



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE - UFCG
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA -UAF
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGFIS

DESCRIÇÃO TEÓRICA E FENOMENOLÓGICA DA
ELETRODINÂMICA VIOLANDO A INVARIÂNCIA DE LORENTZ COM
OPERADORES DE ALTAS ORDENS DERIVATIVAS

JOÃO PAULO DE SOUZA CASTRO

Campina Grande - PB
Agosto de 2017

JOÃO PAULO DE SOUZA CASTRO

**DESCRIÇÃO TEÓRICA E FENOMENOLÓGICA DA
ELETRODINÂMICA VIOLANDO A INVARIÂNCIA DE LORENTZ COM
OPERADORES DE ALTAS ORDENS DERIVATIVAS**

Dissertação apresentada a unidade acadêmica de Física da
Universidade Federal de Campina Grande como parte das
exigências para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Campina Grande - PB
Agosto de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C355d

Castro, João Paulo de Souza.

Descrição teórica e fenomenológica da eletrodinâmica violando a invariância de Lorents com operadores de altas ordens derivativas / João Paulo de Souza Castro. – Campina Grande, 2017.

48 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".

Referências.

1. Violação da Simetria de Lorentz. 2. Eletrodinâmica. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Título.

CDU 537.8(043)

JOÃO PAULO DE SOUZA CASTRO

**DESCRIÇÃO TEÓRICA E FENOMENOLÓGICA DA
ELETRODINÂMICA VIOLANDO A INVARIÂNCIA DE LORENTZ COM
OPERADORES DE ALTAS ORDENS DERIVATIVAS**

Dissertação apresentada a unidade acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Física.

Avaliada pela seguinte Banca Examinadora:

Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos (Orientador)
UAF/Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota - (Membro Interno)
UAF/Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dra. Morgana Ligia de Farias Freire - (Membro Externo)
DF/Universidade Estadual da Paraíba

Campina Grande - PB
Agosto de 2016

Dedicatória

A minha família pelo carinho de todas as horas, em especial a minha esposa e minha mãe que sempre acreditaram no meu potencial e me deram forças para seguir em frente.

Agradecimentos

Ao meu orientador Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos pelo incentivo e compromisso com minha orientação. a todos os professores, funcionários e ao órgão de fomentação de bolsas (CAPES).

RESUMO

Neste trabalho, consideramos a eletrodinâmica violando a simetria de Lorentz com operadores de dimensão 5. Estudamos aspectos teóricos, com modificações nas quantidades: equação de movimento, equações de Maxwell, relações de dispersão e o propagador de Feynman. Estudamos também testes fenomenológicos da violação da simetria de Lorentz utilizando dados recentes da distância de explosão dos raios gamas GRB041219A, para qual é observado um alto grau de polarização na emissão de fótons. Além disso, como colaboração das propriedades do modelo, investigamos o termo de Myers-Pospelov eletromagnético induzido por radiação em loop. O cálculo é realizado no setor fermiônico onde há interação com o campo eletromagnético de fundo. A investigação leva em consideração as regras modificadas de Feynman e o esquema de regularização dimensional.

Palavras-chave: Violação da simetria de Lorentz e eletrodinâmica.

ABSTRACT

In this work, we consider electrodynamics violating the Lorentz symmetry with dimension 5 operators. We study with theorists, with modifications in the units: equation of motion, Maxwell's equations, dispersion relations and Feynman propagator. We also studied the phenomenological tests of the Lorentz symmetry violation, which are available in the electronic version of the GRB041219A gamma rays, for which a high degree of polarization is observed in the emission of photons. In addition, as a collaboration of the property model, we investigated the Myers-Pospelov term electromagnetic radiation-induced loop. The calculation is performed without a fermionic sector where there is interaction with the background electromagnetic field. One research takes into account how Feynman's modified rules and the dimensional regularization scheme.

Keywords: Lorentz simetrie violation, eltrodinamyc.

Sumário

1	Introdução	1
2	A eletrodinâmica modificada	3
2.1	O modelo	3
2.2	A equação de movimento	4
2.2.1	Lei de Maxwell-Gauss modificada	6
2.2.2	Lei de Maxwell-Ampère modificada	7
2.3	Relação de dispersão modificada	8
2.3.1	Modelo isotrópico	9
2.3.2	Modelo anisotrópico	10
3	O propagador de Feynman modificado	13
4	Limites Fenomenológicos para Violação da Invariância de Lorentz	18
4.1	Explosão de raios gamas	18
4.2	Cálculos de polarização da onda eletromagnética	20
5	Indução Radiativa do modelo de Meyers-Pospelov	22
6	Conclusão	29
A	Propagação de ondas eletromagnéticas	31
B	Funções de Green transversal	33

Capítulo 1

Introdução

O grupo da Simetria de Lorentz-(SL) é composto por dois tipos de transformações contínuas, sendo estas denominadas transformação de rotação e translação. Apesar do status de simetria fundamental, sendo por exemplo, ingrediente do Modelo Padrão da física de partículas, a possibilidade de violação desta simetria tem sido considerada e ativamente explorada nos últimos anos, tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista experimental [1, 2, 4]. A motivação principal para considerar essa possibilidade vem da visão de que o espaço-tempo em escalas de energias próxima à Planck M_p da ordem de $10^{19} GeV$, pode divergir drasticamente da sua descrição contínua, por caracterizar um espaço-tempo discretizado [5]. E assim, podendo deixar algumas assinaturas no regime de baixas energias. Neste contexto sinais de violação da SL manifestariam se por meio de partículas com velocidades dependentes da energia e com diferentes polarizações quando comparadas umas em relação as outras [4, 6, 7].

Devido aos recentes progressos nos aparatos experimentais e técnicas de observações, tanto terrestres quanto astrofísicas [4], vem-se gradativamente renovando o interesse pela busca de assinaturas que revelem uma possível violação da SL, algo que seria consistente com abordagens previstas por teorias fundamentais, bem como a Gravitação Quântica [9] e a Teoria das Cordas [3]. Este aspecto motivou Myers e Pospelov a construir um cenário de teorias efetiva de campos que provoca a Violação da SL, via operadores derivativos de dimensão-5 massivos ao longo de uma certa direção privilegiada dada pela natureza do quadri-vetor n_μ [1, 2]. Estes operadores são capazes de produzir modificações cúbicas nas dinâmicas de partículas escalares, fotônicas e fermiônicas [2]. Entretanto neste trabalho estudamos modificações apenas nos setores do campo de calibre e fermiônico.

A essência formal da proposta de Myers-Pospelov reside na existência de três operadores quadráticos nos campos, que podem ser adicionados, por exemplo, a lagrangiana da Eletrodinâmica Quântica [8], preservando a invariância de calibre, porém violando a SL local. Estes termos extras, contribuem com termos da ordem de $O(E/M_p)$ para

a relação de dispersão das partículas. Consideramos neste trabalho as seguintes modificações de Carga-Paridade-Tempo-(CPT) ímpar: $-\xi/(2M_p)n^\mu F_{\mu\alpha}(n \cdot \partial)(n_\nu \tilde{F}^{\nu\alpha})$ para o setor do campo de calibre e $-\eta/(2M_p)\bar{\psi}(n \cdot \partial)^2 \not{n} \gamma_5 \psi$ para o setor fermiônico, onde n_μ é o quadrivetor que controla a violação da invariância de Lorentz, ξ e η são parâmetros adimensionais, \not{n} é a o quadrivetor associado a matriz de Dirac γ^μ , $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ são os tensores de intensidade do campo eletromagnético. No setor do campo de calibre, existirá uma única contribuição associada ao operador de dimensão-5 que insere uma correção de momento da ordem de $\xi_\gamma p^3/M_P$, isto modifica fortemente a velocidade de propagação dos fótons [15]. Este fato tornou-se motivação para o desenvolvimento de testes astrofísicos rigorosos acerca de efeitos que podem corroborar com a violação da SL, tais como a birrefringência da luz no vácuo [2].

Neste trabalho temos como objetivo, estudar alguns aspectos teóricos e fenomenológicos dos efeitos de violação da SL através da teoria efetiva de campo em altas ordens derivativas. O foco é destinado ao estudo de violação da SL pela extensão do modelo padrão devido a inclusão dos operadores de dimensão 5. A estratégia desta dissertação é estudar a princípio, ambas as modificações nos setores do campo de calibre e do campo fermiônico separadamente, e em seguida relacioná-los através de um processo de indução radiativa. No caso do campo de calibre, estudamos as possíveis modificações sobre as equações de movimento, equações de Maxwell, relação de dispersão, propagador de Feynman. Devido a natureza quiral do operador em questão, além de modificar a relação de dispersão, também determina características birrefringentes para os fótons. Usamos esse fato para estudar limites da violação da SL usando recentes observações astrofísicas de radiação gama (GRBs).

Os principais tópicos deste trabalho estão subdivididos da seguinte forma: no Cap.2, introduzimos o modelo Myers-Pospelov eletromagnético com a violação da SL inserida através de quadrivetor n_μ . Calculamos a equação de movimento, seguido das equações de Maxwell e a relação de dispersão modificadas para os casos isotrópico e anisotrópico. No Cap. 3 abordamos no cenário da teoria quântica de campos, uma análise sobre o propagado de Feynman modificado e os resíduo em seus polos para os casos isotrópico e anisotrópico. No Cap. 4, apresentamos uma breve introdução do estudo sobre explosões cósmicas de raios gama com ênfase para as recentes observações do evento GRB041219A. São estudados também, cálculos de polarização na propagação dos fótons. Neste caso, mostramos como obter limites superiores para o parâmetro que controla a violação da simetria de Lorentz. No Cap. 5 obtém-se por indução radiativa o modelo de Myers-Pospelov, através dos métodos de Feynman. No Cap. 6, são apresentadas as conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

A eletrodinâmica modificada

Neste capítulo abordamos a modificação da eletrodinâmica com operadores de dimensão-5 no setor do campo de calibre. Também estudamos neste capítulo alguns limites teóricos para a relação de dispersão com a violação da SL, preservando três aspectos essenciais para a teoria efetiva de campos: a causalidade, unitariedade e estabilidade.

2.1 O modelo

O modelo de Myers-Pospelov trata de uma teoria efetiva de campos que viola a SL em termos da natureza do quadrivetor n_μ acoplado a operadores derivativos não renormalizáveis de dimensão 5. Sendo estes operadores construídos para satisfazer 6 critérios gerais: (i) Quadrática no mesmo campo; (ii) Contém uma derivada a mais no termo cinética do que o habitual; (iii) Invariante de calibre; (iv) Invariante de Lorentz, exceto pela natureza de n_μ ; (v) Não redutível a operadores de dimensão inferior na equação de movimento; (vi) Não redutível a um derivado total. Este procedimento introduz operadores derivativos de dimensão 5, possibilitando interações com campos escalares, férmions e fótons. Para a eletrodinâmica a proposta é uma modificação através do seguinte termo [2]:

$$S_{(5)} = \frac{g}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} n_\mu A_\nu (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma}, \quad (2.1)$$

em que $g = \xi/M_p$, ξ é o parâmetro de Myers-Pospelov, M_p é a massa de Planck, A_ν é o campo de calibre, $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é o tensor de Levi-Civita e $F_{\lambda\sigma}$ é o tensor eletromagnético dado por $F_{\lambda\sigma} = \partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda$. É importante mencionar que estamos adotando neste trabalho, o sistema de unidades naturais, onde consideramos constantes fundamentais iguais a 1 unidade numérica, como exemplo $\hbar = c = 1$. Também estamos considerando o espaço-tempo plano de Minkowski, onde, por convenção, definimos a assinatura da métrica de

Minkowski como $\eta_{\mu\nu}=(1, -1, -1, -1)$.

Note que a equação (2.1) possui dependência no quadrivetor: n_μ que de certa forma determina o tipo de violação de SL que estamos estudando. Dito isto, podemos analisar o caso onde $n_\mu = (n_0, 0)$, que deve violar apenas as transformações de translação, dando característica ao modelo isotrópico. Por outro lado, quando consideramos $n_\mu = (0, \vec{n})$, temos uma configuração tipo espaço, isto deve violar as transformações de rotações, caracterizando dessa forma o modelo anisotrópico. Perceba também que é possível estudar o regime tipo luz: $n_\mu = (n_0, \vec{n})$, com $n_0 = \vec{n}$. Entretanto, esta situação tem soluções não analíticas que conduzem inteiramente a instabilidade e a perda de unitariedade. Este fato torna o regime tipo luz fora dos limites de validade que desejamos mostrar neste trabalho. Pretendemos aqui, elaborar um estudo teórico da eletrodinâmica clássica, modificada pela equação (2.1).

2.2 A equação de movimento

Para estudar possíveis efeitos de violação de SL na teoria usual da eletrodinâmica, acoplamos o termo dado pela equação (2.1) na ação de Maxwell na presença da quadri-corrente externa J^μ . Neste sentido, a ação efetiva [2] é dada por;

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \frac{\xi}{M_P} n^\mu F_{\mu\nu} (n \cdot \partial) n_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu} \right). \quad (2.2)$$

Uma vez que a ação acima contém derivada segunda do campo A_ν , fizemos um procedimento de forma geral, na variação $\delta S = \delta \mathcal{F}$ consideramos a segunda ordem derivativa no funcional $\mathcal{F} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\mu, \partial_\nu \partial_\mu A_\mu)$. Dessa forma, utilizando o princípio da mínima ação $\delta S = 0$, obtemos a equação de Euler Lagrange com uma ordem derivativa a mais que a equação usual;

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\gamma} = \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\gamma)} \right) - \partial_\sigma \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\rho A_\gamma)} \right). \quad (2.3)$$

Veja que as derivadas na equação acima são tomadas separadamente em três partes. Na primeira parte, a derivada parcial atua com respeito ao campo A_μ . Desta forma, temos;

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\gamma} = -j_\mu \eta^{\mu\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\gamma} = -j_\mu \eta^{\mu\alpha} \delta_\alpha^\gamma = -j^\gamma. \quad (2.4)$$

Em seguida, efetuamos as derivadas com respeito a $\partial_\sigma A_\gamma$, para o tensor eletromagnético de Maxwell e para o termo de Myers e Pospelov respectivamente;

$$\partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\gamma)} \right) = -\partial_\sigma \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\sigma A_\gamma)} \cdot F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\sigma A_\gamma)} \right) \right],$$

Em virtude da simetria de δ_ν^μ e a anti-simetria de $F_{\mu\nu}$ a equação pode ser escrita como:

$$\partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\gamma)} \right) = \frac{1}{2} (\partial_\sigma F^{\sigma\gamma} + \partial_\sigma F^{\sigma\gamma}) = \partial_\sigma F^{\sigma\gamma}, \quad (2.5)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para o termo de Myers e Pospelov, resultando em;

$$\partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\gamma)} \right) = g n^\sigma \partial_\sigma (n \cdot \partial) n_\alpha \tilde{F}^{\alpha\gamma} - g n^\gamma (n \cdot \partial) n_\alpha \partial_\sigma \tilde{F}^{\alpha\sigma}, \quad (2.6)$$

É conveniente lembrar que $\partial_\sigma \tilde{F}^{\alpha\sigma}$ com as combinações de índices do tensor de Levi-Civita, é dado por; $\epsilon^{\alpha\mu\nu\sigma} \partial_\sigma F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu}$, podemos escrever $\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0$ de acordo com a identidade de Bianchi.

Por fim, calculamos a derivada com respeito a segunda ordem derivativa do campo $\partial_\sigma \partial_\rho A_\gamma$, atingindo apenas o termo de Myers-Pospelov. Dessa maneira;

$$\partial_\sigma \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho A_\gamma)} \right) = -g (n \cdot \partial)^2 n_\alpha \epsilon^{\alpha\lambda\nu\gamma} \partial_\lambda A_\nu. \quad (2.7)$$

Reunindo os resultados auferidos nas equações (2.4) – (2.7) e substituindo em (2.3) com alguns índices redefinidos, é obtido a seguinte equação de movimento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + g (n \cdot \partial)^2 n_\alpha \epsilon^{\nu\alpha\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = j^\nu. \quad (2.8)$$

Podemos agora salientar que a segunda parcela da equação acima é responsável pela modificação da eletrodinâmica. Assim, para todo e qualquer resultado proveniente da equação de movimento acima é possível analisar aspectos sobre a isotropia e anisotropia devido a presença de n_μ , dito dessa forma, duas naturezas distintas deste quadrivetor que conduz a violação de SL. Perceba também que a equação de movimento pode ser escrito como;

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (2.9)$$

onde $G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + 2g\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}n_\alpha(n \cdot \partial)^2 A_\beta$ e $J^\mu = (\rho, j^i)$ é a quadri-corrente que tem a componente $j^0 = \rho$ definida como a densidade de carga e $j^i = \vec{j}$ definido como densidade de corrente.

2.2.1 Lei de Maxwell-Gauss modificada

A lei de Gauss usual estabelece a relação entre o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada com a carga elétrica que existe dentro do volume limitado por esta superfície. Para estudar a modificação da lei de Gauss precisamos partir da equação (2.9). Visto que $F_{0i} = E^i$ e $F_{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$ são, respectivamente, as próprias definições de campos elétricos e magnéticos. Logo, separando em componentes espaciais e temporal e admitindo $\nu = 0$, temos;

$$\partial_0 G^{00} + \partial_i G^{i0} = j^0.$$

Tendo em mente que $\partial_0 G^{00} = 0$ e $\partial_i G^{i0} = F^{i0} + 2g\epsilon^{i0\alpha\beta}n_\alpha(n \cdot \partial)^2 A_\beta$, e resolvendo as permutações do tensor de Levi-Civita, obtemos a equação de Maxwell - Gauss com correção de Myers e Pospelov em termos dos campos elétrico, magnético e n_μ , ou seja:

$$\nabla \cdot \vec{E} + 2g(n \cdot \partial)^2 (\vec{n} \cdot \vec{B}) = \rho. \quad (2.10)$$

Com a equação acima podemos analisar a natureza temporal do quadrivetor $n_\mu = (n_0, 0)$ onde se trata da isotropia do espaço-tempo e o caso tipo espaço $n_\mu = (0, \vec{n})$ que trata da descrição anisotrópica.

O espaço isotrópico é definido como aquele que tem propriedades independente da orientação. Podemos ainda afirmar que para este caso a velocidade de uma partícula é constante em qualquer ponto do espaço. Quando consideramos na equação (2.10) o caso isotrópico $n_\mu = (n_0, 0)$, o resultado que obtemos não é afetado pela violação da SL, ou seja, a equação usual $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ se preserva neste caso.

Considere agora a anisotropia conduzida por $n_\mu = (0, \vec{n})$, o que permite escrever;

$$\nabla \cdot \vec{E} + 2g\vec{n}^3 \nabla^2 \cdot \vec{B} = \rho, \quad (2.11)$$

a equação acima está relacionada diretamente com a orientação das componentes espaciais de n_μ , podendo ter propriedades diferentes conforme a mudança de direção. Desta forma, a invariância de Lorentz pode ser quebrada em qualquer direção do espaço, este fato claramente afeta a invariância da simetria de Lorentz por rotação.

2.2.2 Lei de Maxwell-Ampère modificada

A lei de Maxwell - Ampère afirma que campos magnéticos podem ser gerados de duas formas: através de correntes elétricas, que é traduzido na lei de Ampère para campos magnéticos estacionários, e por campos elétricos que variam no tempo. Em outras palavras significa que um campo magnético que varia no tempo cria um campo elétrico também variante o tempo, e vice versa. Neste sentido para obter esta equação com modificações consideramos $\nu = j$ em (2.9), dessa forma obtemos;

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} + 2g(n \cdot \partial)^2 (n_0 \vec{B} - \vec{n} \times \vec{E}) = \vec{j}. \quad (2.12)$$

Note que, para o caso isotrópico $n_\mu = (n_0, 0)$ a lei de Ampère é afetada pela violação de translação, e a equação passa a ser;

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} + 2gn_0^3 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{j}. \quad (2.13)$$

Já para o caso anisotrópico $n_\mu = (0, \vec{n})$ a equação é conduzida a violação de rotação e é escrita como;

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} - 2g\vec{n}^2 \nabla^2 \cdot (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{j}. \quad (2.14)$$

É importante mencionar que as modificações geradas pelo termo de violação acontecem nas equações de Maxwell não homogêneas, ou seja, naquelas em que possui fonte de corrente eletromagnética. A modificação neste caso pode ser interpretada como uma adição de um campo independente na fonte de corrente da teoria usual. Por outro lado, as equações de Maxwell sem fontes não são afetadas, como seguem;

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.15)$$

E ainda, as contribuições de violação da SL, demonstram um caráter que não é encontrado na teoria usual: a introdução da quebra de simetria de Lorentz permite que os campos elétricos sirvam como fonte para correntes e que os campos magnéticos sirvam como fonte para cargas elétricas.

2.3 Relação de dispersão modificada

Uma das consequências da violação de Lorentz em altas energias é o fenômeno de birrefringência dos fótons [6], que por sua vez possui fortes vínculos experimentais [15, 25]. Birrefringência é usualmente a decomposição da luz propagando-se em duas diferentes componentes. No caso da eletrodinâmica com violação de Lorentz, é comum ter birrefringência no vácuo, determinada pelo quadrivetor n_μ [33]. Neste sentido, abordamos alguns aspectos da propagação de ondas eletromagnéticas sob o efeito de violação da SL. Para isso, consideramos a equação de movimento na ausência de corrente com fixação do calibre de Lorentz, como segue;

$$\partial_\mu \partial^\mu \eta^{\nu\beta} A_\beta + 2g\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 \partial_\mu A_\beta = 0, \quad (2.16)$$

para escrever a equação acima no espaço de momentos utilizamos um ansatz de ondas planas escrito como: $A_\beta = A(k) \exp^{-ikx}$, sendo para este caso $k = (k_0 = \omega, k_i = \vec{k})$. Em seguida, de acordo com a equação acima podemos também evidenciar ∂_μ e reescrever (2.16) como;

$$\Theta^{\nu\beta} A_\beta = 0, \quad (2.17)$$

em que $\Theta^{\nu\beta}$ é dado por ;

$$\Theta^{\nu\beta} = (-k^2 \eta^{\nu\beta} + 2ig\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta} n_\alpha (n \cdot k)^2 k_\mu), \quad (2.18)$$

Precisamos eliminar um problema pertinente na equação acima, relacionado ao termo não real. Dito isso, vamos definir um novo operador conjugado para $\Theta^{\nu\beta}$, escrito como;

$$\Theta_{\nu\gamma}^* = (-k^2 \eta_{\nu\gamma} - 2ig\epsilon_{\rho\sigma\nu\gamma} n^\rho (n \cdot k)^2 k^\sigma), \quad (2.19)$$

objetivamos obter uma equação não imaginária. Neste caso, é conveniente multiplicar os dois operadores, sendo este produto dado por;

$$\Theta^{\nu\beta} \cdot \Theta_{\nu\gamma} A_\beta = N \delta_\gamma^\beta A_\beta, \quad (2.20)$$

admitindo que A_β seja não nulo, $N = 0$. Onde N é dado por $N = (k^2)^2 - 4g^2 (n \cdot k)^4 ((n \cdot k)^2 - n^2 k^2)$. De tal forma que, o resultado que obtemos é;

$$(k^2)^2 - 4g^2(n \cdot k)^4((n \cdot k)^2 - n^2 k^2) = 0. \quad (2.21)$$

Esta equação é denominada relação de dispersão modificada ¹ para fótons, sendo esta equação uma função do quadrimomento k_μ e do quadrivetor n_μ . Isto permite uma análise sobre a natureza de n_μ que viola a simetria de Lorentz em diferentes aspectos. A seguir é analisado na equação (2.21) dois casos: isotropia e anisotropia. Também estudaremos alguns limites que preservam a estabilidade e unitariedade desta teoria.

2.3.1 Modelo isotrópico

Tendo em vista o resultado (2.21) consideramos agora a relação de dispersão na forma isotrópica, com a componente $\vec{n} = 0$ para o quadrivetor $n_\mu = (n_0, \vec{n})$ e $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$;

$$(k^2)^2 - 4g^2 k_0^4 \vec{k}^2 n_0^6 = 0. \quad (2.22)$$

A equação acima é o caso específico do resultado obtido em (2.21), onde consideramos o caso tipo tempo. Usando esta equação também é possível obter sua solução para a frequência;

$$\omega_\lambda(\vec{k}) = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1 + 2g\lambda|\vec{k}|n_0^3}}, \quad (2.23)$$

sendo que $\lambda = \pm$.

Note que, para valores muito pequenos para o momento, isto é, $|\vec{k}| \ll 1/(2gn_0^3)$, podemos escrever a equação (2.23) como uma aproximação;

$$\omega_\lambda(\vec{k}) = |\vec{k}| \pm gn_0^3 |\vec{k}|^2, \quad (2.24)$$

por outro lado, quando consideramos valores muito grandes, conseqüentemente a equação não será mais válida para o caso da frequência onde $\lambda = -$, ou seja, para $\omega_-(\vec{k})$. Isto acontece pelo fato de que a parte imaginária desta solução levaria a perda de unitariedade e estabilidade nas propagações de ondas. Logo, este fato implica diretamente em um cut-off² na região do ultravioleta evitando o colapso das soluções e induzindo um efeito de birrefringência [2, 32], ou seja, decomposição da luz propagando-se em duas diferentes

¹Veja também este resultado obtido através de interação com o campo não dinâmico. Com mais detalhes no Apêndice A.

²A palavra cut-off neste contexto significa "corte"

componentes. Portanto, a quantização deste modelo deve ser associada a um certo limite superior para a intensidade dos momentos $|\vec{k}|$ numa região $|\vec{k}| < |\vec{k}|_{max} = 1/(2g)$.

Perceba que a taxa de variação de $\omega_\lambda(\vec{k})$ com respeito a $|\vec{k}|$ define uma grandeza conhecida, denominada velocidade de grupo, esta grandeza tem dependência de energia das partículas em sua descrição [13], isso pode produzir observáveis sobre propagação a longas distâncias e diferenças no tempo de chegada de fótons emitidos simultaneamente da mesma fonte [14], dito isso, segue a derivação;

$$v_{g^\pm}(\vec{k}) = \frac{\partial \omega_\lambda(\vec{k})}{\partial |\vec{k}|} = \frac{(1 \pm g|\vec{k}|n_0^3)}{(1 \pm 2g|\vec{k}|n_0^3)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.25)$$

O fato de existir fótons viajando com diferentes velocidades de grupo, além de ser uma forte indicação de violação da SL, indica também evidências para uma aparente instabilidade na teoria. Para expormos resultados sem perda de estabilidade é necessário aplicar os mesmos limites efetuados sobre $|\vec{k}|$ anteriormente no caso tipo tempo. Por conseguinte um gráfico de ilustração da solução frequência ω versus o vetor de onda \vec{k} obtida na relação de dispersão para o caso isotrópico:

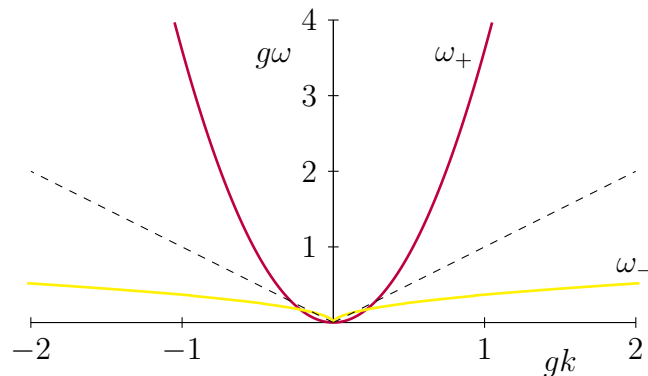


Figura 2.1: Gráfico do momento $|\vec{k}|$ versus a frequência ω_\pm para o caso tipo tempo. Em que a linha pontilhada representa o cone de luz, a componente ω_+ é correspondente a solução dentro do cone de luz e ω_- é a solução fora.

Observe que a solução fora do cone de luz viola a causalidade, é uma solução que desconsideramos nos limites de validade neste trabalho devido a perda de estabilidade e unitariedade na teoria.

2.3.2 Modelo anisotrópico

Restringimos agora o estudo para um caso onde escrevemos o quadrivetor $n_\mu = (0, \vec{n})$, ou seja, tipo espaço. Dessa maneira, podemos escrever a relação de dispersão como:

$$k^4 - 4g^2(\vec{n} \cdot \vec{k})^4 k^2 \vec{n}^2 + 4g^2(\vec{k} \cdot \vec{n})^4 (\vec{k} \cdot \vec{n})^2 = 0. \quad (2.26)$$

Para encontrar as soluções da equação acima, encara-se um problema de equação quadrática, onde $k^2 = k'_\pm$, basta admitir $a = 1$, $b = -4g^2(\vec{n} \cdot \vec{k})^4 \vec{n}^2$ e $c = 4g^2(\vec{k} \cdot \vec{n})^4 (\vec{k} \cdot \vec{n})^2$ para a equação geral $ak' + bk' + c = 0$, assim, a solução é escrita como;

$$\omega_\pm(\vec{k}) = \left(\vec{k} + 2g^2(\vec{n} \cdot \vec{k})^4 \vec{n}^2 \pm 2g|\vec{k} \cdot \vec{n}|^3 \sqrt{(g^2(\vec{n} \cdot \vec{k})^2 \vec{n}^4 - 1)} \right)^{1/2}. \quad (2.27)$$

Para pequenos valores do momento, é válido a aproximação;

$$\omega_\pm(\vec{k}) = |\vec{k}| - g|\vec{n}|^3 |\cos(\theta)| |\vec{k}|^2, \quad (2.28)$$

onde θ é o ângulo entre \vec{k} e \vec{n} . Note que a referida equação tem uma estreita semelhança com a equação para o caso tipo tempo, exceto pelo de que podemos recuperar estabilidade, causalidade e unitariedade em uma região fora do cone de luz. A partir destes resultados é conveniente realizar algumas análises;

- (i) Quando os vetores \vec{k} e \vec{n} são perpendiculares,
- (ii) Quando são paralelos ou antiparalelos com $|\cos \theta| = 1$,
- (iii) Em direção pela qual seja satisfeito a condição $|\cos \theta| < 1$.

No primeiro caso, o resultado para a frequência é exatamente o que se espera para a eletrodinâmica usual, onde $\omega = |\vec{k}|$, ou seja, não apresenta efeitos da violação da simetria de Lorentz, já para os dois outros casos seguintes, podem ser melhor esclarecido com auxílio da figura;

nesta situação, o momento ω_- está fora do cone de luz ameaçando a estabilidade desta teoria, entretanto, para pequenos boosts de momento, a região se restringe a;

$$\beta = 1 - g|\vec{k}| |\cos \theta|^3, \quad (2.29)$$

que por sua vez, oferece referenciais mais estáveis, isso inclui referenciais muito próximos ao cone de luz, por outro lado, para momentos muito grandes, a quantidade ω_- se aproxima de um valor constante $\omega_- = 1/2g$ para o caso do item (ii) e diverge para $\omega_- = \sin \theta |\vec{k}|$ no caso do item (iii). Em razão disto a velocidade de grupo dada por;

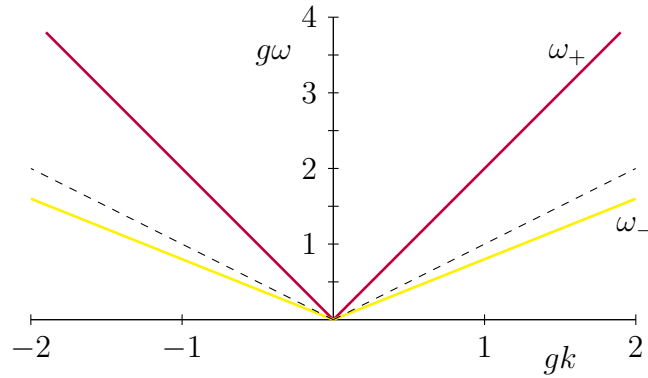


Figura 2.2: Gráfico do momento $|\vec{k}|$ versus a frequência ω_{\pm} para o caso tipo espaço. Em que a linha pontilhada representa o cone de luz, a componente ω_{+} é correspondente a solução dentro do cone de luz e ω_{-} é a solução fora.

$$v_{g\pm} = \frac{1 + 4g^2|\vec{k}|^2 \cos^4 \theta \pm g|\vec{k}||\cos \theta|^3 (3 + 4g^2|\vec{k}|^2 \cos^2 \theta)}{\sqrt{1 + g^2|\vec{k}|^2 \cos^2 \theta} \left(1 + 2g|\vec{k}||\cos \theta|^3 \sqrt{1 + g^2|\vec{k}|^2 \cos^2 \theta} \right)^{1/2}}, \quad (2.30)$$

se aproxima do valor $v_{-g}(\vec{k}) \approx \sin \theta$. Conseqüentemente, qualquer translação deve apresentar instabilidade nas direções paralelas ou antiparalelas para altos valores de momentos. Neste sentido é de se esperar que referenciais mais estáveis se propaguem nas direções perpendiculares.

Perceba também que podemos analisar na velocidade de grupo o parâmetro ξ , onde implicitamente é escrito através de $g = \xi/M_P$. Quando consideramos $\xi = 0$, os fótons tem velocidades luminiais, ou seja, propagam-se na fronteira do cone de luz. Para $\xi < 0$, os fótons são subluminiais, dessa forma, propagam-se dentro do cone de luz. Por fim, para $\xi > 0$, os fótons são superluminiais, isto é, propagações fora do cone de luz, setores nos quais as causas e os efeitos são perdidos.

Capítulo 3

O propagador de Feynman modificado

Neste capítulo, obtemos o propagador modificado do campo eletromagnético de maneira unívoca. Para isso, é necessário fixar o calibre de Lorentz na densidade lagrangiana proveniente da ação (2.2) desconsiderando a presença de corrente, onde podemos escrever;

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}A_\nu \left[\partial_\mu \partial^\mu \eta^{\nu\beta} - 2g(n \cdot \partial)^2 n_\alpha \epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu} \partial_\sigma - \partial^\nu \partial^\beta \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] A_\beta. \quad (3.1)$$

Dessa maneira definimos o operador foto cinético;

$$(\Delta)^{\nu\beta} = \square \eta^{\nu\beta} - 2g(n \cdot \partial)^2 n_\alpha \epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu} \partial_\sigma - \partial^\nu \partial^\beta \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (3.2)$$

para escrever a equação acima no espaço de momentos basta aplicar a transformada de Fourier $(\Delta^{-1})^{\nu\beta} = \int dk \Delta^{\nu\beta}(k) \epsilon^{-ikx}$. Dito isto, obtemos o operador cinético do fóton no espaço de momento dado pela seguinte equação;

$$\left[-k^2 \eta^{\nu\beta} + 2ig(n \cdot k)^2 n_\alpha \epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu} k_\sigma - k^\nu k^\beta \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] (\Delta_F(k))_{\nu\lambda} = i\delta_\lambda^\beta, \quad (3.3)$$

Note que, a equação acima está no formato de um função de Green, veja com mais detalhes os cálculos para a função de Green interagindo com o campo não dinâmico no Apêndice B. Neste sentido, para obter o propagador basta utilizar um ansatz de forma genérica e de acordo com cada termo do operador fóton cinético;

$$(\Delta_F(k))_{\nu\lambda} = A\eta_{\nu\lambda} + Bn^\rho\epsilon_{\rho\lambda\theta\nu}k^\theta + Ck_\nu k_\lambda, \quad (3.4)$$

substituindo a equação (3.3) em (3.2) e admitindo que $\lambda = 1$, temos que;

$$(-k^2\eta^{\nu\beta} + 2ig(n \cdot k)^2 n_\alpha \epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu} k_\sigma) \cdot (A\eta_{\nu\lambda} + Bn^\rho\epsilon_{\rho\lambda\theta\nu}k^\theta + Ck_\nu k_\lambda) = i\delta_\lambda^\beta$$

o qual resulta em:

$$\begin{aligned} & -Ak^2\eta^{\nu\beta}\eta_{\nu\lambda} - Bk^2\eta^{\nu\beta}n^\rho\epsilon_{\rho\lambda\theta\nu}k^\theta - Ck^2\eta^{\nu\beta}k_\nu k_\lambda + 2igA(n \cdot k)^2\eta_{\nu\lambda}n_\alpha\epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu}k_\sigma \\ & + 2igB(n \cdot k)^2n_\alpha n^\rho\epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu}\epsilon_{\rho\lambda\theta\nu}k^\theta k_\sigma + 2igC(n \cdot k)^2n_\alpha\epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu}k_\sigma k_\nu k_\lambda = i\delta_\lambda^\beta, \end{aligned} \quad (3.5)$$

O produto dos tensores de Levi-Civita pode ser facilmente resolvido usando a seguinte propriedade $\epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu}\epsilon_{\rho\lambda\theta\nu} = \delta_\rho^\alpha(\delta_\lambda^\sigma\delta_\theta^\beta - \delta_\theta^\sigma\delta_\lambda^\beta) - \delta_\rho^\sigma(\delta_\lambda^\alpha\delta_\theta^\beta - \delta_\theta^\alpha\delta_\lambda^\beta) + \delta_\rho^\beta(\delta_\lambda^\alpha\delta_\theta^\sigma - \delta_\theta^\alpha\delta_\lambda^\sigma)$, onde também é sabido que no caso em que $2igC(n \cdot k)^2n_\alpha\epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu}k_\sigma k_\nu k_\lambda = 0$. Dessa forma, temos que;

$$\begin{aligned} & -Ak^2\eta^{\nu\beta}\eta_{\nu\lambda} - Bk^2\eta^{\nu\beta}n^\rho\epsilon_{\rho\lambda\theta\nu}k^\theta - Ck^2\eta^{\nu\beta}k_\nu k_\lambda + 2igA(n \cdot k)^2\eta_{\nu\lambda}n_\alpha \\ & \epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu}k_\sigma + 2igB(n \cdot k)^2 \left[(n_\alpha n^\alpha k^\sigma k_\sigma - n_\alpha k^\alpha n_\sigma k^\sigma)\delta_\lambda^\beta + n_\alpha n^\alpha k^\beta k_\lambda + \right. \\ & \left. n_\lambda n^\beta k_\sigma k^\sigma - (n \cdot k)(n_\lambda k^\beta + n^\beta k_\lambda) \right] = i\delta_\lambda^\beta, \end{aligned}$$

A partir disso, é organizado um sistema de equações, que permite uma comparação entre termos semelhantes. Assim são separadas as três seguintes equações;

$$\left\{ \begin{array}{l} -Ak^2\delta_\lambda^\beta + 2igB(n \cdot k)^2(n_\alpha k^\alpha n_\sigma k^\sigma - n_\alpha n^\alpha k^\sigma k_\sigma)\delta_\lambda^\beta = i\delta_\lambda^\beta, \\ -Bk^2\eta^{\nu\beta}n^\rho\epsilon_{\rho\lambda\theta\nu}k^\theta + 2igA(n \cdot k)^2\eta_{\nu\lambda}n_\alpha\epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu}k_\sigma = 0, \\ -Ck^2\eta^{\nu\beta}k_\nu k_\lambda + 2igB(n \cdot k)^2 \left[n_\alpha n^\alpha k^\beta k_\lambda + n_\lambda n^\beta k_\sigma k^\sigma - (n \cdot k)(n_\lambda k^\beta + n^\beta k_\lambda) \right] = 0. \end{array} \right.$$

as soluções são dadas por:

$$A = \frac{-k^2}{k^4 - 4g^2(n \cdot k)^4((n \cdot k)^2 - n^2 k^2)},$$

$$B = \frac{2ig(n \cdot k)^2}{k^4 - 4g^2(n \cdot k)^4((n \cdot k)^2 - n^2k^2)},$$

$$C = \frac{-4g^2(n \cdot k)^4}{k^2k_\lambda k_\nu} \left[\frac{(n^2k_\nu k_\lambda + n_\lambda n_\nu k^2 - (n \cdot k)(n_\lambda k_\nu + n_\nu k_\lambda))}{k^4 - 4g^2(n \cdot k)^4((n \cdot k)^2 - n^2k^2)} \right].$$

Ao substituir o resultado de A , B e C no ansatz (3.4) é obtido o propagador de Feynman modificado;

$$(\Delta_F(k))_{\nu\lambda} = \frac{1}{D(k)} \left[-k^2\eta_{\nu\lambda} + 2ig(n \cdot k)^2 n^\rho \epsilon_{\rho\lambda\theta\nu} k^\theta \right. \\ \left. - \frac{4g^2(n \cdot k)^4}{k^2} (n^2k_\nu k_\lambda + n_\lambda n_\nu k^2 - (n \cdot k)(n_\lambda k_\nu + n_\nu k_\lambda)) \right].$$

em que $D(k) = k^4 - 4g^2(n \cdot k)^4((n \cdot k)^2 - n^2k^2)$ é a relação de dispersão.

Uma vez calculado o propagador de Feynman, a sua estrutura de polos é utilizada para obter a saturação do propagador que será aqui representada pela nomenclatura SP , onde será capaz de fornecer informações sobre a unitariedade da teoria. Uma teoria é dita unitária quando possui modos de propagação associados à estados que exibem norma quadrática positiva [33, 28]. Quando surgem estados de norma negativa, a teoria é dita não-unitária. Neste caso, temos então os chamados estados “*fantasmas*”.

A investigação acerca da unitariedade neste modelo será efetivada via o método de saturação do propagador. Este método consiste em calcular contrações tensoriais entre as correntes J_μ e J_ν no propagador, dessa forma obtém-se $SP = J^\nu(\Delta_F(k))_{\nu\lambda}J^\lambda$ escrita em cada um dos seus polos, o que envolve, naturalmente, o cálculo de resíduo do propagador nestes polos. Dito isto, a saturação SP é dada como;

$$J^\nu(\Delta_F(k))_{\nu\lambda}J^\lambda = \frac{1}{D(k)} \left[-k^2 J^\nu \eta_{\nu\lambda} J^\lambda + 2ig(n \cdot k)^2 n^\rho J^\nu \epsilon_{\rho\lambda\theta\nu} k^\theta J^\lambda - \frac{4g^2(n \cdot k)^4}{k^2} \right. \\ \left. (n^2 J^\nu k_\nu k_\lambda J^\lambda + J^\nu n_\lambda n_\nu J^\lambda k^2 - (n \cdot k)(J^\nu n_\lambda k_\nu J^\lambda + J^\nu n_\nu k_\lambda J^\lambda)) \right],$$

Note que a equação acima obedece a conservação de corrente, sendo que podemos retirar alguns termos da equação acima que estão escrito explicitamente na forma $k^\mu J_\mu = 0$, logo;

$$J^\nu(\Delta_F(k))_{\nu\lambda}J^\lambda = \frac{1}{D(k)} \left[-k^2 J^2 - 4g^2(n \cdot k)^4(n \cdot J)^2 \right]. \quad (3.6)$$

É importante salientar que a unitariedade é assegurada se o resíduo do propagador em seus polos for maior que zero. Dessa forma, restringimos a representação do quadrimomento em $k_\mu = (k_0, 0, 0, k_3)$ de maneira que a conservação passa a implicar em $J_\mu = (J_0, J_1, J_2, \frac{J_0 k_0}{k_3})$. Para obter a saturação do propagador para o caso tipo espaço consideramos o resultado da equação (3.6) juntamente com a escolha do quadri vetor $n_\mu = (0, \vec{n})$:

$$SP = \frac{-k^2 J^2 - 4g^2 \vec{k}^4 \vec{J}^2}{(k^2 - \omega_+^2)(k^2 + \omega_-^2)}, \quad (3.7)$$

na seção anterior, os polos do resíduo indiretamente já foram calculados e escritos em ω_\pm^2 , sendo estas, soluções para o caso tipo espaço da relação de dispersão anisotrópica, tais soluções são dadas por $\omega_\pm^2(\vec{k}) = k_3^2 + 2g^2(\vec{n} \cdot k_3)^4 \vec{n}^2 \pm 2g|k_3 \cdot \vec{n}|^3 \sqrt{(g^2(\vec{n} \cdot k_3)^2 \vec{n}^4 - 1)}$. Dessa maneira, temos que;

$$Res[SP]_{k^2=\omega_\pm^2} = \left[\frac{\pm 1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{g^2 k_3^2}}} + \frac{1}{2} \right] (J_1^2 + J_2^2) > 0, \quad (3.8)$$

Como podemos ver a partir da equação acima, o resíduo é sempre positivo para qualquer valor real de k_3 , garantindo a unitariedade do modelo no caso tipo espaço.

De forma semelhante ao procedimento para o tipo tempo, obtemos a saturação do propagador para o caso tipo espaço, no entanto utiliza-se $n_\mu = (n_0, 0)$ e o propagador saturado assume a seguinte forma;

$$SP = \frac{-k^2 J^2 - 4g^2 k_0^4 J_0^2}{(k^2 - \omega_+^2)(k^2 + \omega_-^2)}, \quad (3.9)$$

Recorrendo as informações sobre as frequências ω_\pm do capítulo anterior, onde são escritos $\omega_\pm^2(\vec{k}) = |k_3|^2/1 + 2g\lambda|k_3|n_0^3$ como soluções da relação de dispersão no regime puramente tipo tempo e substituindo estas informações na equação anterior, obtemos o resíduo do propagador saturado;

$$Res[SP]_{k^2=\omega_\pm^2} = \frac{J_1^2 + j_2^2}{2(1 \pm 2gk_3)(1 - 4g^2 k_3^2)}. \quad (3.10)$$

Perceba que, diferente do caso tipo espaço, $Res[SP]_{k^2=\omega_\pm^2}$ contém uma dependência do sinal em $1 \pm 2g^2 \vec{k}$, onde a solução ω_- levaria a introduzir contribuições “*fantasmas*”, isto poderia comprometer a unitariedade para este caso em particular. Contudo, considerando $k_3 \sim 1/2g$ podemos estabelecer um limite de validade para a teoria efetiva de campo, apesar de ω_- estar fora do cone de luz esperamos que $1/2g$ seja no mínimo comparável

à escala de Planck, dessa forma podemos restaurar $Res[SP]_{k^2=\omega_{\pm}^2} > 0$ para $|k_3| < 1/2g$ [28].

Capítulo 4

Limites Fenomenológicos para Violação da Invariância de Lorentz

4.1 Explosão de raios gamas

Os eventos GRBs vêm de algumas das explosões mais energéticas conhecidas no universo, são *flashes* breves e intensos de raios gama originários de distâncias cosmológicas [4]. Acredita-se que a maioria delas ocorram quando estrelas muito maciças colapsam para formar estrelas de nêutrons ou buracos negros. Esse colapso gera um gigantesco pulso de raios gama, com duração de poucos segundos até alguns minutos, durante esse tempo, o pulso ofusca o brilho de galáxias inteiras, podendo emitir tanta energia em raios gama quanto o Sol poderá emitir durante toda a sua vida, ou seja, em 10 bilhões de anos (veja em [6]), em todas as faixas do espectro eletromagnético, ou emitir, durante esse período de tempo, a mesma energia que a nossa Galáxia inteira emite em 100 anos [7, 29]. Isso é comparável à transformar inteiramente a massa do Sol em energia de acordo com a famosa equação de Einstein $E = mc^2$. O único evento cósmico mais energético do que as explosões de GRBs é a própria explosão inicial do universo, o Big Bang. (Para obter informações mais detalhadas sobre teoria GRBs, consultar [29] e suas referências).

As observações do evento GRB 041219A ¹ se destacam em relação às outras já realizadas, muito pelo alto grau de polarização observado na rápida emissão de radiação gama. Os valores medidos que serão utilizado neste estudo são os seguintes: $\Delta\theta = 47^\circ$ para o grau de polarização obtidas pelas medidas feitas considerando a duração da explosão da radiação e $d = 85Mpc = 2.6 \times 10^{26}cm$ para o limite inferior da distância da luminosidade correspondente a um redshift de $z_{red} = 0,02$, veja isto em [25].

É importante mencionar que tal evento foi obtido em tempo real pelo sistema de

¹A representação escrita GRB 041219A faz referência a data do evento e teste. Significa que o teste A ocorreu em 19 de dezembro de 2004.

alerta do satélite Laboratório Astrofísico Internacional de Raio Gama - (INTEGRAL). Este fato foi imediatamente classificado no topo da lista dos GRBs em brilho, o brilho deste evento foi tão brilhante que o INTEGRAL foi capaz de medir a polarização dos seus raios gama com precisão [7, 31].

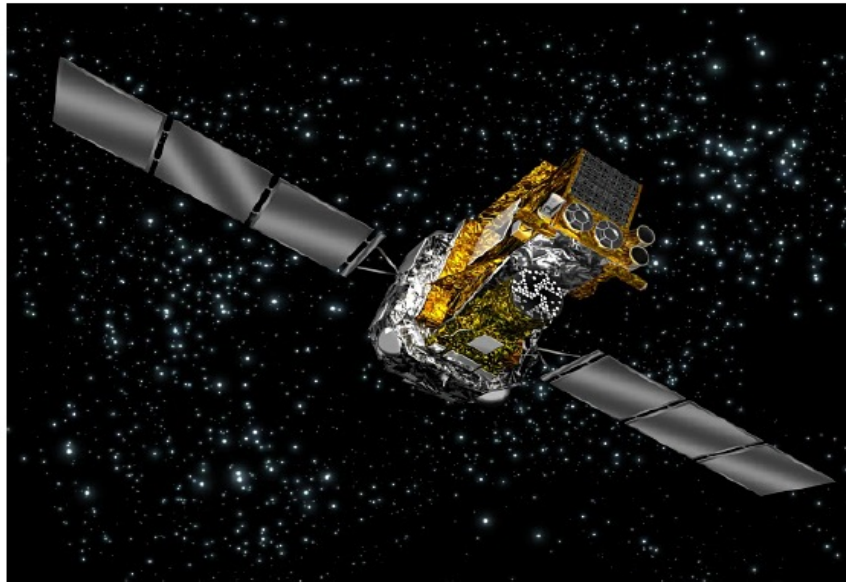


Figura 4.1: Satélite INTEGRAL, o observatório de explosões raios gama da Agência Espacial Americana - (ESA), Fonte: ESA.

Estes eventos foram observados pela primeira vez no final dos anos 1960 [30] pelo Satélite Vela, desenvolvidos pelos Estados Unidos e cujo objetivo era controlar as aplicações do Tratado de Interdição Parcial de Ensaios Nucleares assinado em 1963 com a antiga União das Repúblicas Socialistas Soviéticas e vários outros países que dispunham de um programa de armas nucleares. Para cumprir seus objetivos, os satélites eram equipados de instrumentos que permitiam detectar Raios Gama, Raios-X e nêutrons, emitidos por explosões nucleares [30, 31]. Os instrumentos desses satélites possibilitavam captar explosões de raios gama.

Após as importantes observações do sistema de satélites Vela, os estudos científicos sobre GRBs intensificaram-se e atualmente já se tem um bom conhecimento sobre certas características físicas e tipos de evento dos GRBs [25]. Quanto aos aspectos gerais, são citados alguns mais conhecidos: pulsos curtos e intensos caracterizando fontes transientes; direção randômica no espaço; distâncias cosmológicas da origem do evento até os pontos de observações; faixa de luminosidade isotrópica que por sua vez tem direção de propagação bem definida: $10^{51} - 10^{52}$ ergs/seg de potência em cada pulso. A energia estimada no início das explosões gira em torno de 10^{51} TeV. Quanto as espécies de GRBs, tem-se dois tipos: os longa e curta duração. Os de longas durações, também denominados fosforescentes são catalogados a partir de 2 segundos a algumas centenas de segundos.

Possíveis mecanismos são modelos de colapso de supernova. E os de curta duração, também denominado explosões negras ou não fosforescentes, são catalogados a partir de milionésimos de segundos a 2 segundos. Possíveis mecanismos são colisões ou fusões de objetos compactos como por exemplo fusão de estrelas de nêutrons ou dois buracos negros em colisão.

4.2 Cálculos de polarização da onda eletromagnética

Fundamentais restrições na violação da simetria de Lorentz vêm da busca por efeitos de birrefringência no vácuo, com análise prevista na teoria de campo efetiva [4]. (Ver também [6]). Neste sentido, algumas informações podem ser retiradas sobre a relação de dispersão, como foi visto nos capítulos anteriores e como é mostrado em [2], a equação dada em (2.24) representa modificação cúbica na relação de dispersão com operadores de dimensão 5, que preserva a invariância de calibre e transformação de translação. Isto leva a uma modificação proporcional a $\xi(\omega/M_{Pl})$, ou mais especificamente como é mostrado em (2.24), O sinal na relação de dispersão para fótons corresponde a helicidade, isto é, polarização circular direita ou esquerda;

$$\omega_{\pm} = |p| \sqrt{1 \pm \frac{2\xi k}{M_p}} = |k| \left(1 \pm \frac{\xi k}{M_p} \right). \quad (4.1)$$

A birrefringência no vácuo é um efeito de suma importância para obtenção de limites sobre o parâmetro ξ que controla a quebra da invariância de Lorentz [25]. Assim, verifica-se que diferentes velocidades de grupo implica em um vetor de polarização de uma onda plana, linearmente polarizada, que gira de forma anômala através de um ângulo de polarização em relação ao eixo de rotação, durante a propagação da onda, ao longo de uma distância d [15]. Nesse caso, a direção da polarização pode ser estimada teoricamente pelas seguintes equações;

$$\Delta\theta(k, z) = \frac{\xi k^2 F(z)}{M_p H_0} \quad \text{e} \quad F(z) = \int_0^z \frac{(1+z') dz'}{[\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\lambda]^{1/2}}, \quad (4.2)$$

em que $\Delta\theta$ é o ângulo de polarização medido pelo satélite INTEGRAL, com uma onda plana com vetor de onda k que também pode ser chamado de momento de referencial comove, onde $\left(\frac{k}{M_p} \ll 1\right)$.

A Equação (4.2) refere-se ao grau de radiação polarizada com o fenômeno da birrefringência. É evidente que tal variação depende fortemente das energias dos fótons e, portanto, esse efeito poderia perturbar a quantidade de polarização presente em alguma

luz polarizada viajando a longas distâncias [13, 14]. Mais especificamente, dependendo da quantidade de informação disponível sobre o objeto específico observado, pode-se usar este fato para lançar restrições sobre os parâmetros que violam a invariância de Lorentz nos modelos dos fótons, é necessário resolver a equação (4.2) usando alguns parâmetros e informações obtidos pelo GRB 041219A, como por exemplo $\Delta(\theta) = 47^\circ$ que é o ângulo de polarização feito a uma distância cosmológica $d = 85 \text{ Mpc} = 2,6 \cdot 10^{26} \text{ cm}$, e também os parâmetros cosmológicos padrões: Hubble $H_0 = 1,51 \cdot 10^{-42} \text{ GeV}$, $\Omega_m = 0,27$ é a constante relacionada a quantidade de matéria escura, $\Omega_\Lambda = 0,73$ é a quantidade de energia escura e o redshift $z = 0,02$. Neste caso, o parâmetro que controla a violação da invariância de Lorentz pode ser expresso como;

$$\xi < \frac{2M_p \Delta\theta}{(k_2^2 - k_1^2)d} = 1,09 \cdot 10^{-14} \quad (4.3)$$

Em que a partir da utilização dos dados adquiridos pelo evento GRB041219A [25] onde um alto grau de polarização é observado [6, 7], podemos expor neste estudo a magnitude da restrição existente na invariância da simetria de Lorentz, decorrentes da birrefringência. Isto é, existe um parâmetro ξ estritamente relacionado a violação da SL, bem definido para o acoplamento de operadores de dimensão 5 na eletrodinâmica, que descreve interações em uma escala de energia em torno de M_p da ordem de 10^{19} , o que torna possível também gerar correções da ordem de k/M_p na relação de dispersão, de fato é uma restrição bastante rigorosa dada por $\xi < 10^{-14}$. Este resultado pode ser comparado com a possível dependência energética na velocidade de grupo para fótons dado em [34], entretanto o resultado em tal referência é menos restritivo já que $\xi = 0,8$.

Capítulo 5

Indução Radiativa do modelo de Meyers-Pospelov

Consideramos agora a Eletrodinâmica Quântica formulado no espaço (3+1) dimensões adicionado ao termo $\tilde{\eta}/M_P \bar{\psi} \not{n} \gamma_5 (n \cdot \partial)^2 \psi$, representados pela seguinte lagrangiana;

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \tilde{\eta}\bar{\psi}\not{n}\gamma_5(n \cdot \partial)^2\psi - e\bar{\psi}A\psi \quad (5.1)$$

para $\tilde{\eta} = n_2/M_P$, sendo n_2 a carga conjugada ímpar e $\not{n} = n_\mu \gamma^\mu$, com γ^μ a matriz de Dirac. Perceba que devido a $\tilde{\eta}$ esta teoria viola a invariância de CPT na transformação de carga conjugada $C^1 \mathcal{L} C^{-1}$. Também precisamos introduzir aqui a representação do propagador de Feynman usual para férmions, onde esta consideração é dado pelo seguinte diagrama;


$$S(p) = \frac{i}{(\not{p} - m)},$$

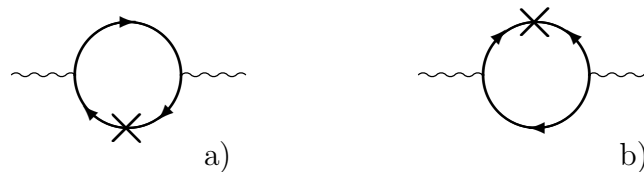
onde o momento p^μ é interpretado como o momento transportado na direção da carga ou polo do propagador, como mostra a seta no diagrama. Já os coeficientes de violação que levam a inserções no propagador, serão representados da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \times \longrightarrow \end{array} = -\frac{i\eta_2}{M_P} \not{n} \gamma_5 (n \cdot p)^2,$$

e para o vértice usual do fóton;

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \longrightarrow \longrightarrow \end{array} = -ie\gamma^\mu,$$

onde $e = |e| > 0$ é a carga do férmion e μ é o índice do espaço-tempo na linha de fótons. A correção da ordem de um loop para a ação efetiva será dada pelos gráficos abaixo.



Observe que os diagramas acima são equivalentes por certas propriedades de simetrias. Neste caso, considere a soma dos processos dado pelos gráficos em loops;

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i\tilde{\eta}e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(n \cdot p - n \cdot q)^2 T_1^{\mu\nu}(q)}{(p^2 - m^2)[(p+q)^2 - m^2]^2} + \frac{(n \cdot p)^2 T_2^{\mu\nu}(q)}{(p^2 - m^2)^2[(p+q)^2 - m^2]} \right\}, \quad (5.2)$$

em que q é uma derivada no espaço de momento e $T_{(1)}^{\mu\nu}(q)$ e $T_{(2)}^{\mu\nu}(q)$ são traços que atuam sobre as matrizes γ de Dirac, podemos escrevê-los respectivamente como;

$$T_{(1)}^{\mu\nu}(q) = Tr \left[\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + \not{q} + m)\not{\epsilon}\gamma_5(\not{p} + \not{q} + m) \right], \quad (5.3)$$

e

$$T_{(2)}^{\mu\nu}(q) = Tr \left[\gamma^\mu(\not{p} + m)\not{\epsilon}\gamma_5(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + \not{q} + m) \right]. \quad (5.4)$$

Perceba que na equação (5.2) contém produtos nos denominadores dos propagadores. Precisamos combiná-los em apenas um denominador comum. Podemos então utilizar a regra de parametrização de Feynman, que em resumo é escrita como;

$$\frac{1}{a^p b^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 dx \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[ax + b(1-x)]^{p+q}}, \quad (5.5)$$

em que por definição $\Gamma(n) = (n-1)!$. Note também que a equação (5.2) tem dependência de m e do momento externo, no entanto não depende do momento de loop. Dito isto, precisamos fazer uma mudança de variável de $p \rightarrow p - qx$, dessa forma podemos escrever;

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) = & -2\tilde{\eta}e^2 \left[\int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(n \cdot p - n \cdot q(1-x))^2 \cdot T_{(1)}^{\mu\nu}(p+qx)}{(p^2 - M^2)^3} \right\} \right. \\ & \left. + \int_0^1 dx \cdot (1-x) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(n \cdot p + n \cdot q)^2 \cdot T_{(2)}^{\mu\nu}(p+qx)}{(p^2 - M^2)^3} \right\} \right], \quad (5.6) \end{aligned}$$

os denominadores foram reajustados para gerar a potência cúbica nas quantidades p^2 e M^2 , onde $M = m^2 - x(1-x)q^2$. De acordo com a mudança de variável $T_{(1)}^{\mu\nu}(q)$ e $T_{(2)}^{\mu\nu}(q)$ também são modificados para $T_{(1)}^{\mu\nu}(p+qx)$ e $T_{(2)}^{\mu\nu}(p+qx)$, onde podemos escrever como;

$$T_{(1)}^{\mu\nu}(p+qx) = Tr \left[\gamma^\mu(\not{p} - \not{q}x + m)\gamma^\nu(\not{p} + \not{q}(1-x) + m)\not{\epsilon}\gamma_5(\not{p} + \not{q}(1-x) + m) \right], \quad (5.7)$$

e

$$T_{(2)}^{\mu\nu}(p+qx) = Tr \left[\gamma^\mu(\not{p} - \not{q}x + m)\not{\epsilon}\gamma_5(\not{p} - \not{q}x + m)\gamma^\nu(\not{p} + \not{q}(1-x) + m) \right]. \quad (5.8)$$

Devido a extensividade da solução do problema em $\Pi^{\mu\nu}(q)$, podemos resolver as integrais separadamente a partir da seguinte equação;

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_{(01)}^{\mu\nu}(q) + \Pi_{(02)}^{\mu\nu}(q), \quad (5.9)$$

no primeiro caso, consideramos $\Pi_{(01)}^{\mu\nu}(q)$, dado por;

$$\Pi_{(01)}^{\mu\nu}(q) = -8i\tilde{\eta}e^2 \int_0^1 dx \cdot x (J_{(1)}^{\mu\nu} + J_{(2)}^{\mu\nu} + J_{(03)}^{\mu\nu}). \quad (5.10)$$

É válido mencionar que na integral de intervalo simétrico as funções ímpares resultam em zero, dessa maneira, precisamos separar os casos onde o número de momentos são pares, já que estão contidos na integral de intervalo $I \in \{0, 1\}$, logo, as possíveis combinações são;

$$J_{(1)}^{\mu\nu} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(n \cdot p)^2 [N_{(0p)}^{\mu\nu} + N_{(2p)}^{\mu\nu}]}{(p^2 - M^2)^3}, \quad (5.11)$$

$$J_{(2)}^{\mu\nu} = -2(n \cdot q)(1 - x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(n \cdot p) N_{(1p)}^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^3}, \quad (5.12)$$

$$J_{(3)}^{\mu\nu} = (n \cdot q)^2 (1 - x)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{[N_{(0p)}^{\mu\nu} + N_{(2p)}^{\mu\nu}]}{(p^2 - M^2)^3}. \quad (5.13)$$

onde os subíndices $(0p)$, $(1p)$ e $(2p)$ de $N_{(0p)}^{\mu\nu}$, $N_{(1p)}^{\mu\nu}$ e $N_{(2p)}^{\mu\nu}$ respectivamente, representam as quantidades de momento existente em cada $N^{\mu\nu}$, $(0p)$ não possui p em $N^{\mu\nu}$, $(1p)$ possui apenas um p e $(2p)$ possui dois p . Dessa forma, as equações são escritas como;

$$N_{(0p)}^{\mu\nu} = [(2 - 3x)(p^2 - M^2) - q^2(1 - x)x(1 - 2x)] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} N_{(1p)}^{\mu\nu} = & [(1 - 3x)(p^2 - M^2) - q^2(1 - x)x(1 - 4x)] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha p_\beta + 2(1 - x)^2 \\ & \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha p^\lambda q_\lambda q_\beta + 2(2x - 1)(1 - x) [q^\mu p_\beta \epsilon^{\nu\alpha\beta\lambda} - q^\nu p_\beta \epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}] n_\alpha q_\lambda, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$N_{(2p)}^{\mu\nu} = 2(2x - 1) [p^\mu p_\beta \epsilon^{\nu\alpha\beta\lambda} - p^\nu p_\beta \epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}] n_\alpha q_\lambda. \quad (5.16)$$

tomando o limite em que $n^2 \rightarrow 0$ o único termo que irá contribuir é $J_{(3)}^{\mu\nu}$, temos que a equação (5.10) é escrita como:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{(01)}^{\mu\nu} &= -8i\tilde{\eta}e^2 \int_0^1 dx \cdot x J_{(3)}^{\mu\nu} = -8i\tilde{\eta}e^2 (n \cdot q)^2 \int_0^1 dx \cdot x(1-x)^2 \left\{ \left[(2-3x) \right. \right. \\
 &\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)^2} - q^2(1-x)x(1-2x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)^3} \left. \right] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha q_\beta \quad (5.17) \\
 &+ 2(2x-1) \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p_\beta \epsilon^{\nu\alpha\beta\lambda}}{(p^2 - M^2)^3} - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^\nu p_\beta \epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}}{(p^2 - M^2)^3} \right] n_\alpha q_\lambda \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Observe que, pela contagem de potências dos momentos, as integrais acima envolvem contribuições de divergência quadrática e logarítmica. Por isso, é adotado um esquema de regularização mais simples para calcular essas integrais, denominado método de regularização dimensional, que pode preservar a invariância do calibre no resultado final. Neste caso, para escrever uma equação geral para este método podemos fazer uma generalização em algumas notações, mudando de dimensão 4 para D e $d^4p/(2\pi)^4$ para $(\mu^2)^{\epsilon/2}(d^D p/(2\pi)^D)$, logo, podemos resolver as integrais de momentos utilizando a seguinte equação geral:

$$\begin{aligned}
 (\mu^2)^{\epsilon/2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n}}{(p^2 - M^2)^\alpha} &= \frac{i(-1)^n}{16\pi^2(2)^{n/2}\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha - \frac{n+D}{2}\right) \\
 &\frac{(4\pi\mu^2)^{\epsilon/2}}{(-M^2)^{(2\alpha-n-D)/2}} \eta_{\mu_1\mu_2} \dots \eta_{\mu(n-1)\mu_n}, \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

onde μ para este caso é um parâmetro arbitrário identificado na escala de massa e $\epsilon = 4 - D$. Dessa forma, as soluções das integrais de momento são resolvidas usando as seguintes igualdades;

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)^2} = \frac{i\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \quad (5.19)$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)^3} = \frac{i\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \frac{1}{2M^2} \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \quad (5.20)$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^\gamma p_\sigma}{(p^2 - M^2)^3} = \frac{i\alpha(\epsilon)}{(4\pi)^2} \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \delta_\sigma^\gamma. \quad (5.21)$$

substituindo as soluções das integrais de momento em (5.17) e resolvendo a integral em x no intervalo de $\{0, 1\}$, obtemos:

$$\Pi_{(01)}^{\mu\nu}(q) = \tilde{\eta}e^2 \frac{\alpha(\epsilon)}{40\pi^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (n \cdot q)^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha q_\beta \left(1 - \frac{\epsilon}{12}\right), \quad (5.22)$$

o resultado acima corresponde ao gráfico *a*) e é uma parte necessária para escrever a equação (5.2).

Vamos considerar agora $\Pi_{(02)}^{\mu\nu}(q)$ no segundo processo relacionado ao gráfico *b*), perceba que o procedimento feito para o gráfico *a*) pode ser usado como analogia para grande parte do procedimento em *b*). Sendo que podemos escrever o processo em *b*) através da seguinte equação;

$$\Pi_{(02)}^{\mu\nu}(q) = -8i\tilde{\eta}e^2 \int_0^1 dx \cdot (1-x)(P_{(1)}^{\mu\nu} + P_{(2)}^{\mu\nu} + P_{(3)}^{\mu\nu}), \quad (5.23)$$

em que $P_{(1)}^{\mu\nu}$, $P_{(2)}^{\mu\nu}$ e $P_{(3)}^{\mu\nu}$ são integrais dos pares de momentos, dados respectivamente por;

$$P_{(1)}^{\mu\nu} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(n \cdot p)^2 [D_{(0p)}^{\mu\nu} + D_{(2p)}^{\mu\nu}]}{(p^2 - M^2)^3}, \quad (5.24)$$

$$P_{(2)}^{\mu\nu} = 2(n \cdot q)x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(n \cdot p)D_{(1p)}^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^3}, \quad (5.25)$$

$$P_{(3)}^{\mu\nu} = (n \cdot q)^2 x^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{[D_{(0p)}^{\mu\nu} + D_{(2p)}^{\mu\nu}]}{(p^2 - M^2)^3}. \quad (5.26)$$

temos também os operadores $D_{(0p)}^{\mu\nu}$, $D_{(0p)}^{\mu\nu}$ e $D_{(0p)}^{\mu\nu}$ que são dados por;

$$D_{(0p)}^{\mu\nu} = [(p^2 - M^2)(1 - 3x) - q^2(1 - x)x(1 - 2x)] \epsilon^{\mu\nu\alpha\lambda} n_\alpha q_\lambda, \quad (5.27)$$

$$D_{(1p)}^{\mu\nu} = -[(p^2 - M^2) + q^2x(3 - 4x)] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha p_\beta + 2(2x - 1)x [q^\mu \epsilon^{\nu\alpha\beta\lambda} p_\beta - q^\nu \epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} p_\beta] n_\alpha q_\lambda, \quad (5.28)$$

$$D_{(2p)}^{\mu\nu} = [-2x^2 + 2(x - 1)](p \cdot q) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha p_\beta + 2(2x - 1) [\epsilon^{\nu\alpha\beta\lambda} p_\beta p^\mu - \epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} p_\beta p^\nu] n_\alpha q_\lambda. \quad (5.29)$$

Consideramos agora o limite de $n^2 \rightarrow 0$, temos então contribuição apenas de $P_{(3)}^{\mu\nu}$, logo, podemos escrever a equação para $\Pi_{(02)}^{\mu\nu}(q)$ como;

$$\begin{aligned}
 \Pi_{(02)}^{\mu\nu}(q) &= -8i\tilde{\eta}e^2(n \cdot q)^2 \int_0^1 dx \cdot (1-x)P_{(3)}^{\mu\nu} = -8i\tilde{\eta}e^2 \int_0^1 dx \cdot (1-x)x^2 \\
 &\left\{ \left[(1-3x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p^2-M^2)^2} - q^2(1-x)x(1-2x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p^2-M^2)^3} \right] \right. \\
 &\left. \epsilon^{\mu\nu\alpha\lambda}n_\alpha q_\lambda + 2(-x^2+x-1)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}n_\alpha q_\theta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \frac{p^\theta p_\beta}{(p^2-M^2)^3} + 2(2x-1) \right. \\
 &\left. \left[\epsilon^{\nu\alpha\beta\lambda}n_\alpha q_\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \frac{p^\mu p_\beta}{(p^2-M^2)^3} + \epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}n_\alpha q_\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \frac{p^\nu p_\beta}{(p^2-M^2)^3} \right] \right\} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Analogamente ao procedimento anterior para o processo em a) as equações dadas em (5.19) – (5.21) podemos resolver as integrais de momento da equação acima. Dessa forma, obtemos;

$$\Pi_{(02)}^{\mu\nu}(q) = \tilde{\eta}e^2 \frac{\alpha(\epsilon)}{40\pi^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (n \cdot q)^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha q_\beta \left(\frac{\epsilon}{12} - \frac{1}{2}\right), \quad (5.31)$$

a equação acima está relacionada ao gráfico b), sendo assim, é efetuado a soma entre os resultados encontrados nas equações (5.22) e (5.31), e é determinado $\Pi^{\mu\nu}(q)$, que por fim podemos escrever da seguinte forma:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2}\tilde{\eta}e^2 \frac{\alpha(\epsilon)}{40\pi^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (n \cdot q)^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha q_\beta. \quad (5.32)$$

Portanto, é induzida a ação eletromagnética de Myers-Poepelov parametrizada por um termo constante divergente, típico de teorias não-renormalizáveis. Este resultado teórico é nossa contribuição para este modelo e é encontrado por enquanto apenas neste trabalho.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, estudamos os efeitos devido a violação da SL na Eletrodinâmica Quântica via operadores de altas ordens derivativas de dimensão-5. Diante de um estudo teórico, verificou-se que o termo adicional na eletrodinâmica de Maxwell, não modifica as equações de movimento sem fonte, e também os modos de propagação das ondas eletromagnéticas. Isto implicou diretamente na forma da relação de dispersão. Quando restringimos a relação de dispersão ao caso isotrópico, $n_\mu = (n_0, \vec{0})$, obtemos uma velocidade de grupo associada dependente da energia e com graus de polarizações distintas que indicam efeito birrefringentes. Quando restringimos a relação de dispersão ao caso anisotrópico, $n_\mu = (0, \vec{n})$, observamos características semelhantes ao caso anterior, contudo, enfatizamos uma diferença que para este caso específico, a estabilidade das soluções são seguramente estáveis em alguns referenciais fora do cone de luz. Além disso, analisou-se o propagador de Feynman saturado por correntes externas, notando que os efeitos da violação da SL não afetam a estrutura micro-causal da teoria, mantendo assim a continuidade nos polos positivos do propagador.

Estudamos também os limites fenomenológicos para os efeitos de violação da SL através de recentes medidas do grau de polarização da radiação gama devido a um determinado evento astrofísico, GBR041219A [25]. Para correções isotrópicas da ordem de k/M_P para a relação de dispersão, obtemos uma restrição muito pequena de $\xi \leq 10^{-14}$. Isto significa que os efeitos destes operadores são inviáveis do ponto de vista fenomenológico. Quando analisamos a extensão de estudo de operadores de dimensão 6 (como mostra [25]) para o caso de correções, correspondente a operadores de dimensão-6. Notamos que seus limites astrofísicos não representam restrições realísticas pra violação da SL do ponto de vista fenomenológico. Pois os efeitos de polarização vistos experimentalmente devem corresponder a intensidade para ξ da ordem de 1 ou menor.

Em contra partida, demos colaborações ao estudo de violação da SL via operadores de dimensão-5 pela possibilidade de induzir do termo eletromagnético de Myers-

Pospelov pelo método de correções radiativas. De fato, o termo foi gerado por determinante fermiônico da Eletrodinâmica Quântica com a adição de operadores de dimensão-5. O resultado final corresponde a um termo divergente tal como previsto por teorias que, a priori, são não-renormalizáveis pela análise dimensional da constante de acoplamento. Uma perspectiva imediata deste trabalho, é de tentar de alguma forma, tornar a teoria de Myers-Pospelov finita por algum método de renormalização disponível na literatura.

Apêndice A

Propagação de ondas eletromagnéticas

Consideramos as seguintes equações de Maxwell modificadas obtidas no Cap. 2, como segue;

$$\nabla \cdot \vec{E} + 2g(n \cdot \partial)^2 (\vec{n} \cdot \vec{B}) = \rho, \quad (\text{A.1})$$

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} + 2g(n \cdot \partial)^2 (n_0 \vec{B} - \vec{n} \times \vec{E}) = \vec{j}, \quad (\text{A.2})$$

e as equações de Maxwell homogêneas dadas por;

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.4})$$

e também as devidas definições dos campos elétrico e magnético respectivamente escritos na forma vetorial;

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla A_0, \quad e \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (\text{A.5})$$

Agora podemos admitir a equação (A.2) na ausência de corrente, com ambos os lados da equação multiplicado por $-\partial/\partial t$, logo;

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - 2g(n \cdot \partial)^2 \left(n_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \times \vec{E}) \right) = 0, \quad (\text{A.6})$$

onde, pela equação (A.4), passa a ser escrito como;

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \vec{E} - 2g(n \cdot \partial)^2 \left(-n_0 \nabla \times \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \times \vec{E}) \right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde também $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ é uma identidade aplicada em operações com (∇) . Dessa maneira, podemos escrever a equação da seguinte forma;

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - 2g(n \cdot \partial)^2 \left(-n_0 \nabla \times \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \times \vec{E}) \right) = 0, \quad (\text{A.8})$$

perceba que os dois primeiros termos da equação acima definem a propagação de ondas usual para o campo elétrico e também que o $\nabla \vec{E} = 0$. Dessa maneira, temos;

$$\square \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + 2g(n \cdot \partial)^2 \left(n_0 \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \times \vec{E}) \right) = 0, \quad (\text{A.9})$$

a equação acima também pode ser escrito no espaço de momentos com o ansatz de ondas planas $\vec{E}(x) = \tilde{E}(k)e^{-ik \cdot x}$. Dessa forma, temos:

$$k^2 \tilde{E} + \vec{k}(\vec{k} \cdot \tilde{E}) + 2g(n \cdot \partial)^2 \left(n_0 \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \times \vec{E}) \right) = 0, \quad (\text{A.10})$$

por fim, temos a equação acima como a relação de dispersão escrita no espaço de momentos.

Apêndice B

Funções de Green transversal

A função de Green será construída com a redução do grau de liberdade na própria definição do campo elétrico, consideramos na equação (A.5) a descrição do campo elétrico sem dinâmica, ou seja, $\vec{E} = \nabla A_0$. Substituindo este resultado não dinâmico na equação de Gauss modificada, é obtido;

$$A_0 = 2g \frac{(n \cdot \partial)^2}{\nabla^2} (\vec{n} \cdot \vec{B}) - \frac{\rho}{\nabla^2}, \quad (\text{B.1})$$

usando a equação (A.2), temos;

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + 2g(n \cdot \partial)^2 n \cdot \vec{B} - 2g(n \cdot \partial)^2 (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{j}, \quad (\text{B.2})$$

neste caso é fácil checar na equação acima é fixado o calibre de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, e que quando substituindo a nova definição não dinâmica de \vec{E} em função de A_0 obtemos a seguinte equação;

$$\begin{aligned} \square \vec{A} + 2g \frac{(n \cdot \partial)^2 \nabla}{\nabla^2} \left(\vec{n} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + 2g(n \cdot \partial) \left(n_0 \nabla \times \vec{A} + \vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ - 4g^2 \frac{(n \cdot \partial)^4}{\nabla^2} \vec{n} \times \nabla(\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{A}) = \vec{j} + \frac{\nabla \partial \rho}{\nabla \partial t} - 2g \frac{(n \cdot \partial)^2}{\nabla^2} (\vec{n} \times \nabla \cdot \rho), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

substituindo equação de continuidade $\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot \vec{j}$ pela derivada temporal da densidade na equação acima, definimos a equação de corrente transversal;

$$\vec{J}_T = \vec{j} - \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{j})}{\nabla} - 2g \frac{(n \cdot \partial)^2}{\nabla^2} (\vec{n} \times \nabla \cdot \rho), \quad (\text{B.4})$$

é fácil perceber que esta equação obedece a conservação de corrente $\nabla \vec{T}_T = 0$.

Dito isto, após inserirmos a propriedade $\vec{n} \times \nabla(\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{A}) = \vec{n}^2 \nabla^2 - (\vec{n} \cdot \nabla)^2 \vec{A} + ((\vec{n} \cdot \nabla) \nabla - \vec{n} \nabla^2)(\vec{n} \cdot \vec{A})$, a equação (B.3) segue como;

$$\begin{aligned} & \left(\square + 4g^2(n \cdot \partial)^4 \left(\vec{n}^2 - \frac{(\vec{n} \cdot \nabla)^2}{\nabla^2} \right) \right) \vec{A} + 2g \frac{(n \cdot \partial)^2 \nabla}{\nabla^2} \left(\vec{n} \cdot \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ & + 2g(n \cdot \partial) \left(n_0 \nabla \times \vec{A} + \vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + 4g^2(n \cdot \partial)^4 \left(\frac{\nabla(\vec{n} \cdot \nabla)}{\nabla^2} - \vec{n} \right) (\vec{n} \cdot \vec{A}) = \vec{J}_T, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

tomando a equação acima em termos de suas componentes, definimos;

$$M_{ij}(\partial_0, \nabla) A^j = J_T^i, \quad (\text{B.6})$$

onde;

$$\begin{aligned} M_{ij}(\partial_0, \nabla) = & \left[\left(\square + 4g^2(n \cdot \partial)^4 \left(\vec{n}^2 - \frac{(\vec{n} \cdot \nabla)^2}{\nabla^2} \right) \right) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. 2g(n \cdot \partial)^2 \left(n_0 \epsilon^{ilj} \partial_l + \partial_0 \left(\epsilon^{ilj} n_l + \frac{\partial_j \partial_m}{\nabla^2} \epsilon^{lmj} n_l \right) \right) + 4g^2(n \cdot \partial)^4 \left(\frac{\partial_i \partial_l n^l}{\nabla^2} - n^i \right) n^j \right], \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dessa maneira a função de Green retardada é calculada através da equação geral dada por;

$$G_{jk}(x - y) = T_{jk}(\partial_0, \nabla) D(x - y), \quad (\text{B.8})$$

sendo que;

$$T_{jk}(\partial_0, \nabla) = \pi_{jk} \square + 4g^2(n \cdot \partial)^4 s_{jk} + 2g(n \cdot \partial)^2 a_{jk}, \quad (\text{B.9})$$

e os termos dos operadores são;

$$\pi_{im} = \left(\delta_{im} - \frac{\partial_i \partial_m}{\nabla^2} \right), \quad (\text{B.10})$$

$$s_{jk} = \left(n^j - \frac{(\vec{n} \cdot \nabla)}{\nabla^2} \partial_j \right) \left(n^k - \frac{(\vec{n} \cdot \nabla)}{\nabla^2} \partial_k \right), \quad (\text{B.11})$$

$$a_{jk} = \left(n_0 + \frac{(\vec{n} \cdot \nabla)}{\nabla^2} \partial_0 \right) \epsilon^{ikl} \partial_l, \quad (\text{B.12})$$

a função de Green escalar $D(x - y)$ é definida para satisfazer;

$$(\square^2 + 4g^2(n \cdot \partial)^4((n \cdot \partial)^2 - n^2 \square)) D(x - y) = \delta(x - y), \quad (\text{B.13})$$

com a transformada de Fourier;

$$D(x - y) = \int_c d^4k \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{(k^2)^2 - 4g^2(n \cdot k)^4((k \cdot n)^2 - k^2 n^2)}, \quad (\text{B.14})$$

onde c neste caso é o intervalo de integração que estabelece as condições de contorno, caso queiramos saturar o propagador.

Referências Bibliográficas

- [1] MYERS, R. C., POSPELOV, M., *Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory.*, **Physical Review Letters**, v. 90, n. 21, p. 211601, 2003.
- [2] REYES, C. Marat., *Causality and stability for Lorentz-C P T violating electrodynamics with dimension-5 operators.*, **Physical Review D**, v. 82, n. 12, p. 125036, 2010.
- [3] REYES, C. M., URRUTIA, L. F., VERGARA, J. D., *Quantization of the Myers-Pospelov model: The photon sector interacting with standard fermions as a perturbation of QED.*, **Physical Review D**, v. 78, n. 12, p. 125011, 2008.
- [4] MEREGHETTI, S. e et al., The INTEGRAL Burst Alert System., **Astronomy & Astrophysics**, v. 411, n. 1, p. L291-L297, 2003.
- [5] LIBERATI, S., *Tests of Lorentz invariance.*, 2013 update. **Classical and Quantum Gravity**, v. 30, n. 13, p. 133001, 2013.
- [6] WINKLER, C. et al., The INTEGRAL mission. **Astronomy & Astrophysics**, v. 411, n. 1, p. L1-L6, 2003.
- [7] VIANELLO, G., GÖTZ, D., MEREGHETTI, S., The updated spectral catalogue of INTEGRAL gamma-ray bursts., **Astronomy & Astrophysics**, v. 495, n. 3, p. 1005-1032, 2009.
- [8] M. G., NASCIMENTO, J. R., E. Passos, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, *Induction of the four-dimensional Lorentz-breaking non-Abelian Chern-Simons action.*, (Received 16 April 2007; published 2 August 2007)**Physical Review D**
- [9] KOSTELECKÝ, V. A., RUSSELL, N., Data tables for Lorentz and C P T violation., **Reviews of Modern Physics**, v. 83, n. 1, p. 11, 2011.
- [10] GLEISER, R. J., KOZAMEH, C. N., *Astrophysical limits on quantum gravity motivated birefringence.*, **Physical Review D**, v. 64, n. 8, p. 083007, 2001. [arXiv: gr-qc/0102093].

- [11] COBURN, W., BOGGS, S. E., *Polarization of the prompt γ -ray emission from the *textg-ray burst.*, 6 December 2002. *Nature*, v. 423, n. 6938, p. 415-417, 2003. [[arXiv: astro-ph/0305377](#)].*
- [12] JACOBSON, T. et al., *New limits on Planck scale Lorentz violation in QED.*, **Physical Review Letters**, v. 93, n. 2, p. 021101, 2004. [[arXiv: astro-ph/0309681](#)].
- [13] PAVLOPOULOS, T. G., Breakdown of Lorentz invariance, *Phys. Rev.* 159, 1106-1110 (1967).
- [14] AMELINO, C., G., Ellis, J. R., Mavromatos, N. E., Nanopoulos, D. V. Sarkar, S., *Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts.*, **Nature** 393, 763-765 (1998).
- [15] HAGIWARA, K. et al., Review of particle physics. **Physical Review D** (Particles and Fields), v. 66, n. 1, 2002.
- [16] GAMBINI, R., PULLIN, J., *Nonstandard optics from quantum space-time.*, **Physical Review D**, v. 59, n. 12, p. 124021, 1999.
- [17] KOSTELECKÝ, V. A., S., Stuart. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory., **Physical Review D**, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- [18] KOSTELECKÝ, V. A., POTTING, R., *CPT, strings, and meson factories.*, **Physical Review D**, v. 51, n. 7, p. 3923, 1995.
- [19] KOSTELECKÝ, V. A., *Gravity, Lorentz violation, and the standard model.*, **Physical Review D**, v. 69, n. 10, p. 105009, 2004.
- [20] COLLADAY, D., KOSTELECKÝ, V. A., *Lorentz-violating extension of the standard model.*, **Physical Review D**, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- [21] KOSTELECKÝ, V. A., MEWES., Matthew., *Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension.*, **Physical Review D**, v. 80, n. 1, p. 015020, 2009.
- [22] KOSTELECKÝ and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **85**, 096005 (2012); **88**, 096006 (2013).
- [23] VISSER, M., *Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator.*, **Physical Review D**, v. 80, n. 2, p. 025011, 2009.
- [24] GÖTZ, D. et al., *A detailed spectral study of GRB 041219A and its host galaxy.*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 413, n. 3, p. 2173-2183, 2011.

- [25] LAURENT, Pea et al., *Constraints on Lorentz invariance violation using integral/IBIS observations of GRB041219A.*, **Physical Review D**, v. 83, n. 12, p. 121301, 2011.
- [26] ARNOWITT R. L., S. Deser and C. W. Misner, *The dynamics of general relativity, Gravitation: an introduction to current research*, **Louis Witten** ed. (Wiley 1962), chapter 7, pp 227-265.
- [27] LEWIS H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, (1995); RMOND P., *Field Theory. A modern Primer*. The Benjamin Cummings **Publishing Company**, Inc., (1983).
- [28] SCATENA, Esley; TURCATI, Rodrigo., *Unitarity and nonrelativistic potential energy in a higher-order Lorentz symmetry breaking electromagnetic model.*, **Physical Review D**, v. 90, n. 12, p. 127703, 2014. [arxiv: 1411.4549].
- [29] MÉSZÁROS, P., *Theories of Gamma-Ray Bursts.*, **Annu. Rev. Astron. Astrophys.**, v. 40, n. astro-ph/0111170, p. 137-169, 2001.
- [30] KLEBESADEL, Ray W., STRONG, Ian B., OLSON, Roy A., *Observations of gamma-ray boosts of cosmic origin.*, **The Astrophysical Journal**, v. 182, p. L85, 1973.
- [31] MACCIONE, Luca et al., *γ -ray polarization constraints on Planck scale violations of special relativity.*, **Physical Review D**, v. 78, n. 10, p. 103003, 2008. [arXiv: 0809.0220 [astro-ph]]
- [32] BOLOKHOV, Pavel A., POSPELOV, Maxim., *Classification of dimension-5 Lorentz-violating interactions in the standard model.*, **Physical Review D**, v. 77, n. 2, p. 025022, 2008.
- [33] CASSANA, R., EDUARDO CARVALHO, S., MANOEL, M. Ferreira, Jr., *Dimensional reduction of the CPT-even electromagnetic sector of the standard model extension*{**Physical Review D** Received 5 March 2011; published 5 August 2011
- [34] ABDO, A. A, ACKERMANN M., M. AJELLO et al., *Lorentz Symmetry Violation* **Nature** (London) 462, 331 (2009).