.2.33}$$

A equação (2.2.33) indica que a probabilidade P_n fica expressa por uma distribuição de Poisson, com valor médio de $\langle\alpha\rangle$ dado por $|\alpha|^2$ e incerteza no número igual a zero $(\Delta n)^2 = 0$ [23].

Substituindo a expressão (2.2.32) na Eq.(2.1.31) obtemos o seguinte resultado para os estados coerentes;

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^+)^n}{n!} |n\rangle, \tag{2.2.34}$$

ou ainda,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^+} |0\rangle. \tag{2.2.35}$$

Podemos definir um operador $\hat{D}(\alpha)$ representado por

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}+\alpha\hat{a}^+}. \tag{2.2.36}$$

Assim, o estado coerente $|\alpha\rangle$ pode ser expresso por

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \tag{2.2.37}$$

Este operador atuando sobre o autoestado fundamental é um operador deslocamento e unitário, ou seja, os estados coerentes são formas deslocadas do estado fundamental do oscilador. Podemos mostrar que o operador $\hat{D}(\alpha)$ gera um estado coerente $|\alpha\rangle$ ao atuar no estado de vácuo $|0\rangle$, para isso utilizaremos a seguinte identidade

$$e^{-\alpha^*\hat{a}^-}|0\rangle = \left[1 - \alpha^*\hat{a}^- + \frac{1}{2}(\alpha^*\hat{a}^-)^2 + \ldots\right]|0\rangle = |0\rangle, \tag{2.2.38}$$

e podemos escrever

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^+} e^{-\alpha^*\hat{a}^-}|0\rangle. \tag{2.2.39}$$

Como o comutador $[\hat{a}^-, \hat{a}^+] = 1$, a expansão então pode assumir a seguinte forma

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^+} e^{-\alpha^*\hat{a}^-} = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}^-}, \tag{2.2.40}$$

onde utilizamos, na equação (2.2.39), o teorema de Baker-Campbell-Hausdorff [25]. Para mostrar que o operador $\hat{D}(\alpha)$ se trata realmente de um operador deslocamento a expressão acima sera reescrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\hat{D}(\alpha) &= e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}^-} \\
\hat{D}(\alpha) &= e^{\alpha\hat{a}^+} f(\hat{a}^-) \\
\hat{D}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^+)^n}{n!} f(\hat{a}^-),
\end{aligned} \tag{2.2.41}$$

onde $f(\hat{a}^-)$ é uma função expressa por

$$f(\hat{a}^-) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* \hat{a}^-}. \tag{2.2.42}$$

Atuando o operador $\hat{a}^-$ na Eq.(2.2.41), temos

$$\hat{a}^- \hat{D}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{a}^-(\alpha \hat{a}^+)^n}{n!} f(\hat{a}^-), \tag{2.2.43}$$

e usando identidade [26],

$$\hat{a}^-(\hat{a}^+)^n = (\hat{a}^+)^n + n(\hat{a}^+)^{n-1}. \tag{2.2.44}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\hat{a}^- \hat{D}(\alpha) \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} [(\hat{a}^+)^n + n(\hat{a}^+)^{n-1}] f(\hat{a}^-) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^+)^n e^{\frac{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* \hat{a}^-}{\hat{a}^-}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\alpha^n}{n!} (\hat{a}^+)^{n-1} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* \hat{a}^-} \\
&= \hat{D}(\alpha)\hat{a}^- + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} (\hat{a}^+)^{n-1} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* \hat{a}^-} \\
&= \hat{D}(\alpha)(\hat{a}^- - \alpha).
\end{aligned} \tag{2.2.45}$$

Uma vez que $\hat{D}(\alpha)$ é um operador unitário, multiplicaremos a equação Eq.(2.2.45) pela inversa do operador $\hat{D}(\alpha)$

$$\hat{D}(\alpha)^{-1} \hat{a}^- \hat{D}(\alpha) = (\hat{a}^- - \alpha), \tag{2.2.46}$$

e de modo semelhante

$$\hat{D}(\alpha)^{-1} \hat{a}^+ \hat{D}(\alpha) = (\hat{a}^+ - \alpha^*), \tag{2.2.47}$$

onde α é a quantidade de deslocamento no espaço de fase e α^* é o complexo conjugado desse deslocamento. Esse operador possui a propriedade de deslocar um estado localizado no espaço de fase por uma magnitude α, e também pode atuar sobre o estado de vácuo deslocando-o para um estado coerente. Por esse motivo $\hat{D}(\alpha)$ é chamado operador deslocamento.

Desta forma, os estados coerentes para o OHS são definidos como sendo autoestados obtidos pela atuação de um operador deslocamento sobre o autoestado fundamental, onde pode assumir valores complexos.

Uma propriedade importante para os estados coerentes $|\alpha\rangle$ é que eles são não ortogonais, ou seja, o produto escalar entre dois estados coerentes é não nulo. Para verificarmos essa propriedade, consideremos dois estados coerentes representados abaixo.

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_m \frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} \frac{(\hat{a}^+)^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_m \frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} |m\rangle \\
\langle\alpha'| &= e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha'^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \langle 0| \frac{(\hat{a}^-)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} \sum_n \langle n| \frac{(\alpha'^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{2.2.48}
$$

Calculando o produto escalar entre eles, temos

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha' \,|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m,n} \langle n| \frac{(\alpha'^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} |m\rangle \\
\langle\alpha' \,|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m,n} \frac{(\alpha'^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} \delta_{nm} \\
\langle\alpha' \,|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n} \frac{(\alpha'^*)^n \alpha^n}{n!} \\
\langle\alpha' \,|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}[|\alpha|^2 + |\alpha'|^2 - 2\alpha\alpha'^*]} \\
\langle\alpha' \,|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\alpha'|^2}.
\end{aligned} \tag{2.2.49}
$$

Como podemos observar, os estados coerentes não obedecem à condição de normalização $\langle\alpha' \,|\alpha\rangle = \delta_{\alpha'\alpha}$ uma vez que esses estados não são ortogonais e, portanto, o produto escalar entre eles não é nulo.

Podemos mostrar ainda a propriedade de completeza para os estados coerentes

$$
\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle\alpha| \, d[Re(\alpha)] d[Img(\alpha)] = 1. \tag{2.2.50}
$$

Utilizando a Eq.(2.2.48) podemos reescrever (2.2.50) como sendo

$$\frac{1}{\pi}\int\int e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}|n\rangle\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_m \frac{\alpha^{*m}}{(m!)^{\frac{1}{2}}}\langle m|\, d[Re(\alpha)]d[Img(\alpha)] = 1, \qquad (2.2.51)$$

ou ainda

$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \qquad (2.2.52)$$

Assim chegamos a relação de completeza para os estados coerentes.

2.3 Estados Coerentes Como Estados Quase Clássicos

Representaremos agora os estados coerentes como estados de incerteza mínima. Na representação de Schrodinger, ou representação de coordenadas, esses estados são funções gaussianas e, assim, satisfazem a relação de incerteza de Heisenberg $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$. Para isso, introduziremos o par de operadores hermitianos $\hat{x}$ e $\hat{p}$, que representam respectivamente a coordenada do oscilador e seu momento:

$$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{a}^- + \hat{a}^+\right), \qquad (2.3.53)$$

$$\hat{p} = i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\hat{a}^- + \hat{a}^+\right). \qquad (2.3.54)$$

Para obter o valor esperado de $\hat{x}$ e $\hat{p}$, nos estados coerentes, utilizamos a Eq.(2.1.21), que define esses estados,

$$\langle\hat{x}\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\langle\alpha|\hat{a}^-|\alpha\rangle + \langle\alpha|\hat{a}^+|\alpha\rangle\right] \qquad (2.3.55)$$

e

$$\langle\hat{p}\rangle = i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\langle\alpha|\hat{a}^-|\alpha\rangle + \langle\alpha|\hat{a}^+|\alpha\rangle\right]. \qquad (2.3.56)$$

Usando a forma adjunta hermitiana,$\hat{a}^-|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^+ = \alpha^*\langle\alpha|$, os valores esperado $\langle\hat{x}\rangle$ e $\langle\hat{p}\rangle$ são dados por

$$\langle\hat{x}\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha + \alpha^*) = \left(\frac{2\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} Re\,(\omega)\,, \tag{2.3.57}$$

e

$$\langle\hat{p}\rangle = i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (-\alpha + \alpha^*) = (2m\hbar\omega)^{\frac{1}{2}}\, Img\,(\alpha)\,, \tag{2.3.58}$$

onde $Re\,(\omega)$ e $Img\,(\alpha)$ são as partes real e imaginaria de α. Através de cálculos semelhantes, obtemos os seguintes resultados para $\langle\hat{x}^2\rangle$ e $\langle\hat{p}^2\rangle$

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left[1 + (\alpha + \alpha^*)^2\right], \tag{2.3.59}$$

e

$$\langle\hat{p}^2\rangle = -\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)\left[-1 + (-\alpha + \alpha^*)^2\right]. \tag{2.3.60}$$

Utilizando a condição de normalização $\langle\psi|\psi\rangle = \int |\psi(x)|^2 = 1$ e sabendo que operador $\hat{x}$ é diagonal em sua própria representação, o elemento de matriz somente não é nulo para $x = x'$. Assim, temos

$$\langle x'|\hat{x}|x\rangle = x\delta(x' - x). \tag{2.3.61}$$

Podemos agora, obter as variâncias de $\hat{x}$ e $\hat{p}$, representados por seus valores esperados, e obter o produtos da incertezas

$$\langle\Delta\hat{x}\rangle^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}^2\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3.62}$$

$$\langle\Delta\hat{p}\rangle^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}^2\rangle = \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3.63}$$

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{2}. \tag{2.3.64}$$

De acordo com o princípio da incerteza, este é o valor mínimo que o produto pode ter [26]. As dispersões $\Delta\hat{x}$ e $\Delta\hat{p}$ são independentes do tempo, o que quer dizer que os pacotes de onda são pacotes de onda de mínima incerteza a todo instante. Portanto, os estados coerentes correspondem a um pacote de dispersão mínima. No próximo capitulo será apesentada álgebra de Wigner-Heisenberg.

Capítulo 3

Álgebra de Wigner-Heisenberg

3.1 Realização Supersimétrica do Oscilador de Wigner

Faremos agora uma revisão da álgebra de Wigner-Heisenberg (WH), mostraremos a utilidade algébrica da técnica de operadores escada de WH para sistemas quânticos tridimensionais e nas próximas seções aplicaremos ao oscilador de Dirac para obtemos os níveis de energia e suas autofunções.

Wigner [27], em um trabalho publicado em 1950, fez o seguinte questionamento: será que as equações de movimento determinam as relações quânticas de comutação? Como resposta, ele obteve uma regra de comutação quântica generalizada para o oscilador harmônico unidimensional. No ano seguinte, Yang [28] encontrou uma representação de coordenada para o operador de momento linear $\hat{p}$. Para obtermos essa relação, partiremos da equação do oscilador harmônico unidimensional, cujo hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2) = \frac{1}{2}[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_+ = \frac{1}{2}(\hat{a}^-\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}^-), \tag{3.1.1}$$

onde utilizamos o sistema de unidades naturais ($\hbar = m = \omega = 1$), e o hamiltoniano $\hat{H}$ sendo expresso na forma bilinear simétrica dos operadores abstratos mutuamente adjuntos $a^{\pm}$ definidos por

$$\hat{a}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm i\hat{p} - \hat{x}); \quad (\hat{a}^{+})^{\dagger} = \hat{a^{-}}. \tag{3.1.2}$$

Wigner mostrou que as equações de Heisenberg de movimento

$$[\hat{H}, \hat{a}^{\pm}]_{-} = \pm\hat{a}^{\pm}, \tag{3.1.3}$$

obtidas também combinando a exigência de que $\hat{x}$ satisfaz a equação de movimento da forma clássica não implica necessariamente na regra quântica usual $[\hat{a^{-}}, \hat{a^{+}}]_{-} = 1 \rightarrow [\hat{x}, \hat{p}]_{-} = i$, mas em uma regra quântica mais geral.

A forma dessa regra quântica é obtida seguindo as seguintes condições mostrada por Yang [28], partindo do hamiltoniano $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \dot{\hat{x}}^2)$, o qual, obedece à equação de movimento $\ddot{\hat{x}} + \hat{x} = 0$. O espaço completo de Hilbert para o sistema definido pelo conjunto completo de autofunções de energia $\psi_n(x)$ satisfaz a condição de contorno que $\psi_n(x) \rightarrow 0$ com $x \rightarrow \pm\infty$ $(-\infty < x < +\infty)$. Princípio de normalização no espaço de Hilbert definido anteriormente. Dessas condições, exigimos que qualquer estado fisicamente possível representado por uma função de onda que satisfaça à condição de contorno ditas acima seja expansível em termos do conjunto de autofunções de energia da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x), \tag{3.1.4}$$

e converge para $f(x)$ apenas em

$$\lim_{N\rightarrow\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \psi_n(x)|^2 \, dx = 0, \tag{3.1.5}$$

não podendo excluir outras possibilidades de que $[\hat{x}, \hat{p}] = 1$.

Para deduzirmos a relação de comutação, consideremos a seguinte relação genérica $\dot{f} = [f, H]$, onde f é uma variável dinâmica qualquer de um dado sistema e $\hat{H}$, o hamiltoniano total. Da forma de $\dot{f}$, e do hamiltoniano $\hat{H}$ considerando $f = x$ segue-se que

$$\dot{x} = [x, \frac{1}{2}\dot{x}^2] = \frac{1}{2}(\dot{x}[x, \dot{x}] + [x, \dot{x}]\dot{x}). \qquad (3.1.6)$$

Agora definindo que $S = [x, \dot{x}] - 1$, temos

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(\dot{x}(S+1) + (S+1)\dot{x}), \qquad (3.1.7)$$

onde tirarmos as seguintes relações de anti-comutação

$$[S, \dot{x}]_+ = 0, \quad [S, x]_+ = 0. \qquad (3.1.8)$$

Dessas relações, pode ser demonstrado que

$$[S^2, x] = [S^2, \dot{x}] = 0, \quad [S, H] = 0, \qquad (3.1.9)$$

na qual mostra-se que S é uma constante de movimento, e que S^2 é uma constante numérica real. Na representação de x, (3.1.9) torna-se $(x' + x")X\langle x'|S|x"\rangle = 0$. Daí, segue-se que

$$\langle x'|S|x"\rangle = c(x')\delta(x' + x"), \qquad (3.1.10)$$

onde $c(x')$ é uma função arbitrária de x', e da propriedade hermitiana de S exigimos que $c(x') = c^*(-x')$. Na representação de x podemos escrever

$$S = c(x)R, \qquad (3.1.11)$$

sendo R um operador de reflexão definido por

$$R|x\rangle = |-x\rangle. \qquad (3.1.12)$$

A partir da representação de S, obtém-se a forma operacional de $\dot{x}$,

$$\dot{x} = -i\frac{d}{dx} + \frac{ic}{2x}R, \qquad (3.1.13)$$

em que c, é uma constante real que está relacionada com a energia do estado fundamental $E^{(0)}$ de $\hat{H}$, e $\hat{R}$ é um operador abstrato, hermitiano e unitário,

$$\hat{R} = \hat{R}^{\dagger} = \hat{R^{-1}} \rightarrow \hat{R}^{2} = 1, \tag{3.1.14}$$

e que possui as seguintes propriedades

$$[\hat{R}, \hat{a^{\dagger}}]_{+} = 0 \rightarrow [\hat{R}, \hat{H}]_{-} = 0. \tag{3.1.15}$$

Dessa forma, a representação generalizada das relações de comutação de Heisenberg são dadas por

$$[\hat{a^{-}}, \hat{a^{+}}]_{-} = 1 + c\hat{R} \rightarrow [\hat{x}, \hat{p}]_{-} = i(1 + c\hat{R}). \tag{3.1.16}$$

Assim o hamiltoniano dado em (3.1.1) e a forma geral da relação de comutação em (3.1.16) resultam no seguinte hamiltoniano generalizado

$$\hat{H} = \begin{cases} \hat{a^{+}}\hat{a^{-}} + \frac{1}{2}(1 + c\hat{R}) \\ \hat{a^{-}}\hat{a^{+}} - \frac{1}{2}(1 + c\hat{R}), \end{cases} \tag{3.1.17}$$

sendo $\hat{R}$ o operador de Klein $\pm exp[i\pi(\hat{H} - E_0)]$, enquanto que na representação de coordenadas de Schrodinger, investigada pela primeira vez por Yang, $\hat{R}$ é representado por $\pm P$ onde P é o operador de paridade definido por

$$P|x\rangle = \pm|x\rangle, \quad P^{-1} = P, \quad P^{2}1. \tag{3.1.18}$$

As relações básicas de anti-comutação e comutação (3.1.1) e (3.1.3) juntamente com suas relações derivadas (3.1.16) - (3.1.15) são referidas como constituindo a álgebra WH para um grau da liberdade. Assumindo que c é positivo, ou seja, $c = |c| > 0$. Assim, na representação coordenada a quantização generalizada de Wigner requer que

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p} = -i\frac{d}{dx} + \frac{ic}{2x}p, \quad R = P. \tag{3.1.19}$$

Para obter uma super-realização da álgebra de WH, introduzimos, além das coordenadas bosônicas usuais $(x, -i\frac{d}{dx})$, e fermiônicas $b^{\mp} = (b^{\pm})^{\dagger}$ que comutam com o conjunto bosônico e são representada em termos das matrizes de Pauli $\Sigma_i, (i = 1, 2, 3)$ pelas combinações

$$b^{-} = \Sigma_{+} = \frac{1}{2}(\Sigma_1 + i\Sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b^{-})^2 = 0, \tag{3.1.20}$$

$$b^{+} = \Sigma_{-} = \frac{1}{2}(\Sigma_1 - i\Sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b^{+})^2 = 0, \tag{3.1.21}$$

$$[b^{-}, b^{+}]_{+} = 1, \tag{3.1.22}$$

de modo que o operador de número fermiônico N_f seja dado por

$$N_f = b^{+}b^{-} = \Sigma_{-}\Sigma_{+} = \frac{1}{2}(1 + \Sigma_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.1.23}$$

A partir das relações de comutação de coordenadas bosônicas conhecidas e da álgebra das matrizes de Pauli, segue-se os seguintes operadores super-realizados:

$$\hat{a^{\pm}} \to a^{\pm}\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\Sigma_1 \frac{d}{dx} \mp \frac{c}{2x}\Sigma_1\Sigma_3 - \Sigma_1 x\right). \tag{3.1.24}$$

Estes operadores proporcionam um Hamiltoniano de Wigner diagonal com dois setores, bosônico e fermiônico

$$\hat{H} \to H\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[a^{-}\left(\frac{c}{2}\right), a^{+}\left(\frac{c}{2}\right)\right]_{+}, \tag{3.1.25}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{c}{2}\Sigma_3\right)\left(\frac{c}{2}\Sigma_3 - 1\right)\right], \tag{3.1.26}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{-}\left(\frac{c}{2} - 1\right) & 0 \\ 0 & H_{+}\left(\frac{c}{2} - 1\right) = H_{-}\left(\frac{c}{2}\right) \end{bmatrix}, \tag{3.1.27}$$

$$H_{-}\left(\frac{c}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{c}{2} - 1\right)\left(\frac{c}{2}\right)\right], \tag{3.1.28}$$

cujo setor bosônico é o Hamiltoniano de um oscilador harmonico mais uma barreira centrífuga e que satisfazem as relações dos operadores escada da álgebra de WH (3.1.3)

$$\left[H\left(\frac{c}{2}\right), a^{\pm}\left(\frac{c}{2}\right)\right]_{-} = \pm a^{\pm}\left(\frac{c}{2}\right). \tag{3.1.29}$$

Dessa forma, $a^{+}\left(\frac{c}{2}\right)$ e $a^{-}\left(\frac{c}{2}\right)$ são definidos como os operadores de levantamento e abaixamento para o super-oscilador de Wigner representado pelo hamiltoniano $H\left(\frac{c}{2}\right)$. Portanto, os operadores escadas satisfazem à seguinte relação de comutação quântica generalizada:

$$\left[a^{-}\left(\frac{c}{2}\right), a^{+}\left(\frac{c}{2}\right)\right]_{-} = 1 + c\Sigma_3. \tag{3.1.30}$$

Usando as propriedades das matrizes de Pauli,$\Sigma_i (i = 1, 2, 3)$, é possível mostrar que os operadores $\hat{a}^{\pm}$ e Σ_3 anti-comutam e, consequentemente, este comuta com o hamiltoniano de Wigner, ou seja

$$\left[\Sigma_3, a^{\pm}\left(\frac{c}{2}\right)\right]_{+} = 0 \to \left[\Sigma_3, H\left(\frac{c}{2}\right)\right]_{-} = 0; \quad \Sigma_3^2 = 1. \tag{3.1.31}$$

As relações de anti-comutação e comutação desenvolvidas em (3.1.25)-(3.1.31) são conhecidas como álgebra de Wigner-Heisenberg para sistemas quânticos em conexões com osciladores. Uma vez que $H\left(\frac{c}{2}\right)$ e Σ_3 comutam, podemos escolher autoestados simultâneos destes dois operadores, ocorrendo nos dois setores do Hamiltoniano de Wigner $H\left(\frac{c}{2}\right)$ dado por (3.1.27). Os setores do hamiltoniano $H_{-}\left(\frac{c}{2} - 1\right)$ e $H_{+}\left(\frac{c}{2} - 1\right)$ pertencem aos subespaço de $H\left(\frac{c}{2}\right)$ caraterizados pelos autovalores 1 e -1 de Σ_3. Por essa razão $H_{-}\left(\frac{c}{2} - 1\right)$ e $H_{+}\left(\frac{c}{2} - 1\right)$ são designados como os setores bosônicos e fermiônico do hamiltoniano de Wigner $H\left(\frac{c}{2}\right)$, respectivamente.

Agora, cosideraremos uma representação do sistema de Wigner em três dimensões, partindo da super realização dos operadores escadas e a forma do hamiltoniano de Wigner [1], onde nos termos potenciais do hamiltoniano diferem apenas por uma alteração do parâmetro $V_{-}\left(\frac{c}{2} - 1\right) = V_{-}\left(\frac{c}{2}\right)$, que guia a construção do hamiltoniano de

Wigner 3D $H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$.

Fazendo uso das seguintes propriedades:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}=\sigma_r p_r+\frac{i}{r}\sigma_r(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1),\quad p_r=-i\left(\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\left(-i\frac{\partial}{\partial r}\right)r=p_r^\dagger \quad (3.1.32)$$
$$\sigma_r=\frac{1}{r}\vec{\sigma}\cdot\vec{r},\quad \sigma_r^2=1,\quad [\sigma_r,\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1]_+=0,\quad L^2=\vec{\sigma}\cdot\vec{L}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1),$$

e de forma análoga com o que foi feito nas equações (3.1.24) e (3.1.25), fazendo as substituições

$$x\to r,\quad \frac{d}{dx}\to\left(\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r,\quad \left(\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)^\dagger=-\left(\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad (3.1.33)$$

e a constante $c/2$ pelo operador $(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$, que comuta com cada quantidade que ocorre em (3.1.34), obtemos os Hamiltoniano dos setores bosônico e fermiônico do hamiltoniano de Wigner 3D. O setor bosônico é o oscilador harmônico isotrópico tridimensional de uma partícula de spin$\frac{1}{2}$

$$H_-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})=\frac{1}{2}(\hat{p}^2+r^2)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)+r^2\right). \quad (3.1.34)$$

O hamiltoniano do setor fermiônico torna-se:

$$H_+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})=H_-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+2)+r^2\right). \quad (3.1.35)$$

Portanto, o hamiltoniano de Wiginer 3D é definido como sendo

$$H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)=\begin{bmatrix} H_-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) & 0 \\ 0 & H_+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})=H_-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)\end{bmatrix},$$

$$=\frac{1}{2}[a^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1),a^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)]_+, \quad (3.1.36)$$

de forma que o operador $\hat{a}^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$ é definido como

$$\hat{a}^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\pm\Sigma_1\left(\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mp\frac{1}{r}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)\Sigma_1\Sigma_3-\Sigma_1 r\right],$$

$$= [\hat{a}^{\mp}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)]^{\dagger}, \qquad (3.1.37)$$

que são de fato operadores escada de $H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$

$$[H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1),\hat{a}^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)]_- = \pm\hat{a}^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) \qquad (3.1.38)$$

e satisfazem à seguinte relação de comutação

$$[\hat{a}^{+}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1),\hat{a}^{-}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)]_- = 1+2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)\Sigma_3, \qquad (3.1.39)$$

com

$$[\Sigma_3,\hat{a}^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)]_+ = 0 \to [\Sigma_3, H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)]_- = 0. \qquad (3.1.40)$$

Assim, podemos escrever o hamiltoniano de WH generalizado como sendo

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}[a^-,a^+]_+ \\ &= a^+a^- + \frac{1}{2}\{1+2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})\Sigma_3\} \\ &= a^-a^+ - \frac{1}{2}\{1+2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})\Sigma_3\}. \end{aligned} \qquad (3.1.41)$$

As equações (3.1.38)-(3.1.41) definem a chamada álgebra de Wigner-Heisenberg. Uma vez que o operador $(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$ comuta com todos os elementos de $H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})$ e $\hat{a}^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$, ele pode ser substituído por seus autovalores $\pm(\ell+1)$, $\ell = 0,1,2,...$ onde ℓ é o número quântico do momento angular orbital. As autofunções de $(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$ para os autovalores $(\ell+1)$ e $-(\ell+1)$ são dadas pelos conhecidos harmônicos esféricos de spin $y_{\pm}$ dados por

$$y_+ = y_{\ell,\frac{1}{2};j=\ell+\frac{1}{2},m_j}(\Theta,\varphi), \quad y_- = y_{\ell+1,\frac{1}{2};j=(\ell+1)-\frac{1}{2},m_j}(\Theta,\varphi), \qquad (3.1.42)$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})y_{\pm} = \pm(\ell+1)y_{\pm}, \quad \sigma_r y_{\pm} = y_{\mp}, \qquad (3.1.43)$$

onde $j = \ell + \frac{1}{2} = (\ell + 1) - \frac{1}{2}$ é o número quântico do momento angular total e m_j, o número quântico magnético correspondente.

Considerando agora as autofunções simultâneas de H_{W} e $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1})$ dadas por

$$\psi_{\mathrm{W}+} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{1,+}(r) \\ \tilde{R}_{2,+}(r) \end{pmatrix} y_+, \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1})\psi_{\mathrm{W}+} = (\ell + 1)\psi_{\mathrm{W}+}. \tag{3.1.44}$$

e

$$\psi_{\mathrm{W}-} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{1,-}(r) \\ \tilde{R}_{2,-}(r) \end{pmatrix} y_-, \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1})\psi_{\mathrm{W}-} = -(\ell + 1)\psi_{\mathrm{W}-}, \tag{3.1.45}$$

observando a forma semi-definida positiva de H_{W}, as relações escada em (3.1.38) e a forma de H_{W} em (3.1.41), dita que a energia do estado fundamental $E^0_{\mathrm{W}}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) \geq 0$, onde $E_{\mathrm{W}}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)$, que indica uma função de $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)$, é determinada pela condição de aniquilação, e forma (3.1.41), que se da para dois casos:

Caso(i)

$$a^- \psi^{(0)}_{\mathrm{W}+} = 0, \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1}) \to \ell + 1. \tag{3.1.46}$$

Caso(ii)

$$a^- \psi^{(0)}_{\mathrm{W}-} = 0, \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1}) \to -(\ell + 1). \tag{3.1.47}$$

Juntamente com a normalização em $\psi^{(0)}_{\mathrm{W}+}$ e $\psi^{(0)}_{\mathrm{W}-}$, para implementar as condições nos casos (i) e (ii), expressaremos $a^{\mp}$ dados em (3.1.37) nas seguintes formas fatorizadas:

$$\begin{aligned} a^- &= a^-(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma_1 r^{\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})\Sigma_3 - \mathbf{1}\}} exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right) exp\left(\frac{r^2}{2}\right) r^{-\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})\Sigma_3 - \mathbf{1}\}} \end{aligned} \tag{3.1.48}$$

$$
\begin{aligned}
a^{+} &= (a^{-})^{\dagger} = a^{+}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_1 r^{-\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})\Sigma_3-\mathbf{1}\}} exp\left(\frac{r^2}{2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right) exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})\Sigma_3-\mathbf{1}\}}
\end{aligned}
\tag{3.1.49}
$$

Para o caso (i), combinando (3.1.48) com (3.1.46), obtém-se

$$
exp(\frac{r^2}{2}) r^{-\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})\Sigma_3-\mathbf{1}\}} \begin{pmatrix} \tilde{R}^{(0)}_{1,+}(r) \\ \tilde{R}^{(0)}_{2,+}(r) \end{pmatrix} y_+ = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{3.1.50}
$$

onde $c_i, (i=1,2)$ são uma constantes reais. E após a operação nos espinores fermiônicos e na parte spin angular, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}^{(0)}_{1,+}(r) &\propto r^{\ell} exp(-\frac{r^2}{2}) \\
\tilde{R}^{(0)}_{2,+}(r) &\propto r^{-(\ell+2)} exp(-\frac{r^2}{2}).
\end{aligned}
\tag{3.1.51}
$$

Mantendo apenas a solução singular não normalizável $R^{(0)}_{1,+}(\gamma)$, e simplesmente tomamos a solução $R^{(0)}_{2,+}(\gamma)$, que é fisicamente inexistente, como zero, temos que a função de onda do estado fundamental normalizável é dada por

$$
\psi^{(0)}_{\mathrm{W}+} = \tilde{R}^{(0)}_{1,+}(r)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_+ = \begin{pmatrix} \tilde{R}^{(0)}_{1,+}(r) y_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}^{(0)}_{1,+}(r) \propto r^{\ell} exp(-\frac{r^2}{2}). \tag{3.1.52}
$$

Para o caso (ii), o procedimento acima pode simplesmente ser repetido obtendo

$$
\psi^{(0)}_{\mathrm{W}-} = \tilde{R}^{(0)}_{2,-}(r)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{R}^{(0)}_{2,-}(r) y_- \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}^{(0)}_{2,-}(r) = \tilde{R}^{(0)}_{1,+}(r) \propto r^{\ell} exp(-\frac{r^2}{2}). \tag{3.1.53}
$$

Voltando ao caso (i), a função de onda do estado fundamental $\Psi^{(0)}_{\mathrm{W}+}$ de (3.1.52) tem paridade dada por $-\Sigma_3$, isto é,

$$
\Sigma_3 \psi^{(0)}_{\mathrm{W}+} = \psi^{(0)}_{\mathrm{W}+}. \tag{3.1.54}
$$

A energia do estado fundamental $E_{\mathrm{W}}^{(0)}(= E_{\mathrm{W}}^{(0)}(\ell+1))$ é, portanto, dada a partir da condição de aniquilação

$$a^{-}\psi_{\mathrm{W}+}^{(0)} = 0, \tag{3.1.55}$$

ou seja,

$$H_{\mathrm{W}}\psi_{\mathrm{W}+}^{(0)} = \{a^{+}a^{-} + \frac{1}{2}[1 + 2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L} + \mathbf{1})\Sigma_3]\}\psi_{\mathrm{W}+}^{(0)} = (\ell + \frac{3}{2})\psi_{\mathrm{W}+}^{(0)} = E_{\mathrm{W}}^{(0)}\psi_{\mathrm{W}+}^{(0)}, \tag{3.1.56}$$

com

$$E_{\mathrm{W}}^{(0)} = E_{\mathrm{W}}^{(0)}(\ell+1) = \ell + \frac{3}{2} = j+1, \quad (j = \ell + \frac{1}{2}). \tag{3.1.57}$$

A partir da atuação de a^{+} como o operador de levantamento dos níveis de energia em (3.1.38), o espectro de energia completo é dado por

$$E_{\mathrm{W}}^{(n)}(\ell+1) = \ell + \frac{3}{2} + n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.1.58}$$

As autofunções de onda do n-ésimo estado excitado Ψ_{W}^{n} são fornecidas pela atuação do operador de levantamento a^{+}, atuando n vezes na autofunção de onda no estado fundamental:

$$\psi_{\mathrm{W}}^{(n)} \propto (a^{+})^{n}\psi_{\mathrm{W}+}^{(0)}(r,\Theta,\varphi) = \left(a^{+}\right)^{n}\tilde{R}_{1,+}^{(0)}(r)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}y_{+}(\Theta,\varphi). \tag{3.1.59}$$

A partir da operação de Σ_1 em a^{+}, as Eqs. (3.1.37) e (3.1.49), e o fato de que cada aplicação de Σ_1 alterna os espinores de Σ_3 da seguinte forma:

$$\Sigma_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \Sigma_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{3.1.60}$$

Daí o número quântico, $n = 2m$, em (3.1.59), a paridade Σ_3, e o número quântico, $n = 2m+1$, e paridade Σ_3. Esta observação juntamente com a forma diagonal de H_{W} leva à identificação imediata dos quanta pares e impares, com $n = 2m$ e $n = 2m+1$, das funções de onda $R_{1,+}^{(n=2m)}(r)y_{+}$ e $R_{2,+}^{(n=2m+1)}(r)y_{+}$ de $\tilde{H}_{-}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})$ e $\tilde{H}_{+}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) = \tilde{H}_{-}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})$.

De modo a obter o seu n-ésimo estado excitado de energia. As autofunções radiais correspondentes, e os autovalores de energia do n-ésimo estado excitado, tornam-se

$$\begin{aligned} R_\ell^{(m)}(r) &= \tilde{R}_{1,+}^{(n=2m)}(r) \\ E_\ell^{(m)} &= E_{\mathrm{W}}^{(2m)}(\ell+1) = E_{\mathrm{W}}^{(0)}(\ell+1) + 2m = \ell + \frac{3}{2} + 2m, \\ R_\ell^{(m)}(r) &= \tilde{R}_{1,+}^{(n=2m)}(r) = R_{N\ell}(r) \propto r^\ell EXP\left(-\frac{r^2}{2}\right) L_{m=\frac{1}{2}(N-\ell)}^{(\ell+\frac{1}{2})}(r^2) \quad (3.1.61) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_{\ell+1}^{(m)}(r) &= \tilde{R}_{2,+}^{(n=2m+1)}(r), \\ E_{\ell+1}^{(m)} &= E_{\mathrm{W}}^{(2m+1)}(\ell+1) = E_{\mathrm{W}}^{(0)}(\ell+1) + 2m + 1 = \ell + 1 + \frac{3}{2} + 2m, \\ R_{\ell+1}^{(m)}(r) &= \tilde{R}_{2,+}^{(n=2m+1)}(r) \\ &= R_{N\ell+1}(r) \propto r^{\ell+1} EXP\left(-\frac{r^2}{2}\right) L_{m=\frac{1}{2}(N-\ell-1)}^{(\ell+\frac{3}{2})}(r^2) \quad (3.1.62) \end{aligned}$$

com $m = 0, 1, 2, \ldots$, e L_m^n são os polinômios de Laguerre associados.

A análise acima mostra como a técnica de operadores da álgebra de WH pode ser efetivamente utilizada para a resolução espectral completa para o oscilador harmônico isotrópico tridimensional de spin-$\frac{1}{2}$.

3.2 Mecânica Quântica Supersimétrica

A supersimetria surgiu no contexto da Física de Partículas e Campos e permite relacionar estados bosônicos, associados a partículas de spin inteiro que obedeça a estatística de Bose-Eisten, e estados fermiônicos, associados a particulas com spin semi-inteiro que obedecem à estatística de Fermi-Dirac [30]. No inicio dos anos 80, Witten [29] propôs como caminho para o entendimento da quebra da SUSI a construção de um esquema em mecânica em que os princípios da SUSI estavam presentes; esse esquema é chamado de Mecânica Quântica Supersimétrica (MQSUSI). A super-álgebra da MQSUSI, como é conhecida, tem a sua forma escrita como sendo,

$$[Q_-, Q_+]_+ = H_{ss} \tag{3.2.63}$$

$$[Q_-, Q_-]_+ = [Q_+, Q_+]_+ = 0, \tag{3.2.64}$$

$$[H_{ss}, Q_-]_- = [H_{ss}, Q_+]_- = 0, \tag{3.2.65}$$

onde as quantidades Q_- e Q_+ são os geradores da supersimetria. No caso do oscilador harmônico unidimensional, esses operadores de supercarga são definidos como sendo, $Q_- = \sqrt{\hbar\omega} a^\dagger b$ e $Q_+ = \sqrt{\hbar\omega} a b^\dagger$ [31], com $a, a^\dagger$ e $b, b^\dagger$ sendo operadores de criação e aniquilação bosônico e fermiônico, respectivamente . Como essas quantidades comutam com o hamiltoniano H_{ss}, podemos escrever esse hamiltoniano como a soma dos osciladores bosônico e fermiônico

$$H_{ss} = H_B + H_F = (a^\dagger a + b^\dagger b). \tag{3.2.66}$$

Para que os operadores fermiônicos, $b^\dagger$ e b, satisfaçam as relações de anti-comutação, eles são representados através das matrizes de Pauli [1].

$$b = \Sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.67}$$

$$b^\dagger = \Sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.68}$$

Agora, o hamiltoniano H_{ss} pode ser escrito como

$$H_{ss} = \begin{pmatrix} a^\dagger a & 0 \\ 0 & aa^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}, \tag{3.2.69}$$

onde H_+ e H_- são conhecidos como hamiltonianos companheiros supersimétricos, e seus autovalores de energia e autofunções podem ser relacionadas pelos geradores de supersimetria. Os autoestados de H_{ss} são dados por $\Psi = \begin{pmatrix} \psi^- \\ \psi^+ \end{pmatrix}$, onde ψ^- e ψ^+ são, respectivamente, os autoesdados dos hamiltonianos H_- e H_+ com autovalores E_- e E_+ [?], de forma que

$$H\Psi = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^- \\ \psi^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_-\psi^- \\ E_+\psi^+ \end{pmatrix}. \tag{3.2.70}$$

Uma vez que os geradores Q_- e Q_+ comutam com H_{ss}, e Ψ é um autoestado de H_{ss}, então $Q_-\Psi$ e $Q_+\Psi$ também são. Desta forma,

$$\begin{aligned} HQ_-\Psi &= \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^- \\ \psi^+ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_- a^\dagger \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = E^+ Q_- \Psi, \end{aligned} \tag{3.2.71}$$

e

$$\begin{aligned} HQ_+\Psi &= \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^- \\ \psi^+ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ H_+ a \psi^+ \end{pmatrix} = E^- Q_+ \Psi. \end{aligned} \tag{3.2.72}$$

Assim, vemos que $Q_-\Psi$ e $Q_+\Psi$ são autoestados degenerados de H_{ss}, com autovalores $E^+ = E^-$, respectivamente. Para determinarmos o estado fundamental Ψ_0, para que, $Q_+\Psi_0 = 0$, escolhemos $H_- = a^\dagger a$ de forma que o estado fundamental tenha energia $E_0^- = 0$, assim

$$H_-\psi_0^- = a^\dagger a \psi_0^- = 0, \tag{3.2.73}$$

onde usamos a condição de aniquilação sobre o estado fundamental de H_-. Isso é valido desde que esse estado seja normalizável.Caso isso não ocorra, dizemos que ocorre quebra da supersimetria, caso contrário, dizemos que o sistema preserva a SUSI e o estado fundamental de H_{ss} tem autovalor de energia zero e autofunção espinorial

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_0^- \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.74}$$

As autofunções do n-ésimo estado excitado são dadas por

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \psi_n^- \\ \psi_{n+1}^+ \end{pmatrix}. \tag{3.2.75}$$

Nessa situação, temos um estado fundamental Ψ_0 com energia $E_0^- = 0$ e todos os outros estados $Q_+\Psi_n$ e $Q_-\Psi_n$ degenerados com energia $E_n^- = E_0^{n-1} > 0$.

3.3 Conexão dos hamiltonianos de Wigner e SUSI

Agora, faremos uma conexão entre o hamiltoniano de Wigner $H(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)$ em (3.1.36) e o oscilador harmônico isotrópico 3D SUSI para spin $\frac{1}{2}$, no qual, foi discutido por Ui[10]. A forma desse hamiltoniano ao qual é adicionado um potencial constante de interação spin órbita, H_U é dado, por

$$H_U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + r^2) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{2}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + r^2) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{2}) \end{bmatrix} \tag{3.3.76}$$

Transformando H_U pelo operador unitário

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_r \end{bmatrix} \qquad U^\dagger = U^{-1} = U \tag{3.3.77}$$

obtemos o hamiltoniano H_{SS}

$$H_{SS} = U H_U U^\dagger = H(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) - \frac{1}{2}\Sigma_3[1 + 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)\Sigma_3]. \tag{3.3.78}$$

Fazendo uso da forma bilinear simétrica (3.1.36) para $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)$ em termos dos operadores escada do sistema de Wigner $a^{\pm}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)$ da equação (3.1.37), e identificando a expressão entre parentes em (3.3.78) com o comutador (3.1.39) deste operador escada,

H_{SS} de (3.3.78) pode ser reformulado tomando a seguinte forma

$$H_{SS} = \frac{1}{2}[a^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1), a^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)]_+ - \frac{1}{2}\Sigma_3[a^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1), a^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)] \quad (3.3.79)$$

$$= [Q_-, Q_+]_+. \quad (3.3.80)$$

Como Σ_3 anti-comuta com $a^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$, como é definido em (3.1.40), os operadores supercarga $Q_{\mp}$ mutuamente adjunto de (3.3.80), resultam nas seguintes expressões em termos dos operadores escada do sistema de Wigner:

$$Q_- = \frac{1}{2}(1-\Sigma_3)a^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1), \quad Q_+ = Q_-^{\dagger} = \frac{1}{2}(1+\Sigma_3)a^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1), \quad (3.3.81)$$

$$(Q_-)^2 = (Q_+)^2 = 0. \quad (3.3.82)$$

As relações de anti-comutação (3.3.80) e (3.3.81) definem a álgebra QMSUSI levando à supersimetria de H_{ss}

$$[Q_{\mp}, H_{SS}]_- = 0. \quad (3.3.83)$$

As equações (3.3.76)- (3.3.83) fornecem a conexão intima existente entre o oscilador isotrópico SUSI 3D de spin$\frac{1}{2}$ e o correspondente hamiltoniano de Wigner $H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$. Do fato de (3.3.81) e (3.3.80) os operadores super cargas podem ser escritos nas seguintes formas usualmente empregada na discussão da MQSUSI,

$$Q_- = \Sigma_- A^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3.84)$$

$$Q_+ = (Q_-)^{\dagger} = \Sigma_+ A^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) = \begin{bmatrix} 0 & A^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3.85)$$

$$H_{SS} = \begin{bmatrix} A^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)A^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) & 0 \\ 0 & A^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)A^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) \end{bmatrix} \quad (3.3.86)$$

onde $\Sigma_{\mp}$ são definidos em (3.2.67) e

$$A^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\pm(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r})+\frac{1}{r}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)-r\right]. \qquad (3.3.87)$$

Neste modelo para o subespaço gerado de y_+ a SUSI é exata (não quebrada), ou seja, não há quebra de simetria, o que resulta da existência de soluções de energia zero normalizáveis e não-singulares (na origem) que se referem somente neste caso, $\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1\rightarrow(\ell+1)$

$$\phi_0=\begin{bmatrix}\phi_B\\ \phi_F\end{bmatrix}, \qquad (3.3.88)$$

que são aniquilados por Q_+ e Q_-. Estas condições de aniquilação conduzem respectivamente em virtude de (3.3.84), (3.3.85) e (3.3.87) a

$$Q_+\phi_0=0,\phi_F=0 \qquad (3.3.89)$$

$$Q_-\phi_0=0\rightarrow\phi_b\propto r^l exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)y_+, \qquad (3.3.90)$$

E, portanto,

$$\phi_0=\begin{bmatrix}\phi_B\\ \phi_F\end{bmatrix}\propto\begin{bmatrix}r^l exp(\frac{-1}{2}r^2)y_{\pm}\\ 0\end{bmatrix}, \qquad (3.3.91)$$

que é consistente com as conclusões de Ui [10] para o seu modelo baseado em (3.3.76). Este capitulo de revisão foi elaborado com fundamento no trabalho de Jayaraman e Rodrigues [1]. No próximo capitulo será apresentada a equação de Dirac.

Capítulo 4

Equação de Dirac

No início do século XX, uma série de descobertas e observações deixaram em evidência as dificuldades da física clássica para interpretar diversos problemas físicos, como as propriedades dos átomos, e a interação da radiação eletromagnética com a matéria [32]. Assim, a mecânica quântica veio com o objetivo de resolver esses problemas. Já para descrever os fenômenos físicos no regime de altas energias é necessária a utilização das duas principais teorias surgidas no início do século, a teoria da Relatividade Especial e a Mecânica Quântica, sendo necessário unir esses dois pilares da física em uma única teoria consistente [33]. Este fato resultou na formulação da Mecânica Quântica Relativística. A primeira tentativa de unir essas duas teorias foi proposta em 1927 pelos físicos Oskar Klein e Walter Gordon[34], na qual eles apresentaram uma equação que ficou conhecida como equação de Klein-Gordon, porém essa equação apresentava problemas relacionados a valores negativos para a densidade de probabilidade, uma vez que isto proíbe a interpretação probabilística da teoria, devido a equação ser de segunda ordem na derivada temporal, o que não ocorre na equação de Schrödinger. Por conta disso a equação de Klein-Gordon ficou abandonada por um tempo. Para resolver o problema apresentado na equação de Klein-Gordon, em 1928 Paul Dirac propôs uma equação de onda relativística de primeira ordem nas derivadas temporais e espaciais [32]. Para isso, Dirac fatorou a expressão relativística da energia antes de substituir pelos seus correspondentes operadores. Com isso a função de onda ψ passa a ser escrita em termos de quatro componentes, denominados spinores [35]. Diferente da descrição de Klein-Gordon, no qual o spin tem de ser acrescentado artificialmente, na descrição de Dirac o elétron descrito pela função de onda surge naturalmente com spin. O problema da equação de Klein-Gordon foi resolvido em 1934 por Pauli e Weisskopf, interpretando a densidade de carga como densidade de probabilidade de corrente, na qual descreve partículas de spin-0.

4.1 A Equação

A equaçãode Dirac é uma equação relativística que descreve partículas de spin $\frac{1}{2}$, como elétrons e quarks. Para construção de uma equação de onda relativística é necessário obter uma equação de onda em que a derivada em relação ao tempo seja de primeira ordem [36]. Partindo da equação da energia relativística,

$$E^2 = c^2(\vec{p})^2 + (Mc^2)^2 = (\vec{p}_x)^2c^2 + (\vec{p}_y)^2c^2 + (\vec{p}_z)^2c^2 + (Mc^2)^2. \tag{4.1.1}$$

onde c é a velocidade da luz, m e $\vec{p}$ são a massa da partícula e o operador momento, respectivamente. Substituindo as quantidades da equação (4.1.1) pelos seus respectivos operadores e atuando em uma função de onda ψ, chegamos a equação de onda relativística,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \left(\frac{Mc^2}{\hbar}\right)^2 = 0. \tag{4.1.2}$$

Essa equação é de segunda ordem na derivada em relação ao tempo devido ao quadrado na energia na equação (4.1.1). Se extrairmos a raiz quadrada da equação (4.1.1), obtemos

$$E = \sqrt{(\vec{p}_x)^2c^2 + (\vec{p}_y)^2c^2 + (\vec{p}_z)^2c^2 + (Mc^2)^2}, \tag{4.1.3}$$

na qual o termo de energia é de primeira ordem. Porém, a raiz quadrada no lado direito de (4.1.3) leva ao problema na equação de continuidade de Klein-Gordon, uma vez que a densidade de probabilidade pode ser negativa[36]. No entanto, podemos escrever as componentes de (4.1.3) como uma combinação linear na forma

$$E = \alpha_1 \vec{p}_x c + \alpha_2 \vec{p}_y c + \alpha_3 \vec{p}_z c + \beta M c^2. \tag{4.1.4}$$

Elevando ao quadrado a equação (4.1.4), e obedecendo a ordem de multiplicação dos coeficiente, temos

$$E^2 = (\alpha_1 \vec{p}_x c + \alpha_2 \vec{p}_y c + \alpha_3 \vec{p}_z c + \beta M c^2)(\alpha_1 \vec{p}_x c + \alpha_2 \vec{p}_y c + \alpha_3 \vec{p}_z c + \beta M c^2), \tag{4.1.5}$$

na qual podemos chegar as seguintes condições para os coeficientes

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = 0,$$
$$\alpha_1\beta + \beta\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2\beta + \beta\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3\beta + \beta\alpha_3 = 0,$$
$$\alpha_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 = 1, \beta^2 = 1,$$

de modo a recuperar a equação (4.1.3). Dessas condições, vemos que os coeficientes α_1, α_2, α_3, e β não podem ser números, uma vez que não obedecem à lei de comutação. Neste caso, estes coeficientes devem ser matrizes que obedecem a relação de anti-comutação cuja dimensão mínima dessas matrizes é 4x4, que são chamadas de matrizes de Dirac.

Substituindo as quantidades na equação (4.1.4) pelos seus respectivos operadores, chegamos a equação que representa à equação de Dirac,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (c\alpha \cdot \vec{p} + \beta M c^2)\Psi, \tag{4.1.6}$$

em que a forma das matrizes α_3 e β são dadas por

$$\vec{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma_i} \\ \vec{\sigma_i} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{4.1.7}$$

onde $\vec{\sigma_i}$ são as matrizes de Pauli

$$\vec{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{\sigma_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.1.8}$$

Uma vez que a equação de Dirac é uma equação matricial, a função de onda ψ é escrita como uma matriz coluna de 4 componentes, chamada de spinor de Dirac

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{4.1.9}$$

4.2 Equação de Dirac para partícula livre

A equação (4.1.6) representa a equação de Dirac para uma partícula livre. Para obtemos a solução dessa equação, o espinor de quatro componentes (4.1.9) será rescrito em termos de dois espinores de duas componestes

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{4.2.10}$$

com

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}; \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{4.2.11}$$

utilizando as matrizes de Pauli, podemos escrever a equação de Dirac como sendo

$$\begin{aligned} E\varphi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi + M\varphi, \\ E\chi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\varphi + M\chi. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

As equações acima formam um conjunto de equações matriciais acopladas, na qual, a solução corresponde à solução da equação de Dirac para uma partícula livre. Sendo o determinante da matriz dos coeficientes de (4.2.12) nulo, o sistema terá solução não-trivial

$$\begin{bmatrix} (E-M) & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (E+M) \end{bmatrix} = 0, \tag{4.2.13}$$

portanto

$$(E^2 - M^2) - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = 0. \tag{4.2.14}$$

Usando o fato que $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = (\vec{p})^2$, a relação energia momento acima fica

$$E = \pm\sqrt{M^2 + (\vec{p})^2}, \tag{4.2.15}$$

onde os sinais $\pm$ revela que há duas soluções para a equação de Dirac, uma associada à energia positiva, outra associada à energia negativa. Podemos propor a seguinte solução para a dependência temporal do espinor de Dirac:

$$\psi(t,\vec{r}) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}, \tag{4.2.16}$$

onde E é a energia associada ao espinor

$$\psi_o = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.17}$$

De (4.2.12) tiramos que o valor de χ_0 é dado por

$$\chi_0 = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}{M+E}\varphi_0, \tag{4.2.18}$$

considerando φ_0 na forma

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.19}$$

e da condição de normalização $\varphi^\dagger\varphi = \varphi_1^*\varphi_1 + \varphi_2^*\varphi_2 = 1$, com φ_1 e φ_2 sendo números complexos. O conjunto de soluções livres positivas e negativas da equação de Dirac é dado por

$$\psi(t,\vec{r}) = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}{M+\lambda E}\varphi \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\lambda E t - \vec{p}\cdot\vec{x})}, \tag{4.2.20}$$

com $\lambda = \pm 1$. A constante N pode ser determinada pela condição de normalização

$$\int \psi^{\dagger}\psi dr = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{p} - \vec{p}'), \tag{4.2.21}$$

o que fornece o seguinte valor para a constante N

$$N = \sqrt{\frac{M + \lambda E}{2\lambda E}}. \tag{4.2.22}$$

Como vimos a equação de Dirac fornece autovalores de energia positiva e negativa,onde a solução para a energia negativa representa as anti-partículas. Na próxima seção, será apresentado o modelo do oscilador de Dirac, em seguida, apresentaremos a equação de movimento do oscilador de Dirac como também seu hamiltoniano não-relativístico.

4.3 O Oscilador de Dirac

O modelo do oscilador de Dirac foi proposto primeiramente por M. Moshinsky e A. Szczepaniak[37], no qual a partir da inserção de um acoplamento não mínimo $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - iM\omega\beta\vec{r}$ na equação de Dirac, onde ω é a frequência do oscilador, M é a massa da partícula e $\hat{r}$ é o vetor posição, eles propuseram um modelo para o oscilador relativístico que resulta no oscilador harmônico no limite de baixas energias. Dessa forma, o oscilador de Dirac é dito ser o oscilador harmônico acrescentado do termo de acoplamento spin-órbita [34].

Atualmente, na literatura existe diversos trabalhos envolvendo o oscilador de Dirac. Almeida e Cavalcante [38] estudaram a transformação de Foldy-Wouthuysen para o oscilador de Dirac com massa dependente da posição. Benítez e outros[39] obtiveram os espectros de energia do oscilador de Dirac, onde também mostraram aplicações em supersimetria e estabilidade do mar de Dirac. Moshinsky [40], também estudou aspectos supersimétricos do oscilador de Dirac, no qual apresentaram a supersimetria e a superálgebra para um sistema de dois corpos com interação do oscilador de Dirac. Nogami e Toyama[22] [41], estudaram o comportamento de pacotes de ondas do oscilador de Dirac em $1 + 1$ dimensão. Desde de então, diversos trabalhos envolvendo o oscilador de Dirac vem sendo produzidos [42], [43], [44], [45].

4.4 Equação de Movimento de Dirac

O modelo do oscilador proposto por M.Moshinsky e A. Szczepaniak [37] surgiu na busca de um potencial em que o momento e as coordenadas espaciais fossem lineares e que reproduzissem o hamiltoniano do oscilador harmônico no limite não-relativístico [46].

Para obter à equação de movimento do oscilador de Dirac, introduzimos no hamiltoniano da equação (4.1.6) o acoplamento não mínimo proposto em[37], dado por

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - iM\omega\beta\vec{r}. \tag{4.4.23}$$

onde m é a massa da partícula e ω é a frequência do oscilador, dessa maneira, a equação de Dirac assume a seguinte forma:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = [c\vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - iM\omega\beta\vec{r}) + \beta Mc^2]\Psi. \tag{4.4.24}$$

Vale ressaltar que o acoplamento não mínimo não é hermitiano, mas a presença da matriz $\vec{\alpha}$ garante que o hamiltoniano permaneçe hermitiano. Tendo em vista que o potencial do oscilador de Dirac não depende do tempo, a função de onda de Dirac pode ser definida como [33]

$$\Psi(t,\vec{r}) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \tag{4.4.25}$$

Agora, podemos escrever a equação de Dirac na forma da seguinte equação de autovalores,

$$[c\vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - iM\omega\beta\vec{r}) + \beta Mc^2]\psi = E\psi. \tag{4.4.26}$$

Fazendo uso das formas explicitas das matrizes de Dirac α e β e escrevendo o spinor de Dirac em termos de duas componentes,

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix}\psi_1(\vec{r})\\ \psi_2(\vec{r})\end{pmatrix}, \tag{4.4.27}$$

da equação (4.4.26), fazendo algumas simplificações, resulta em

$$\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} - iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} - iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(\vec{r})\\ \psi_2(\vec{r})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E-M & 0\\ 0 & E+M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(\vec{r})\\ \psi_2(\vec{r})\end{pmatrix}, \tag{4.4.28}$$

que equivale a duas equações acopladas,

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}+iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r})\psi_2(\vec{r})=(E-M)\psi_1(\vec{r}), \tag{4.4.29}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}-iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r})\psi_1(\vec{r})=(E+M)\psi_2(\vec{r}), \tag{4.4.30}$$

nas quais, podem ser desacopladas multiplicando a primeira por $(E+M)$ e fazendo as devidas substituições na segunda equação. O mesmo procedimento vale para a segunda equação, e encontramos os seguintes pares de equações desacopladas para $\psi_1(\vec{r})$ e $\psi_2(\vec{r})$:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}+iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}-iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r})\psi_1(\vec{r})=(E^2-M^2)\psi_1(\vec{r}), \tag{4.4.31}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}-iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}+iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r})\psi_1(\vec{r})=(E^2-M^2)\psi_2(\vec{r}). \tag{4.4.32}$$

Usando a propriedade $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$, obtemos a seguinte relação

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}+iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}-iM\vec{\sigma}\cdot\vec{r})\psi_1(\vec{r})=(\vec{p})^2-3M+M^2(\vec{r})^2-2M\vec{\sigma}\cdot\vec{L}. \tag{4.4.33}$$

Agora podemos escrever a equação (4.4.31) da seguinte maneira:

$$\left((\vec{p})^2-3M+M^2(\vec{r})^2-2M\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\right)\psi(\vec{r})=\left(E^2-M^2\right)\psi(\vec{r}). \tag{4.4.34}$$

Para estabelecer um sistema não-relativístico, temos que calcular o limite de baixas energias da equação (4.4.34). Assim, considerando que a maior parte da energia da partícula esteja concentrada na energia de repouso, podemos utilizar a aproximação $E\approx\tilde{E}+M$, assim, $E^2-M^2\approx 2\tilde{E}M$, se $\tilde{E}\ll M$. Sendo assim, a equação (4.4.34) pode ser escrita como

$$\left((\vec{p})^2-3M+M^2(\vec{r})^2-2M\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\right)\psi(\vec{r})=2\tilde{E}M\psi(\vec{r}). \tag{4.4.35}$$

Ou ainda

$$\tilde{H}_D\psi = \tilde{E}\psi, \tag{4.4.36}$$

com $\tilde{H}_D$ sendo um operador hamiltoniano de segunda ordem,

$$\tilde{H}_D = \frac{H_D^2 - M^2\mathbf{1}}{2M}, \quad \tilde{E} = \frac{E^2 - M^2}{2M}, \tag{4.4.37}$$

com

$$\tilde{H}_D = \frac{(\vec{p})^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2(\vec{r})^2 - \left(\vec{\sigma}.\vec{L} + \frac{3}{2}\right)\omega. \tag{4.4.38}$$

Podemos observar que os dois primeiros termos em (4.4.38) representam o oscilador harmônico não-relativístico 3D. O termo entre parênteses, descreve um acoplamento spin-órbita, tendo como efeito provocar o deslocamento dos níveis de energia do sistema.

4.5 Oscilador de Dirac via Equação de Segunda Ordem

Para resolver a equação diferencial de Dirac de segunda ordem tipo Schrödinger (4.4.36), utilizando o sistema de coordenadas esféricas no hamiltoniano de segunda ordem $\tilde{H}_D$ em (4.4.38), em que:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \quad & \vec{r} = r \\ p_r \rightarrow \quad & \vec{p}_r = -i\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) = p_r^\dagger, \quad \hbar = 1, \end{aligned} \tag{4.5.39}$$

obtemos a forma não-relativística do hamiltoniano de Ui [10] para um oscilador harmônico isotrópico 3D SUSI com spin$\frac{1}{2}$, dos quais alguns aspectos supersimétricos foram discutidos através da super-realização da álgebra WH. Esse hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_D &= \begin{pmatrix} \tilde{H}_{D1} & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{D2} \end{pmatrix} = H_{Ui}, \\
\tilde{H}_{D1} &= \frac{1}{2}\{-\frac{1}{M}(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})^2 + M\omega^2 r^2 \\
&+ \frac{1}{M} r^{-2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) - 2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\frac{3}{2})\omega\} \\
\tilde{H}_{D2} &= \frac{1}{2}\{-\frac{1}{M}(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})^2 + M\omega^2 r^2 \\
&+\frac{1}{M} r^{-2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+2) + 2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\frac{3}{2})\omega\}. \qquad (4.5.40)
\end{aligned}$$

No próximo capítulo, capítulo original desta dissertação, iramos investigar os estados coerentes canônicos para o oscilador de Dirac no caso tridimensional através da técnica algébrica de HW.

Capítulo 5

Estados Coerentes para o Oscilador de Dirac

Construiremos agora os estados coerentes para o oscilador de Dirac. Esse estados são autoestados do operador de aniquilação do hamiltoniano $\tilde{H}_D$, definido na equação (4.5.40). Para alcançar esses estados partiremos da seguinte relação de comutação escada para o hamiltoniano de Dirac

$$[\tilde{H}_D, D^-] = -2D^-, \tag{5.0.1}$$

em que o operador D^- é dado por

$$D^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) = \begin{pmatrix} \tilde{B}^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) & 0 \\ 0 & \tilde{B}^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) = \tilde{B}^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)) \end{pmatrix}, \tag{5.0.2}$$

com

$$\tilde{B}^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)^2 + 2r\frac{\partial}{\partial r} + r^2 - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)+3\right\}, \tag{5.0.3}$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{B}^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) &= \tilde{B}^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) \\ &= \frac{\sigma_r}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)^2 - 2r\frac{\partial}{\partial r} + r^2 - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+2)-3\right\}\sigma_r,\end{aligned} \tag{5.0.4}$$

com $\sigma_r = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})}{r}$.

Os estados coerentes canônicos associados ao oscilador de Dirac, $|\alpha\rangle_D$, são definidos como os autoestados que satisfazem a equação de autovalor do operador quadrático D^-. Assim temos

$$D^-|\alpha\rangle_D = \alpha|\alpha\rangle_D. \tag{5.0.5}$$

Atuando os operadores projeção $\frac{1}{2}(1+\Sigma_3)$ e $\frac{1}{2}(1-\Sigma_3)$ na equação (5.0.5), os setores bosônico e fermiônico do hamiltoniano de Dirac são desacoplados da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D^-|\alpha\rangle_D &= \left\{\frac{1}{2}(1+\Sigma_3) + \frac{1}{2}(1-\Sigma_3)\right\} D^-|\alpha\rangle_D \\ &= \left\{\begin{pmatrix} B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) \end{pmatrix}\right\}|\alpha\rangle_D \\ &= \begin{pmatrix} B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) & 0 \\ 0 & B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) \end{pmatrix}|\alpha\rangle_D, \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

em que

$$\frac{1}{2}(1+\Sigma_3)\,D^- = \begin{pmatrix} B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.0.7}$$

e

$$\frac{1}{2}(1-\Sigma_3)\,D^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) \end{pmatrix}. \tag{5.0.8}$$

As equações (5.0.7) e (5.0.8) são, respectivamente, os setores bosônico e fermiônico do oscilador de Dirac, dessa maneira podemos escrever os estados coerentes, $|\alpha\rangle_D$, como a soma dos estados coerentes dos setores bosônico e fermiônico do oscilador de Dirac, ou seja

$$|\alpha\rangle_D = |\alpha\rangle_B + \sigma_r|\alpha\rangle_F\,; \quad |\alpha\rangle_B = \begin{pmatrix} |\alpha\rangle_- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\alpha\rangle_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_r|\alpha\rangle_+ \end{pmatrix}. \tag{5.0.9}$$

Usando as equações (5.0.7) e (5.0.8) a equação de autovalor (5.0.6) pode ser desacoplada obtendo duas equações de autovalores

$$\tilde{B}^{-}|\alpha\rangle_{-} = \alpha_{-}|\alpha\rangle_{-} \tag{5.0.10}$$

e

$$\tilde{B}^{+}\sigma_r|\alpha\rangle_{+} = \alpha_{+}\sigma_r|\alpha\rangle_{+}, \tag{5.0.11}$$

em que os operadores quadráticos $\tilde{B}^{-}$ e $\tilde{B}^{+}$ satisfazem às seguintes relações de comutação escada

$$[\tilde{H}_D, \tilde{B}^{-}] = -2\tilde{B}^{-}\,; \quad [\tilde{H}_D, \tilde{B}^{+}] = 2\tilde{B}^{+}. \tag{5.0.12}$$

Agora, investigaremos os estados coerentes no subespaço em que o operador $\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1}$ assume os valores do momento angular orbital adicionado de uma unidade.

Caso(i) $\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1} \rightarrow \ell+1 = j+\frac{1}{2}, \quad j = \ell+\frac{1}{2}$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})y_{+} = (\ell+1)y_{+}$$

Da relação de comutação escada (5.0.12), verifica-se que esses operadores deslocam o quantas em duas unidades, $2m \rightarrow 2m \pm 2$ ou equivalentemente $m \rightarrow m \pm 1$. Dessa forma os operadores quadráticos $\tilde{B}^{-}$ e $\tilde{B}^{+}$, quando atuarem na base ortonormal $|\psi_{-}^{m}\rangle$ e $|\psi_{+}^{m}\rangle$ terão o efeito de aumentar ou diminuir os quanta em duas unidades de forma que podemos escrever

$$\tilde{B}^{-}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})|\psi_{-}^{m}\rangle = \sqrt{2m(2m+2\ell+1)}|\psi_{-}^{m-1}\rangle, \tag{5.0.13}$$

e

$$\tilde{B}^{-}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)|\psi_{-}^{m}\rangle = \sqrt{2m(2m+2\ell+3)}|\psi_{-}^{m-1}\rangle. \tag{5.0.14}$$

Os estados coerentes bosônicos definidos em (5.0.9) e (5.0.10), dados por

$$|\alpha\rangle_B = \begin{pmatrix} |\alpha\rangle_{-} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.0.15}$$

podem ser escritos como uma superposição dos autoestados do oscilador

$$|\alpha\rangle_B = \sum_{m=0}^{\infty} d_m |\psi_-^m\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.0.16}$$

Usando o operador $\tilde{B}^-$ em (5.0.16), obtemos

$$\tilde{B}^-|\alpha\rangle_B = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \tilde{B}^- |\psi_-^m\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.0.17}$$

com o auxílio de (5.0.13) podemos escrever a equação (5.0.17) como sendo

$$\tilde{B}^-|\alpha\rangle_B = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \sqrt{2m(2m+2\ell+1)} |\psi_-^{m-1}\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.0.18}$$

ou ainda

$$\tilde{B}^-|\alpha\rangle_B = \sum_{m=0}^{\infty} d_{m+1} \sqrt{2(m+1)(2m+2\ell+3)} |\psi_-^{m}\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.0.19}$$

comparando esta equação com a equação (5.0.10) encontramos uma relação entre os coeficientes d_{m-1} e d_m

$$d_{m+1} = \frac{\alpha}{2\sqrt{(m+1)(m+\ell+\frac{3}{2})}} d_m. \tag{5.0.20}$$

A relação de recorrência acima nos fornecerá uma relação entre os coeficientes d_m e d_0. Assim, temos

$$d_m = \frac{\alpha^m}{2^m \sqrt{m!\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})}} d_0. \tag{5.0.21}$$

com $\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2}) = (m-1+\ell+\frac{3}{2})(m-2+\ell+\frac{3}{2})\ldots(\ell+\frac{3}{2})$.

O coeficiente d_0 pode ser determinado pela condição de normalização

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} |d_n|^2 = 1 \tag{5.0.22}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2m}}{2^{2m} m!\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})} d_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad d_0 = g_-^{-\frac{1}{2}}(|\alpha|^2), \tag{5.0.23}$$

onde

$$g_-(|\alpha|) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})} \left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^{2m}. \tag{5.0.24}$$

Substituindo o valor da constante d_m, obtido em (5.0.21), na equação que representa os estados coerentes bosônicos da equação (5.0.16), e usando o valor de d_0, encontramos os estados coerentes normalizados do setor bosônico do oscilador de Dirac

$$|\alpha\rangle_B = \{g_-(|\alpha|)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\{m!\Gamma(m+\ell+3/2)\}^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^m |\psi_-^m\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.0.25}$$

em que $g_-(|\alpha|) = I_K$, são as funções de Bessel modificadas de primeira especie [49]. Sendo que o ket $|\psi_-^m\rangle$ contém apenas quanta pares e que $|\alpha\rangle_-$ são os estados coerentes normalizados do setor bosônico do oscilador de Dirac.

Os estados supercoerentes bosônicos $|\alpha\rangle_B$ diagonalizam o operador de aniquilação projetado em (5.0.7) que definiremos como sendo

$$\tilde{D}_1(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) \equiv \frac{1}{2}(1+\Sigma_3) D^-, \tag{5.0.26}$$

este operador atua sobre os autoestados pertencentes aos quanta pares. Já o operador de aniquilação projetado que atua sobre os autoestados pertencentes aos quanta impares é definido por

$$\tilde{D}_2(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) \equiv \frac{1}{2}(1-\Sigma_3) D^- \tag{5.0.27}$$

em que é diagonalizado pelos estados coerentes fermiônicos

$$\tilde{D}_2|\alpha\rangle_F = \alpha_+|\alpha\rangle_F, \tag{5.0.28}$$

$$|\alpha\rangle_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_r|\alpha\rangle_+ \end{pmatrix} = \sigma_r|\alpha\rangle_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.0.29}$$

De forma análoga ao tratamento feito na construção dos estados coerentes bosônicos, podemos mostrar que os estados coerentes fermiônicos normalizados para o oscilador de Dirac são dados por

$$|\alpha\rangle_F = \{g_+(|\alpha|)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\{m!\Gamma(m+\ell+5/2)\}^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^m \sigma_r |\psi_+^m\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.0.30}$$

com

$$g_+(|\alpha|) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\ell+5/2)} \left(\frac{|\alpha|}{2}\right)^{2m}, \tag{5.0.31}$$

com $|\psi_+^m\rangle$ contendo apenas os quanta pares.

Os estados coerentes possuem duas propriedades importantes, a não ortogonalidade e a completeza. A propriedade de não ortogonalidade para os estados coerentes do setor bosônico, $|\alpha\rangle_B$, da equação (5.0.25) pode ser verificada pela seguinte relação

$$\langle\alpha'|\alpha\rangle = \delta_{\alpha'\alpha} \tag{5.0.32}$$

assim

$$\begin{aligned}
{}_B\langle\alpha'|\alpha\rangle_B &= \{g_-(|\alpha|)\tilde{}g_-(|\alpha|)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{m'm}^{\infty} \langle\psi_-^{m'}| \frac{(\alpha'^*)^{m'}\alpha^m}{2^{m'}.2^m\{\Gamma(m'+\ell+\frac{3}{2})\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})\}^{\frac{1}{2}}} |\psi_-^m\rangle, \\
{}_B\langle\alpha'|\alpha\rangle_B &= \{g_-(|\alpha|)\tilde{}g_-(|\alpha|)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{m}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2m}}{2^{2m}\{m!\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})\}}, \\
{}_B\langle\alpha'|\alpha\rangle_B &= \{g_-(|\alpha|)\tilde{}g_-(|\alpha|)\}^{-\frac{1}{2}} g_-(\alpha'^*\alpha) \quad \neq \quad 0,
\end{aligned} \tag{5.0.33}$$

com

$$g_-(\alpha'^*\alpha) = \sum_{m}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2m}}{2^{2m}\{m!\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})\}}. \tag{5.0.34}$$

Apesar dos estados coerentes, $|\alpha\rangle_B$, serem normalizáveis, eles não são ortogonais, e o produto escalar entre eles é diferente de zero.

Para mostrar a propriedade de completeza para esses estados devemos considerar a seguinte integral

$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \sum_{m}^{\infty} |\psi_-^m\rangle\langle\psi_-^m| = \hat{1}. \tag{5.0.35}$$

Da equação (5.0.25) em (5.0.35) obtemos

$$\int |\alpha\rangle_{BB}\langle\alpha|d^2\alpha = \sum_{mm'}^{\infty}\int_0^{\infty}|\alpha|d\alpha\int_0^{2\pi}d\phi\frac{|\alpha|^{(m+m)}e^{i\phi(m-m')}(g_-(|\alpha|))^{-1}}{2^{(m+m')}\left\{m!m'!\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})\Gamma(m'+\ell+\frac{3}{2})\right\}}|\psi_-^m\rangle\langle\psi_-^m|, \tag{5.0.36}$$

em que $\int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(m-m')} = 2\pi\delta_{mm'}$. Dessa maneira a equação (5.0.36) assume a seguinte forma

$$\int |\alpha\rangle_{BB}\langle\alpha|d^2\alpha = 2\pi\sum_{m}^{\infty}\int_0^{\infty}d\alpha\frac{(g_-(|\alpha|))^{-1}|\alpha|^{(2m+1)}}{2^{2m}m!\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})}|\psi_-^m\rangle\langle\psi_-^m|. \tag{5.0.37}$$

A equação (5.0.37) pode ser simplificada com a introdução de uma função apropriada. Essa função pode ser escrita na forma

$$h(|\alpha|) = \frac{2^{2m}\Gamma(m+\ell+\frac{3}{2})}{\{g_-(|\alpha|)\}^{-1}}e^{-|\alpha|^2}. \tag{5.0.38}$$

Assim, podemos simplificar a equação (5.0.37) e obter a seguinte equação

$$\int |\alpha\rangle_{BB}\langle\alpha|d^2\alpha h(|\alpha|) = 2\pi\sum_{m}^{\infty}\int_0^{\infty}d\alpha\frac{|\alpha|^{(2m+1)}e^{-|\alpha|^2}}{n!}|\psi_-^m\rangle\langle\psi_-^m|, \tag{5.0.39}$$

ou ainda

$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle_{BB}\langle\alpha|d^2\alpha h(|\alpha|) = \sum_{m}^{\infty}|\psi_-^m\rangle\langle\psi_-^m| = \hat{1}. \tag{5.0.40}$$

Assim alcançamos a propriedade de completeza, ou fechamento, para os estados coerentes dados em (5.0.25), onde $\hat{1}$ é um operador unitário; quando este operador atua sobre qualquer ket, ele o deixa inalterado.

Essas mesmas propriedades são alcançadas para os estados coerentes do setor fermiônico do oscilador de Dirac, $|\alpha\rangle_F$, que através de cálculos semelhantes, podemos mostrar que

$$_F\langle\alpha'|\alpha\rangle_F = \{g_+(|\alpha|)\tilde{g}_+(|\alpha|)\}^{-\frac{1}{2}} g_+(\alpha'^{*}\alpha) \quad \neq \quad 0 \tag{5.0.41}$$

e

$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle_{FF}\langle\alpha| d^2\alpha h(|\alpha|) = \sum_m^{\infty} |\psi_+^m\rangle\langle\psi_+^m| = \hat{1}. \tag{5.0.42}$$

Nesta análise, verificamos que estes estados coerentes são supercompletos o que significa que podemos expandir quaisquer estados em termos de uma base de qualquer estado, inclusive em uma base construída deles mesmos.

5.1 Conexão entre o Oscilador de Dirac e Oscilador SUSI

Na seção anterior, construímos os estados coerentes para o oscilador de Dirac. Esses estados, como virmos, são os autoestados do operador de abaixamento do hamiltoniano de $\tilde{H}_D$, na qual, a forma não relativística do hamiltoniano de Ui [10] é alcançado na equação (4.5.40). Considerando um operador unitário, em termos da projeção radial de spin na forma

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_r \end{pmatrix} = U^{-1} = U^{\dagger}, \quad \sigma_r = (\vec{\sigma} \cdot \vec{r})/r \tag{5.1.43}$$

nos permite obter o hamiltoniano supersimétrico na forma

$$H_{\text{SUSI}} = U\tilde{H}_D U^{\dagger} = H(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1}) - \frac{1}{2}\{1 + 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1})\Sigma_3\}\omega\Sigma_3, \tag{5.1.44}$$

na qual obtemos uma relação entre o hamiltoniano supersimétrico H_{SUSI}, com o hamiltoniano transformado de Dirac $\tilde{H}_D$, onde $H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})$ é o hamiltoniano de Wigner. Dessa maneira, vemos pela equação (5.1.44) que o hamiltoniano $\tilde{H}_D$ se relaciona com o hamiltoniano H_{SUSI} pela transformação unitária, ou seja, aplicando a transformação unitária no hamiltoniano de Dirac $\tilde{H}_D$ encontramos o hamiltoniano supersimétrico H_{SUSI}. Assim , podemos escrever a equação (5.0.1) como sendo

$$[H_{\text{SUSI}}, UD^{-}U^{\dagger}] = -2UD^{-}U^{\dagger}, \tag{5.1.45}$$

em que, $UD^{-}U^{\dagger}$ é o operador de aniquilação do oscilador de Dirac relacionado pela transformação unitária, onde

$$\begin{aligned} A^{-} = UD^{-}U^{\dagger} \quad &= U \begin{pmatrix} \tilde{B}^{-}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) & 0 \\ 0 & \tilde{B}^{+}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) = \tilde{B}^{-}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)) \end{pmatrix} U^{\dagger} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-} & 0 \\ 0 & B^{+} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.1.46}$$

Portanto, a ação do operador U em D^- modifica apenas o setor fermiônico de D^-. Dessa maneira, as equações (5.0.3) e (5.0.4) são escritas como sendo

$$\tilde{B}^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) = B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}), \tag{5.1.47}$$

e

$$\begin{aligned} B^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}) &= B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1) \qquad (5.1.48)\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)^2 - 2r\frac{\partial}{\partial r} + r^2 - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+2) - 3\right\}, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato que $(\sigma_r)^2 = 1$.

Vemos que A^- definido na Eq (5.1.46) é o operador de aniquilação do hamiltoniano SUSI já conhecido na literatura,

$$[H_{\text{SUSI}}, A^-] = -2A^-. \tag{5.1.49}$$

Os estados coerentes para o oscilador supersimétrico H_{SUSI} em três dimensão foram estudados por Jayaraman, Rodrigues e Vaidya [50], definidos pela equação de autovalor para o operador A^-

$$A^-|\alpha\rangle_{SS} = \alpha|\alpha\rangle_{SS}, \tag{5.1.50}$$

os quais estão conectados com nosso sistema por uma transformação unitária U, em que

$$|\alpha\rangle_{SS} = U|\alpha\rangle_D. \tag{5.1.51}$$

Na próxima seção, construiremos as autofunções e os autovalores de energia do oscilador de Dirac via a técnica algébrica de Wigner-Heisenberg.

5.2 Autofunções e o Espectro de Energia do Oscilador de Dirac

O problema espectral do oscilador SUSI 3D é resolvido completamente iniciando com a super-realização dos operadores escada da álgebra de WH com três graus de liberdade. De acordo com o que foi visto no capitulo 3, vemos que a matriz de Pauli, Σ_3, anti-comuta com estes operadores:

$$[\Sigma_3, a^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})]_+ = 0 \Rightarrow [\Sigma_3, a^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})]_- = 0. \qquad (5.2.52)$$

Esta propriedade do operador escada do oscilador de Wigner, juntamente com a comutatividade do H_{SUSY}

$$[H_{\mathrm{SUSI}}, a^{\pm}(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})]_- = 0 = [H_{\mathrm{SUSI}}, H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})]_-, \qquad (5.2.53)$$

nos garante simultaneamente a base das autofunções dos sistemas de osciladores 3D descritos pelo H_{SUSI} e $H(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})$. Das equações que definem a álgebra da supersimetria obtemos a forma padrão do hamiltoniano H_{SUSI}

$$H_{\mathrm{SUSI}} = 2Q_1^2 = 2Q_2^2 = \begin{bmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{bmatrix}, \qquad (5.2.54)$$

onde os parceiros supersimétrico, H_- e H_+ são dados por:

$$H_- = B^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1}) = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{M\omega r^2}{2} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\frac{3}{2})\omega, \qquad (5.2.55)$$

$$H_+ = B^-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})B^+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1}) = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{M\omega r^2}{2} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\frac{1}{2})\omega. \qquad (5.2.56)$$

Portanto, vemos que as autofunções dos setores bosônicos de $\tilde{H}_D$ e H_{SUSI} são iguais às obtidas para o oscilador de Wigner 3D tratadas anteriormente. Mas, no entanto, de acordo com as equações (4.5.40) e (5.1.44), as autofunções dos setores fermiônico de $\tilde{H}_D$ e H_{SUSI} são diferentes nas partes angulares. Eles são obtidos através de uma projeção do spin na direção radial, que atua no setor fermiônico dos autoespaços do oscilador de Wigner. De acordo com a análise acima, as autofunções de $\tilde{H}_D$ geram dois tipos de autoespaços pertencentes aos autovalores, $\pm(\ell+1)$ de $(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1})$. Chamamos esses autoespaço do caso (i) e caso (ii), respectivamente.

Caso(i) $\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+\mathbf{1} \rightarrow \ell+1 = j+\frac{1}{2}, \quad j=\ell+\frac{1}{2}$.

Autofunções do oscilador de Dirac:

$$\begin{aligned}\Psi_{N\ell\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi)_j &= \begin{bmatrix} < r \mid N\ell\frac{1}{2}, jm_j > \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{N\ell}(r) \\ 0 \end{bmatrix} y_+(\Theta,\varphi), \quad N=2m+\ell, \end{aligned} \tag{5.2.57}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{N\ell+1\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi)_j &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_r < r \mid N(\ell+1)-\frac{1}{2}, jm_j > \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_r R_{N\ell+1}(r) \end{bmatrix} y_+(\Theta,\varphi), \quad N=2m+\ell+1. \end{aligned} \tag{5.2.58}$$

Autofunções do oscilador SUSI

$$\Psi_B = U\Psi_{N\ell\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi)_j = \begin{bmatrix} R_{N\ell}(r) \\ 0 \end{bmatrix} y_+(\Theta,\varphi), \quad N=2m+\ell, \tag{5.2.59}$$

$$\Psi_F = U\Psi_{N\ell+1\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi)_j = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{N\ell+1}(r) \end{bmatrix} y_+(\Theta,\varphi), \quad N=2m+\ell+1. \tag{5.2.60}$$

Caso(ii) $\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow -(\ell+1) = -\left(j+\frac{1}{2}\right), \quad j = (\ell+1) - \frac{1}{2} = \ell + \frac{1}{2}$

Autofunções do oscilador de Dirac

$$\begin{aligned}
\eta_{N\ell\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi)_j &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_r < r \mid N\ell\frac{1}{2}, jm_j > \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_r R_{N\ell}(r) \end{bmatrix} y_-(\Theta,\varphi)
\end{aligned} \tag{5.2.61}$$

$$\eta_{N(\ell+1)-\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi)_j = \begin{bmatrix} < r \mid N(\ell+1)-\frac{1}{2}, jm_j > \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.2.62}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{N\ell+1}(r) \\ 0 \end{bmatrix} y_-(\Theta,\varphi), \tag{5.2.63}$$

Autofunções do oscilador SUSI

$$\Psi_B = U\eta_{N\ell\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi)_j = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{N\ell}(r) \end{bmatrix} y_-(\Theta,\varphi) \tag{5.2.64}$$

$$\Psi_F = U\eta_{N(\ell+1)-\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi)_j = \begin{bmatrix} R_{N\ell+1}(r) \\ 0 \end{bmatrix} y_-(\Theta,\varphi), \tag{5.2.65}$$

onde $y_\pm \equiv y_\pm(\Theta,\varphi)$ são os harmônicos esféricos de espinoriais definidos por

$$y_\pm(\Theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2\ell+1}}\, y_{\ell,m-\frac{1}{2}}(\Theta,\varphi) \\ \pm\sqrt{\frac{\ell \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}}\, y_{\ell,m+\frac{1}{2}}(\Theta,\varphi) \end{pmatrix}. \tag{5.2.66}$$

Note que $y_{\ell,m\pm\frac{1}{2}}$ são os harmônicos esféricos usuais [51], e $R_{N\ell}(r)$ é a parte radial das funções de onda do oscilador harmônico isotrópico 3D, com

$$R^{(n=2m)}(r) = R_{N\ell}(r) \propto r^\ell EXP\left(-\frac{r^2}{2}\right) L^{(\ell+\frac{1}{2})}_{m=\frac{1}{2}(N-\ell)}(r^2) \tag{5.2.67}$$

e

$$R^{(n=2m+1)}(r) = R_{N\ell+1}(r) \propto r^{\ell+1} EXP\left(-\frac{r^2}{2}\right) L^{(\ell+\frac{3}{2})}_{m=\frac{1}{2}(N-\ell-1)}(r^2) \qquad (5.2.68)$$

com $m = 0, 1, 2, \ldots$, e L^n_m são os polinômios de Laguerre associados.

Os espectros de energia dos operadores $\tilde{H}_D$ e $SUSI$ são idênticos, uma vez que esses operadores estão relacionados por uma transformação unitária. No entanto, a relação entre o número quântico principal N e o momento angular orbital (ℓ) é diferente, em cada caso. Obviamente, o espectro de energia associado aos dois tipos de espaços pertencentes aos autovalores, $\pm(\ell+1)$ são diferentes. Para obter esses espectros de energia, utilizaremos a equação dada em (5.1.44), relacionando o hamiltoniano supersimétrico com o super oscilador de Wigner para os dois casos:

Caso(i) $\rightarrow \vec{\sigma}\cdot\vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow \ell + 1 = j + \frac{1}{2}, \quad j = \ell + \frac{1}{2}$.

Para $n = 2m$, temos

$$\begin{aligned} E_{ss} &= E_0 + n - \frac{1}{2}\left\{1 + 2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L} + 1)\Sigma_3\right\}\omega\Sigma_3, \\ E_{ss} &= \ell + \frac{3}{2} + 2m - \frac{1}{2}\left\{1 + 2(\ell+1)\right\}\omega, \\ E_{ss} &= 2m\omega. \end{aligned} \qquad (5.2.69)$$

Para $n = 2m + 1$, temos

$$\begin{aligned} E_{ss} &= E_0 + n - \frac{1}{2}\left\{1 + 2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L} + 1)\Sigma_3\right\}\omega\Sigma_3, \\ E_{ss} &= \ell + \frac{3}{2} + 2m + 1 - \frac{1}{2}\left\{1 + 2(\ell+1)(-1)\right\}\omega(-1), \\ E_{ss} &= 2(m+1)\omega. \end{aligned} \qquad (5.2.70)$$

$$\tilde{E}_{N\ell} = \frac{E^2 - M^2}{2M} = \begin{cases} 2m\omega = \tilde{E}^{+}_{N(\ell+1)}, \\ 2(m+1)\omega = \tilde{E}^{-}_{N\ell}. \end{cases} \qquad (5.2.71)$$

Com $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Caso(ii) $\rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow -(\ell+1) = -(j+\frac{1}{2}), \quad j = (\ell+1) - \frac{1}{2}$:

Para $n = 2m$, temos

$$\begin{aligned}
E_{ss} &= E_0 + n - \frac{1}{2}\left\{1 - 2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)\Sigma_3\right\}\omega\Sigma_3, \\
E_{ss} &= l + \frac{3}{2} + 2m - \frac{1}{2}\left\{1 + 2(\ell+1)\Sigma_3\right\}\omega\Sigma_3, \\
E_{ss} &= (j + N + \frac{3}{2})\omega. \qquad (5.2.72)
\end{aligned}$$

Para $n = 2m+1$, temos

$$\begin{aligned}
E_{ss} &= E_0 + n - \frac{1}{2}\left\{1 + 2(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)\Sigma_3\right\}\omega\Sigma_3, \\
E_{ss} &= E_0 + 2m + 1 - \frac{1}{2}\left\{1 + 2[-(l+1)](-1)\right\}\omega(-1), \\
E_{ss} &= \left(j + N + \frac{5}{2}\right)\omega. \qquad (5.2.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{N\ell} &= \frac{E^2 - M^2}{2M} \\
&= \begin{cases} (N+j+3/2)\omega = \tilde{E}^{+}_{N\ell}, \quad N = j - \frac{1}{2}, j+3/2, j+7/2, \ldots, \\ (N+j+5/2)\omega = \tilde{E}^{-}_{N(\ell+1)}, \quad N = j + \frac{1}{2}, j+5/2, \ldots. \end{cases} \qquad (5.2.74)
\end{aligned}$$

O espectro de energia da equação de Dirac, $E_{N\ell}$, é obtido a partir das equações (5.2.71) e (5.2.74) com um valor fixo do momento angular total $j = \ell + \frac{1}{2} = (\ell+1) - \frac{1}{2}$. Desta forma, podemos obter a energia relativística positiva e negativa do oscilador de Dirac para os dois casos.

No caso (i), obtemos

$$E_{D_+} = M\left(1 + \frac{2n\omega}{M}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.2.75)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, ...$ no caso de $n = 0$, a energia do estado fundamental é dada por $E_{D_+} = M$,

$$E_{D_-} = -M\left(1 + \frac{2(n+1)\omega}{M}\right)^{1/2}. \qquad (5.2.76)$$

Note que $E_{D_-} = -E_{D_+(n+1)}$.

No caso (ii), temos

$$E_{D_+} = M\left(1 + \frac{2(n+2l+2)\omega}{M}\right)^{1/2}, \tag{5.2.77}$$

com $n = 0, 1, 2, 3, ...$

$$E_{D_-} = -M\left(1 + \frac{2(n+2l+3)\omega}{M}\right)^{1/2}. \tag{5.2.78}$$

Esses estados de energia estão de acordo com os resultados obitidos por Moshinsky e Szczepaniak [37]. Temos no primeiro caso um estado singleto com energia zero, e sem ruptura espontânea de supersimetria. Isso acontece precisamente quando o número quântico principal tem o valor $N = j - \frac{1}{2}$, cujo estado fundamental é dado por $E_{\ell\ell} = M$, que de acordo com as equações (4.4.37), (5.2.57) e (5.2.74), é dado por:

$$E_{\ell\ell} = M, \qquad \Psi_{\ell\ell\frac{1}{2},jm_j}(r,\Theta,\varphi) \propto r^{\ell}\exp\left(-\frac{M\omega r^2}{2}\right) y_+(\Theta,\varphi). \tag{5.2.79}$$

No segundo caso, a $SUSI$ é espontaneamente quebrada, uma vez que não existe um estado com energia $E_{ll} = m$ correspondendo a energia zero do oscilador de Dirac supersimétrico 3D. Isso garante apenas no primeiro caso, que o estado de vácuo é estável na presença da interação spin-orbita $(\vec{\sigma}.\vec{L})$ e os estados de energia positiva e negativa não se misturam.

Caso(i)

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \vdots \\
4\omega & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\
2\omega & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\
0 & \underline{\qquad} & \\
 & \tilde{H}_{D(+)} & \tilde{H}_{D(-)}
\end{array}$$

Caso(ii)

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \vdots \\
(2j+5)\omega & \underline{\qquad\quad} & \underline{\qquad\quad} \\
(2j+3)\omega & \underline{\qquad\quad} & \underline{\qquad\quad} \\
(2j+1)\omega & \underline{\qquad\quad} & \underline{\qquad\quad} \\
 & \tilde{H}_{D(-)} & \tilde{H}_{D(+)}
\end{array}$$

Em ambas as figuras, vemos a degeneração supersimétrica do oscilador de Dirac 3D. Observe que os espectros de energia dos setores bosônico e fermiônico no primeiro caso não dependem do momento angular e, portanto, cada um deles apresentam uma degenerescência infinita. No segundo caso, cada setor tem degenerescência finita $(N \pm 1, j\mp), (N \pm 2, j \mp 2)$...

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, investigamos o sistema quântico relativístico descrito pelo oscilador de Dirac. Estudamos oscilador de Dirac com base na álgebra de Wigner-heisenberg.

No capítulo original deste trabalho, analisamos os estados coerentes canônicos para o oscilador de Dirac tridimensional não conhecido na literatura, conhecemos apenas o caso unidimensional estudado por Nogami e Toyama [22]. Esses estados são os auto-estados do operador aniquilação quadrático D^{-}, mostramos que os estados coerentes do oscilador de Dirac são normalizáveis e não ortogonais, ou seja, o produto escalar entre esses estados não é nulo, e que obedecem à propriedade de supercompleteza. Foi possível verificar que esses estados estão conectados com os estados coerentes supersimétricos, já conhecidos na literatura, através de uma transformação unitária U. Assim, é possível chegar aos estados coerentes SUSI partindo dos estados coerentes de Dirac.

A técnica algébrica de Wigner-Heisenberg se mostrou bastante eficaz para a resolução espectral desse sistema. Partindo do hamiltoniano de Dirac quadrático $\tilde{H}_D$, e através da transformação unitária U, encontramos um hamiltoniano de segunda ordem supersimétrico, que está relacionado com o hamiltoniano de Wigner. Como os hamiltonianos $\tilde{H}_D$ e H_{SUSI} estão relacionados pela transformação unitária, os espectros de energia são idênticos, assim, deduzimos os autovalores e as autofunções de energia para os dois tipos de subespaço pertencentes aos autovalores $\pm(\ell+1)$ de $(\vec{\sigma}\cdot\vec{L}+1)$, através da técnica algébrica WH.

Em trabalhos futuros, estudaremos os estados de incerteza mínima para o oscilador de Dirac, como também, algumas propriedades termodinâmicas, a partir da função de partição do oscilador de Dirac. Em outros trabalhos, podemos estudar os estados coerentes e equação de Dirac modificada no espaço-tempo curvo, no espaço-tempo não-comutativo e o oscilador de Dirac quiral.

Bibliografia

[1] JAYARAMAN, J., and R. LIMA RODRIGUES. *The Wigner-Heisenberg algebra as an effective operator technique for simpler spectral resolution of general oscillator-related potentials and the connection with the SUSYQM algebra.* Journal of Physics A: Mathematical and General 23.14 (1990): 3123.

[2] EISBERG, ROBERT RESNICK, and Cota Araiza Robert. *Física cuántica*: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas. 1994.

[3] SCRÖDINGER, ERWIN. *Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik.* Naturwissenschaften 14.28 (1926): 664-666.

[4] GLAUBER, ROY J. *Coherent and incoherent states of the radiation field.* Physical Review 131.6 (1963): 2766.

[5] JÚNIOR, P, R, S. *Estados coerentes via álgebra de Wigner-Heisenberg e sua aplicação no oscilador de Celka-Hussim*, Dissertação (Mestrado em Física). Departamento de Física da Universidade Federal de Campina Grande, 2013.

[6] CUNHA, K, S, F,N. *Estados Coerentes para o Oscilador Isotônico via Álgebra de Wigner-Heisenberg*, Dissertação (Mestrado em Física). Departamento de Física da Universidade Federal de Campina Grande, 2013.

[7] KAUDER, JOHN, and B. SKAGERSTAM. *Coherent states: applications in physics and mathematical physics.* World scientific, 1985.

[8] E. C. G. SUDARSHAN, *Coherent states: applications in physics and mathematical physics.*(1963), Phys. Rev. 130, 2529.

[9] BARUT, A. O., L. GIRARDELLO. *New coherent states associated with noncompact groups.* Communications in Mathematical Physics 21.1 (1971): 41-55.

[10] UI, H, and Gyo TAKEDA. *Does accidental degeneracy imply a symmetry group?.* Progress of Theoretical Physics 72.2 (1984): 266-284.

[11] LUBO, and STANISLAS. S*USY Coherents States and Classical Trajectories.* arXiv preprint arXiv:1704.01819 (2017).

[12] AMIR, NAILA, and IQBAL. *Coherent states for nonlinear harmonic oscillator and some of its properties.* Journal of Mathematical Physics 56.6 (2015): 062108.

[13] PHILBIN, T. G. *Generalized coherent states.* American Journal of Physics 82.8 (2014): 742-748.

[14] TAKOU, Sabi; AVOSSEVOU, KOUNOUHEWA. *SUSY partners for spin-1/2 systems in nonrelativistic limits.* Open Physics, v. 13, n. 1, 2015.

[15] CLARK, LEWIS A., STOKES, and BEIGE. "Quantum-enhanced metrology with the single-mode coherent states of an optical cavity inside a quantum feedback loop."Physical Review A 94.2 (2016): 023840.

[16] YAHIAOUI, S. A., and M. BENTAIBA. *Pseudo-Hermitian coherent states under the generalized quantum condition with position-dependent mass.* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 45.44 (2012): 444034.

[17] MIKULSKI, DAMIAN, et al. *The construction of ladder operators and coherent states for the Wei Hua anharmonic oscillator using the supersymmetric quantum mechanics.* Journal of Mathematical Chemistry 52.1 (2014): 162-173.

[18] DRAGANESCU, GHEORGHE EUGEN. *Interaction between the Kravchuck and Meixner oscillators coherent states and the coherent radiation field.* Physica Scripta 2013.T153 (2013): 014019.

[19] El KINANI, A. H., and M. DAOUD. G*eneralized coherent and intelligent states for exact solvable quantum systems.* Journal of Mathematical Physics 43.2 (2002): 714-733.

[20] Y CRUZ, S. CRUZ. KURU, and J. NEGRO. *Classical motion and coherent states for Pöschl?Teller potentials.* Physics Letters A 372.9 (2008): 1391-1405.

[21] PERELOMOV, ASKOLD M. *Coherent states for arbitrary Lie group.* Communications in Mathematical Physics 26.3 (1972): 222-236.

[22] NOGAMI, Y., and F. M. TOYAMA. *Coherent state of the Dirac oscillator.* Canadian journal of physics 74.3-4 (1996): 114-121.

[23] PEREIRA, A,S,. RODRIGUES, R, L,. and LIMA, A, L. *Estados Coerentes em Mecânica Quântica.* Anais do VII Congresso de Iniciação Ciêntifica da UFCG. (2010).

[24] GLAUBER, ROJ . *The quantum theory of optical coherence.* Physical Review 130.6 (1963): 2529.

[25] WOLNEY,F, W. *Mecânica quântica.* Editora da UFG, 2002.

[26] SAKURAI, J. J., and JIM, N. *Mecânica quântica moderna.* bookman, 2013.

[27] WIGNER, E, P. "*Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations*?. Physical Review 77.5 (1950): 711.

[28] YANG, L. M. *A note on the quantum rule of the harmonic oscillator.* Physical Review 84.4 (1951): 788.

[29] WITTEN, E. *Dynamical breaking of supersymmetry.* Nuclear Physics B 188.3 (1981): 513-554.

[30] CARMO, F, M. *Um estudo sobre a supersimetria no contexto da mecânica quântica*, Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. doi:10.11606/D.43.2011.tde-29092011-155358. Acesso em: 2017-11-09.

[31] BORGES, GLÁUCIA; DRIGO, F, E. *Supersimetria em Mecânica Quântica II: Oscilador Harmonico e Potencial Coulombiano.* Rev. Bras. Ens. Fis, v. 21, p. 233-237, 1999.

[32] GOMEZ, E, C. *Simulação da equação de Dirac em eletrodinâmica quântica de cavidades.* 2014. Dissertação (Mestrado em Física Básica) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. doi:10.11606/D.76.2015.tde-30032015-141034. Acesso em: 2017-11-09

[33] RODRIGUES, E.C. ; ANDRADE, F.M. ; SILVA, E.O. ; FERREIRA, M.M. . *On the ?-Dirac oscillator revisited.* Physics Letters. B (Print) , v. 731, p. 327-330, 2014.

[34] PACHECO, M, H, G. *Propriedades termodinâmicas do oscilador de Dirac e algumas contribuiçoes da funçao theta de Jacobi.* Diss. 2007. Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará. repositorio.ufc.br.

[35] Bassalo, J, M, F. *Eletrodinâmica Quântica.* Editora Livraria da Fisica, 2006.

[36] SMIRNOV, A, D, F, J, and JORGE, A. *Representações da Equação de Dirac em 1+ 1 Dimensões.* Caderno Brasileiro de Ensino de Física 38.3 (2016).

[37] MOSHINSKY, M., and A. SZCZEPANIAK. *The Dirac oscillator.* Journal of Physics A: Mathematical and General 22.17 (1989): L817.

[38] CAVALVCANTE, R, V, M, and CARLOS, A, S, A. *Transformação de Foldy-Wouthuysen para o oscilador de Dirac com massa dependente da posição.* Anais do XXIX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos.

[39] BENTEZ, J., *et al. Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator.* Physical Review letters 64.14 (1990): 1643.

[40] MOSHINSKY, M, C. Q, and YU F. S. *Supersymmetry and superalgebra for the two-body system with a Dirac oscillator interaction.* Journal of Physics A: Mathematical and General 28.22 (1995): 6447.

[41] TOYAMA, F. M., Y. *et al. Behaviour of wavepackets of the'Dirac oscillator': Dirac representation versus Foldy-Wouthuysen representation.*"Journal of Physics A: Mathematical and General 30.7 (1997): 2585.

[42] QUIMBAY, C., and P. STRANGE. *Graphene physics via the Dirac oscillator in (2+ 1) dimensions.* arXiv preprint arXiv:1311.2021 (2013).

[43] MELO, G. R., et al. *Dirac Oscillator in a Galilean Covariant Non-commutative Space*. International Journal of Theoretical Physics 52.2 (2013): 441-457.

[44] STETSKO, M. M. *Dirac oscillator and nonrelativistic Snyder-de Sitter algebra*." Journal of Mathematical Physics 56.1 (2015): 012101.

[45] ARIFUZZAMAN, M,d, *et al. An exact solution of the Dirac oscillator problem in the context of generalized uncertainty principle*. IJRET. V02 Issue: 09. (2013).

[46] PINHEIRO, H, P. *Oscilador de Dirac: cenário para um estudo de um sistema de dois níveis*. 2009. 58 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

[47] BAGROV, V. G. *et al. Coherent states of systems with quadratic Hamiltonians*. Brazilian Journal of Physics 45.3 (2015): 369-375.

[48] WIGNER, E, P. *Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?*. Physical Review 77.5 (1950): 711.

[49] BRAUN, M, and MARTIN, G. *Differential equations and their applications*. Vol. 4. New York: Springer, 1983.

[50] JAYARAMAN, J. RODRIGUES, L, R, and A. N. VAIDYA. *A SUSY formulation ala Witten for the SUSY isotonic oscillator canonical supercoherent states*. Journal of Physics A: Mathematical and General 32.38 (1999): 6643.

[51] GOLDENSTEIN, L. *Derivation of exact spectra of the Schrodinger equation by means of supersymmetry*. JETP Lett., v. 38, p. 356, 1983.