



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**TERMODINÂMICA DE UM BURACO NEGRO
BTZ COM UM COMPRIMENTO MÍNIMO**

Anderson Tiago Nascimento da Silva

CAMPINA GRANDE
- Maio de 2018 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**TERMODINÂMICA DE UM BURACO NEGRO
BTZ COM UM COMPRIMENTO MÍNIMO**

Anderson Tiago Nascimento da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Anacleto.

CAMPINA GRANDE
- Maio de 2018 -

S586t

Silva, Anderson Tiago Nascimento da.

Termodinâmica de um buraco negro BTZ com um comprimento mínimo / Anderson Tiago Nascimento da Silva. - Campina Grande, 2018.
50 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.

"Orientação: Prof. Dr. Marcos Anacleto".

Referências.

1. Buraco Negro BTZ. 2. Comprimento Mínimo. 3. Não-Comutatividade. 4. Variáveis Termodinâmicas. I. Anacleto, Marcos. II. Título.

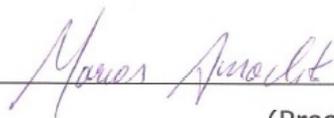
CDU 524.882(043)

TERMODINÂMICA DE UM BURACO NEGRO BTZ COM UM COMPRIMENTO MÍNIMO

ANDERSON TIAGO NASCIMENTO DA SILVA

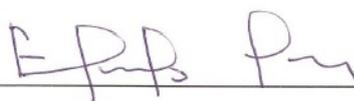
Aprovado em 24/05/2018

BANCA EXAMINADORA



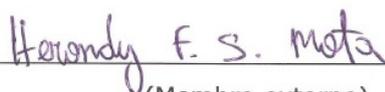
(Presidente)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Herondy Francisco de Santana Mota
Departamento de Física – UFPB

If I have seen further it is by standing on the
shoulders of Giants

Isaac Newton

Agradecimentos

À Deus por ter me dado perseverança, paciência e sabedoria para a conclusão deste curso;

Ao meu orientador Marcos Antonio Anacleto, por ter me aceitado como orientador, por ter me proposto esse desafio ao qual me fez crescer mais, academicamente falando e por ter acreditado em meu potencial;

Ao meu coorientador Jean Spinelly, por seus conselhos que levarei pra toda vida, por ter me acompanhando desde a graduação, com sua paciência de Jó e por me ajudar a desenvolver este trabalho;

Aos meus pais, em especial minha mãe Edeilza do Nascimento da Silva por ter feito inúmeros sacrifícios para que eu e meus irmão tivessem condições para estudar;

Aos meus irmãos Edson Diego Nascimento da Silva e Jessika Nascimento da Silva por se fazerem presentes nos momentos mais difíceis;

À todos os meus amigos e colegas de curso que de alguma forma, cada um com seu modo específico, contribuíram para o meu amadurecimento na pesquisa;

À todos os professores da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande por contribuírem para a minha formação de mestre;

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física;

À banca examinadora por terem aceitado ue dividiram comigo este momento tão importante e esperado: Herondy Mota e Eduardo Passos;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão da bolsa.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico $f(r)$ para alguns valores de M , com $J = 1$, $a = 0,1$ e $l = 2$. A massa e o raio do Buraco Negro Extremo são $M_0 \approx 0,061$ e $r_0 \approx 0,99$	35
3.2	Gráfico de $f(r)$ para os conjuntos de valores $(a = 0,1, M = 0,5)$, $(a = 0,7, M = 0,544)$ e $(a = 1, M = 0,624)$, com $l = 0,5$ e $J = 2$	35
3.3	T_H como uma função de r_H para um Buraco Negro de comprimento mínimo, nos casos em que $a = 1$ e $a = 0,1$. Em ambas as situações, consideramos $l = 10$ e $J = 0,03$	37
3.4	T_H como uma função de r_H para um Buraco Negro BTZ de comprimento mínimo em comparação com um Buraco Negro BTZ. Nos dois casos, consideramos $l = 10$ e $J = 0,03$	37
3.5	Entropia vs r_H . Entropia do Buraco Negro BTZ de comprimento mínimo com $a = 1$ e $l = 10$	39
3.6	Entropia de Bekenstein-Hawking vs r_H	39
3.7	Capacidade térmica em função de r_H . A linha sólida representa o Buraco Negro BTZ de comprimento mínimo e a pontilhada representa o buraco negro BTZ com $a = 0,1$. Em ambos os casos adotamos $l = 10$ e $J = 0,03$	40
3.8	V_{eff} vs r . Potencial efetivo para geodésicas tipo-luz.	42
3.9	V_{eff} vs r . Potencial efetivo para geodésicas tipo-tempo.	42

Resumo

A métrica obtida por Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) foi encontrada considerando a equivalência em três dimensões entre gravitação e a teoria de Chern-Simons, uma teoria topológica em três dimensões, com o mapeamento de Seiberg-Witten, na qual sua solução é descrita em $(2+1)$ -dimensões e sua solução trabalha-se com constante cosmológica negativa, um importante campo de investigação. Neste trabalho, vamos considerar o raio mínimo de uma densidade de superfície obtido a partir do átomo de hidrogênio para analisar certas propriedades termodinâmicas, como temperatura de Hawking, entropia e capacidade de calor, comparando nossos resultados com os de um buraco BTZ não-comutativo, assim podemos observar se tais efeitos são válidos neste tipo de distribuição de massa ou se violam as leis da termodinâmica. Também é discutida a estrutura geodésica dos buracos negros BTZ de comprimento mínimo para partículas sem massa e massivas.

Palavras-chave: Buraco Negro BTZ, comprimento mínimo, não-comutatividade, variáveis termodinâmicas.

Abstract

The metric obtained by Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) was discovered seeing the three-dimensional equivalence between gravitation and the Chern-Simons theory, a topological three-dimensional theory along with the Seiberg-Witter mapping, in which its solution is described in $(2 + 1)$ -dimensions and its solution works with negative cosmological constant, an important field of investigation. In this work, we will consider the minimum radius of a surface density obtained from the hydrogen atom to analyze certain thermodynamic properties, such as Hawking temperature, entropy and heat capacity, comparing our results with those related to a non-commutative BTZ hole, so we can see if such effects are valid in this type of mass distribution or if they violate the thermodynamics laws. The geodesic structure of the BTZ minimum length black holes for massless and massive particles is discussed as well.

Keywords: black hole BTZ, minimum length, non-commutativity, thermodynamic variables.

Sumário

Introdução	1
1 Buraco Negro	4
1.1 O campo gravitacional relativístico	4
1.2 Equações geodésicas	6
1.3 As equações de Einstein	9
1.4 Soluções do tipo buraco negro	11
1.4.1 O espaço-tempo de Schwarzschild	12
1.4.2 A métrica BTZ	13
1.5 Termodinâmica de um Buraco Negro	15
2 Não-Comutatividade	20
2.1 Aspectos Gerais	20
2.1.1 Problema de Landau	23
2.1.2 Produto Moyal	26
2.2 Soluções do Buraco Negro em Gravidade Não-comutativa	29
2.2.1 A não-comutatividade na métrica de Schwarzschild	29
2.2.2 A métrica BTZ no espaço não-comutativo	31
3 Efeitos do comprimento mínimo no Buraco Negro BTZ	33
3.1 Buraco Negro tipo BTZ com um comprimento mínimo	33
3.2 Cálculo das variáveis termodinâmicas no Buraco Negro com comprimento mínimo	35
3.3 Análise do movimento geodésico do Buraco Negro de comprimento mínimo	40
4 Conclusões	43
Referências Bibliográficas	45

Introdução

Em 1915, um mês após a publicação da Teoria da Relatividade Geral, Karl Schwarzschild encontrou a solução das equações de Einstein que descreve o espaço-tempo quadridimensional exterior a um corpo esférico de massa M , conhecida como solução de Schwarzschild.

Devido a estrutura causal desse espaço-tempo, qualquer partícula ou raio de luz que se encontre no interior da região delimitada pela superfície $r_s \equiv 2M$, denominada pelo horizonte de eventos, inevitavelmente termina caindo na singularidade, ou seja, em $r = 0$. Por outro lado, um observador localizado na região a uma distância r em que $r > r_s$ não receberá qualquer informação sobre os fatos que aconteceram na região em que $r < r_s$, porque nada, nem mesmo a luz pode ir através da superfície r_s . Logo, para este observador a região interior é “negra”. Para que uma distribuição de massa esfericamente simétrica apresente um Horizonte de Eventos, se faz necessário que sua massa esteja concentrada em uma esfera com raio menor que r_s . Neste caso, esta distribuição será um Buraco Negro [1].

Além da solução de Schwarzschild, outras métricas tipo Buraco Negro, como as de Reissner-Nördstrom, Kerr e Kerr-Newmann, foram obtidas em (3+1) dimensões. Em um espaço-tempo tridimensional, ao introduzirem uma constante cosmológica negativa, $\Lambda = -l^{-2}$ ¹, nas equações de Einstein, Banados, Teitelboim, and Zanelli [2] encontraram uma solução de Buraco Negro, que passou a ser chamada de solução BTZ.

Nos últimos anos a solução BTZ tem recebido muita atenção por várias razões. A principal delas é devido ao fato que, em (3+1) dimensões ou até mesmo em dimensões

¹ l deve fornecer a escala de comprimento necessaria para se ter um raio de horizonte de eventos.

superiores, as propriedades de um Buraco Negro, a nível quântico, permanecem, até agora, como um mistério, acredita-se que os Buracos Negros em (2+1) dimensões servirão como um bom laboratório e relativamente simples, que propiciarão a compreensão dessas propriedades e também permitirão a análise de aspectos gerais da física de um Buraco Negro. A outra motivação é que o Buraco Negro BTZ pode ser um excelente laboratório para se explorar e testar algumas ideias que estão por trás da correspondência AdS/CFT² [3]. Além dessas razões, ele também tem atraído a atenção para o estudo das propriedades térmicas de um Buraco Negro tridimensional [4].

Admitindo uma geometria não-comutativa, isto é, que existe uma relação de comutação entre as coordenadas do espaço-tempo e, conseqüentemente, uma relação de incerteza associada às coordenadas [26], M. Banados *et al* [6] obtiveram a chamada métrica BTZ não comutativa (BTZNC). Algum tempo depois, Anacleto, Brito e Passos [7] analisaram o efeito Aharonov-Bohm gravitacional devido ao buraco negro BTZNC. Além disso, Sadeghi e Reza [8], estudaram o comportamento de partículas testes nesse espaço-tempo não-comutativo. Neste trabalho, vamos considerar o raio mínimo de uma densidade de massa superficial obtida a partir da função de onda do estado fundamental do átomo de hidrogênio, para analisar os efeitos da termodinâmica. Em seguida, comparamos os nossos resultados com os de um Buraco Negro BTZNC, para analisarmos se tais efeitos são válidos neste tipo de distribuição de massa ou se violam as leis da termodinâmica. Além disso, investigaremos o comportamento de partículas testes no espaço-tempo BTZ gerado pela referida densidade de massa. Em nossos cálculos, usaremos o sistema natural de unidade no qual temos $c = \hbar = G = 1$.

Para fins de melhor compreensão de entendimento do nosso trabalho, este fora dividido nos seguintes capítulos: No capítulo um, abordaremos sobre Buraco Negro, campo gravitacional relativístico, equações geodésicas, equações de Einstein e suas aplicações para os Buracos Negros para os tipos Schwarzschild e BTZ; No capítulo dois,

²Relação entre dois tipos de teorias físicas: De um lado estão os espaços anti-de Sitter (AdS) que são usados nas teorias da gravidade quântica, do outro lado da correspondência estão as teorias de campo conforme (CFT), que são teorias de campo quântico.

mostramos como o espaço-tempo se comporta na presença da Não-comutatividade, seus aspectos gerais e como o Buraco Negro de Schwarzschild e BTZ se comportam; No capítulo três mostramos nossos resultados, de como o Buraco Negro do tipo BTZ se comporta com um comprimento mínimo, suas variáveis termodinâmica e análise do movimento geodésico no espaço-tempo de comprimento mínimo ; No capítulo quatro, encerramos nosso trabalho, colocando nossas perspectivas, nossos elementos e trabalhos futuros.

Capítulo 1

Buraco Negro

O termo Buraco Negro foi cunhado em 1969 pelo cientista americano John Wheeler. Este fenômeno ocorre quando uma região do espaço-tempo tem sua atração gravitacional é extremamente intensa (devido ao acúmulo excessivo de matéria e energia originada pela morte de uma estrela) que impede que a própria luz escape para o infinito. A superfície imaginária e imaterial que delimita tal região recebe o nome de Horizonte de Eventos.

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos do campo gravitacional relativístico como passo inicial para a posteriori aprofundarmos na equações relativísticas de Einstein e suas aplicações para o Buraco Negro de Schwarzschild e BTZ. Mostraremos, também, como iremos tratar os cálculos da geodésica para este trabalho. Por fim, falaremos sobre a termodinâmica em um Buraco Negro.

1.1 O campo gravitacional relativístico

Sabe-se que uma propriedade básica dos campos gravitacionais é que todos os corpos se movem da mesma maneira, independentemente de sua massa, desde que suas condições iniciais sejam as mesmas. Se soltarmos dois corpos de massas diferentes, por exemplo, no campo gravitacional da Terra, ambos irão adquirir a mesma aceleração, obedecendo a lei da queda livre.

Isto nos fornece a possibilidade de estabelecer uma analogia entre os movimentos de um corpo em um campo gravitacional e de outro que não esteja localizado em um campo externo, mas em um sistema de referencial não-inercial. No sistema de referencial

inercial, o movimento livre de todos os corpos é uniforme e retilíneo, e se, no tempo inicial, suas velocidades forem iguais, serão iguais para qualquer tempo. Portanto, se considerarmos esse movimento em um determinado sistema não-inercial, em relação ao primeiro sistema, todos os corpos mover-se-ão da mesma maneira. Conclui-se que as propriedades um sistema de referência não-inercial são equivalentes a um determinado sistema inercial na presença de um campo gravitacional (princípio de equivalência).

Agora imagine um corpo de massa arbitrária, movendo-se livremente em um sistema de referencial uniformemente acelerado. Este corpo terá, em relação a esse sistema, uma aceleração constante de mesma intensidade e sentido oposto. O mesmo se aplica ao movimento em um campo gravitacional constante uniforme, como por exemplo, o campo da gravidade da terra (sobre pequenas regiões, onde o campo pode ser considerado uniforme). Assim, um sistema de referencial uniformemente acelerado é equivalente a um campo externo constante e uniforme. Do mesmo modo, o movimento linear acelerado de um sistema de referencial não uniforme é equivalente a um campo uniforme gravitacional.

No entanto, há uma divergência quando se trata do comportamento dos campos em sistemas de referenciais não-inerciais para campos gravitacionais “reais” para distâncias muito longas. Em distâncias infinitas, a ação desse segundo sempre vai para zero, em contrapartida o primeiro aumenta ou permanece com seu valor à medida que o observador vai para o infinito. Notamos isso ao observar que a força centrífuga de um sistema rotacionando (um carrossel, por exemplo) aumenta à medida que nos afastamos de seu eixo de rotação; Analogamente, o campo para o qual um sistema em movimento linear acelerado é o mesmo em todo o espaço e também no infinito.

Campos que, em um referencial não-inercial, são equivalentes, desaparecem, assim que há uma mudança em seu sistema para um referencial inercial. Em contraste, notamos que os campos gravitacionais “reais” (existentes em referenciais inerciais) não podem ser eliminados na mudança de referencial. Como já citado antes, percebemos que ambos se comportam de forma semelhante, desde que o observador não se distancie. Compreendemos que se torna impossível eliminar esse segundo campo, já que este

desaparece no infinito.

Uma vez entendido sobre tais propriedades, podemos estendê-las para a mecânica relativista, fazendo analogias ao que fora dito anteriormente. Em um sistema de referencial, em coordenadas cartesianas, o elemento de linha ds é dado pela seguinte relação[9]:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.1)$$

Após a transformação para qualquer outro sistema de referencial inercial (isto é, sob transformação de Lorentz) o intervalo mantém a mesma forma, porém se formos tratar para um sistema de referencial não-inercial, ds^2 não será mais a soma dos quadrados das quatro coordenadas diferenciais, assumindo uma forma mais geral¹:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

Onde $g_{\mu\nu}$ são funções das coordenadas de espaço x, y, z e da coordenada temporal t . Também determina todas as propriedades geométricas de cada ponto do sistema curvilíneo espaço-tempo, que chamaremos de métrica do espaço-tempo.

Foi demonstrado que um sistema de referência não-inercial é equivalente a um certo campo de força. Agora vemos que esses campos, na mecânica relativística, são determinado pelas quantidades $g_{\mu\nu}$ e que o mesmo se aplica aos campos gravitacionais “reais”, pois qualquer um deste obedecerá apenas a uma alteração na métrica do espaço-tempo, conforme determinado por sua métrica. Esse fato importante significa que as propriedades geométricas do espaço-tempo são determinadas por fenômenos físicos e não são propriedades fixas de espaço e tempo.

1.2 Equações geodésicas

O movimento de uma partícula num campo de gravitação pode ser determinado a partir do princípio de ação mínima, pois o campo gravitacional nada mais é do que a modificação do espaço-tempo, e se exprime somente pela modificação da distância

¹Em coordenadas não-inerciais, o sistema quadrimensional é curvilíneo

infinitesimal entre dois pontos, ds , em função de dx^μ . Como consequência do campo gravitacional, uma partícula se move de tal modo que o seu ponto de universo descreve um extremal, ou o que chamamos de geodésica no espaço-tempo; porém, devido a presença do campo gravitacional o espaço-tempo não é de Galileo, a linha do universo não é uma “reta”, nem o movimento espacial da partícula é retilíneo e uniforme [10].

Agora, vamos aplicar a técnica conhecida como método variacional de da geodésica. Iniciaremos com a lagrangeana funcional:

$$L = L(x^a, \dot{x}^a, u),$$

onde u é o parâmetro ao longo de uma curva tipo tempo e o ponto acima do x denota diferenciação em relação a u , definido em termos da métrica por:

$$L = [g_{ab}(x)\dot{x}^a\dot{x}^b]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3)$$

Segue-se que a ação é:

$$\int_{p_1}^{p_2} L du = \int_{p_1}^{p_2} ds = s, \quad (1.4)$$

Em que s é o intervalo entre dois pontos p_1 e p_2 sob a curva que os conecta. A métrica geodésica desses dois pontos é definido como o intervalo estacionário sob pequenas variações que somem nos pontos finais. Ou seja, precisamos resolver o princípio da ação da partícula estacionaria $\delta s = 0$. A solução consiste na equação de Euler-Lagrange da seguinte forma:

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Inicialmente, essas equações resolvem o problema, mas, na prática, existem algumas dificuldades. Em primeiro lugar, é muito melhor trabalhar, sempre que possível, com L^2 em vez de L para evitar raízes quadradas. Então, há a liberdade na escolha do parâmetro u . Finalmente, no caso de uma métrica indefinida, há a distinção entre geodésia nula e não nula. Assumindo $L \neq 0$ e multiplicando (1.5) por $-2L$, produz:

$$2L \left[\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} \right] = 0. \quad (1.6)$$

A equação (1.6) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^a} = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \frac{dL}{du} \quad (1.7)$$

Substituindo por L^2 no lado esquerdo da equação (1.7), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^a} &= \frac{d}{du} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} (g_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c) \right] - \frac{\partial}{\partial x^a} (g_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c) \\ &= \frac{d}{du} (2g_{ab} \dot{x}^b) - (\partial_a g_{bc}) \dot{x}^b \dot{x}^c \\ &= 2g_{ab} \ddot{x}^b + 2\partial_c g_{ab} \dot{x}^b \dot{x}^c - \partial_a g_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c \\ &= 2g_{ab} \ddot{x}^b + 2\dot{x}^b \dot{x}^c \left[\frac{1}{2} (\partial_c g_{ba} + \partial_b g_{ca} - \partial_a g_{bc}) \right] \\ &= 2g_{ab} \ddot{x}^b + 2\dot{x}^b \dot{x}^c \{bc, a\}. \end{aligned}$$

Agora, se assumirmos $L \neq 0$, o lado direito da equação (1.7), produz:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \frac{dL}{du} &= 2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} (g_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c)^{\frac{1}{2}} g_{ad} \dot{x}^d \frac{d}{du} \left(\frac{ds}{du} \right) \\ &= 2 (g_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c)^{-\frac{1}{2}} g_{ad} \dot{x}^d \frac{d^2 s}{du^2} \\ &= 2 \left(\frac{d^2 s}{du^2} / \frac{ds}{du} \right) g_{ab} \dot{x}^b, \end{aligned}$$

Multiplicando esses dois resultados por g^{ad} , temos:

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = (\ddot{s}/\dot{s}) \dot{x}^a. \quad (1.8)$$

Se escolhermos o parâmetro $u = s$, o termo do lado direito da equação desaparece, nos dando:

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0. \quad (1.9)$$

Portanto, s é um parâmetro afim. Note que, da equação (1.8), qualquer outro parâmetro afim está relacionado a s por:

$$\bar{s} = \alpha s + \beta, \quad (1.10)$$

α e β são constantes. Um argumento similar se aplica para a geodésica tipo tempo. No caso de métricas indefinidas, o intervalo entre pontos vizinhos sob a curva tendendo a

zero, a geodésica será nula neste intervalo. No entanto, a equação (1.3), L desaparece e o argumento anunciado acima não é satisfeito. Para que não ocorra esse problema, iremos modificar este argumento para a geodésica nula, tal que ela assumirá a seguinte forma:

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = \lambda(u) \dot{x}^a,$$

onde $\lambda(u)$ é uma função do parâmetro da curva u e o vetor tangente \dot{x}^a satisfaz $g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0$.

De forma análoga, se as equações geodésicas não possuem o lado direito inexistente, ou seja, $\lambda = 0$, então u é um parâmetro afim, no qual obcecará a seguinte relação:

$$\bar{u} = \alpha s + \beta, \tag{1.11}$$

sendo que α e β são constantes Resumindo, se definimos um quantidade k por:

$$2K \equiv g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = \alpha, \tag{1.12}$$

α é uma constante, e se tomarmos u para ser um parâmetro afim, então a forma mais útil da equação geodésica é:

$$\frac{\partial K}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0, \tag{1.13}$$

e que:

$$2K = \alpha = \begin{cases} 0, \\ +1, \\ -1. \end{cases} \tag{1.14}$$

O vetor tangente pode ser nulo, positivo ou negativo. Nos últimos dois casos, u pode se tornar o parâmetro de distância entre s e σ . Esta é a abordagem que devemos adotar no nosso trabalho subsequente.

1.3 As equações de Einstein

A teoria dos campos gravitacionais, construída com base na teoria da relatividade, é chamada de Teoria da Relatividade Geral. Foi estabelecido por Einstein onde demonstrou que toda porção de matéria curva o espaço-tempo à sua volta e esta curvatura observada acaba gerando um campo gravitacional. Com isto, sua antiga teoria (Teoria da Relatividade Restrita) se generaliza para o caso de referenciais não-inerciais e se reduz à

Teoria da Gravitação de Newton no regime clássico, completando esta última para incluir também o caso de grandes densidades de massa[11].

Einstein propôs a unificação dos conceitos de matéria e energia, e colocou o tempo como sendo uma quarta dimensão nos sistemas de coordenadas[12]. Desde então, a distância entre dois pontos, ou a localização de uma partícula, passou a ter uma quarta coordenada, o tempo. Apesar de seus conceitos parecerem bem mais complicados que as definições de espaço da mecânica clássica, a Relatividade Geral nos permite descrever as propriedades geométricas do espaço-tempo de maneira elegante.

Tal modelo, pode apropriadamente ser chamado de um Universo semi-euclidiano. Em outras palavras, podemos imaginar que o nosso Universo se comporta de forma análoga a uma superfície que possui pequenas deformações que se afastam lentamente de um plano.

Segundo Newton, dois corpos de massas diferentes e separadas por uma certa distância um do outro, devem se atrair mutuamente por uma força denominada de gravitacional. Esta interação é descrita por sua distribuição de massa $\rho(x, y, z)$ que obedece a equação de Poisson para o potencial $\Phi(x, y, z)$ [13]:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho . \tag{1.15}$$

Para a descrição do campo Newtoniano apenas 1(um) potencial se faz necessário para descrever os efeitos do campo gravitacional. Por sua vez, a TRG requer 10 (dez) potenciais que são representados pelos componentes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}(x)$. Isso significa que devemos ter 10 equações que, no limite do campo fraco, devem corresponder à equação de Poisson. Além disso, tais equações devem apresentar características semelhantes à equação (1.15), ou seja, do lado direito deve conter um tensor que represente a quantidade de matéria e energia, denominado de Tensor Energia-Momento, representado por $T_{\mu\nu}$ e do outro, deve haver um tensor de segunda ordem construído em termos de derivadas segundas do tensor $g_{\mu\nu}$ [1]. Levando isso em conta, Einstein concluiu que essas equações devem ter a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} , \tag{1.16}$$

onde $R_{\mu\nu}$ e R são, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci, os quais são dados por:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\rho}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} \quad (1.17)$$

e

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} , \quad (1.18)$$

em que

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right), \quad (1.19)$$

são os chamados símbolos de Christoffel.

Desde que o tensor energia-momento obedeça a lei covariante de conservação de energia, $\nabla^{\nu}T_{\mu\nu} = 0$. Assim, o lado esquerdo de (1.16) toma a seguinte forma:

$$\nabla^{\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \equiv 0, \quad (1.20)$$

no espaço-tempo vazio, o tensor energia-momento é nulo, e as equações de Einstein são reduzidas a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.21)$$

Vale a pena ressaltar que o espaço-tempo vazio, não é necessariamente, um espaço-tempo plano. Quando as equações de campo de Einstein no vácuo são satisfeitas, o tensor de Riemann é, então, igual ao tensor de Weyl, que é, em geral, diferente de zero. Somente quando todas as componentes do tensor de Riemann são nulas é que o espaço-tempo é plano.

1.4 Soluções do tipo buraco negro

O Buraco Negro é formado quando um corpo de massa M se contrai para um tamanho menor do que o chamado raio gravitacional $r_g = 2M$. Conclui-se que nem sinais nem partículas podem fugir da região dentro do Buraco Negro, uma vez que a velocidade da luz é a velocidade de propagação limitante para os sinais físicos. Esta natureza é absoluta na teoria da gravitação de Einstein, pois a interação gravitacional

é universal. O papel da carga gravitacional é desempenhado por massa cujo valor é proporcional à energia total do sistema. Assim, todos os objetos com energia diferente de zero participam da interação gravitacional.[14] A Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) em conjunto com a solução de Schwarzschild, são empregadas ao máximo na descrição dos Buracos Negros (embora no contexto da Gravitação Newtoniana já existisse remotas especulações sobre as chamadas “Estrelas Negras”). Descobriu-se que, depois de sua formação, qualquer Buraco Negro fica estacionário e seu campo é determinado de maneira única por um pequeno número de parâmetros. A razão física para esta propriedade impressionante de Buracos Negros é o fato de que, no campo extremamente forte de um buraco negro no espaço vazio, apenas tipos muito especiais de configuração de campos físicos (incluindo o campo gravitacional). Os físicos que atuam nesta área de pesquisa se dedicam a retirar o máximo de informações sobre efeitos que possam ocorrer ao seu redor e assim criar novas maneiras de tentar detectá-lo.

1.4.1 O espaço-tempo de Schwarzschild

Após Einstein apresentar esta equação, o alemão Carl Schwarzschild encontrou a primeira solução exata destas equações para um campo gravitacional esférico no vácuo. Esta é a solução mais simples de uma simetria esférica que pode ser produzida por uma distribuição esférica de matéria [10]. Ela tem a seguinte forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta + \text{sen}^\theta d\phi) \quad (1.22)$$

onde M é a massa da origem do campo

Uma propriedade importante desta solução é que esta independente da coordenada temporal t . A solução é determinada por um único parâmetro M ; isto é, a massa gravitacional total que produz o campo. Esta interpretação do parâmetro M segue imediatamente a partir da forma assintótica da métrica. Longe de o centro de gravidade ($r \rightarrow \infty$), o espaço-tempo se aproxima do espaço-tempo plano de Minkowski com métrica (1.22), e o campo gravitacional pode ser descrito usando a aproximação de campo fraco[14].

Com esta solução Schwarzschild mostrou que uma distribuição de massa puntiforme tem uma característica bastante peculiar, em que, para $r_g = 2M$, nada pode escapar dessa região, nem mesmo a luz. A esta região denominamos de *Raio de Schwarzschild*. Quando uma partícula sem massa (fóton) atravessa esse raio, a deformação do espaço-tempo é tão grande que ela não consegue mais voltar, como consequência, um observador que está situado distante desse raio não conseguirá mais obter informações dessa partícula, ou seja, agora ela faz parte do Buraco Negro.

1.4.2 A métrica BTZ

O estudo das geodésicas nulas e geodésicas do tipo tempo são uma alternativa para se observar as características do espaço-tempo, além disso, a métrica obtida por Schwarzschild em $(3 + 1)$ -dimensões representou a chave para entender vários fenômenos físicos importantes como, por exemplo, os movimentos planetários e as lentes gravitacionais [15]. A solução em $(2 + 1)$ -dimensões só veio por meio dos estudos de [16] que consideraram identificações no subgrupo $SO(2,2)$ a partir do espaço anti-de Sitter (adS), cuja característica é possuir constante de curvatura negativa. Esta constante implica que localmente o espaço é do tipo anti-de Sitter, mas se difere em suas propriedades globais. Para que buracos negros sejam formados neste espaço é necessário que se tenha esta constante cosmológica negativa, pois ela fornece a escala de comprimento necessária para ter um horizonte de eventos em uma teoria na qual a massa é adimensional [17].

A ação é dada por [17]:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g}[R + 2l^{-2}]d^2xdt + B \quad (1.23)$$

onde B é o tremo de superfície e raio de curvatura l se relaciona com a constante cosmológica da seguinte forma: $-\Lambda = l^{-2}$

Resolvendo as equações de Einstein para(1.23), obtiveram a seguinte métrica:

$$ds^2 = -N^{-2}dt^{-2} + N^{-2}dr^2 + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (1.24)$$

em que o lapso quadrado $N^2(r)$ e a mudança angular $N^\phi(r)$ têm a seguinte forma:

$$N^2(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (1.25)$$

$$N^\phi(r) = -\frac{J}{2r^2} \quad (1.26)$$

Com t e r finitos e $0 \leq \phi \leq 2\pi$

Neste trabalho, focaremos nossa atenção principalmente nas propriedades físicas da solução, pois nosso interesse maior é o estudo das propriedades termodinâmicas e o movimento geodésico para o espaço-tempo não-comutativo deste tipo de Buraco Negro, seja ele carregado ou não. A estrutura geométrica e seu estudo detalhado está fornecido em [16].

Na métrica apresentada acima as duas constantes M e J são identificadas como sendo a massa e o momento angular que representam cargas conservadas associadas com a invariância assintótica sob deslocamento no tempo e invariância de rotação, respectivamente. Segundo[16], esta identificação é conseguida através de uma análise das integrais de superfície que devem ser adicionadas ao Hamiltoniano a fim de torná-lo bem definido.

A função de lapso $N(r)$ desaparece para dois valores de r dados por:

$$r_{\pm} = l \left[\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (1.27)$$

destes, r_+ é o horizonte do Buraco Negro. Para que o horizonte exista, é preciso $M > 0$ e $|J| \leq Ml$. E para o caso extremo em que $|J| = Ml$ as duas raízes de $N^2 = 0$ são iguais.

Para ser obter o espaço vazio, ou estado de vácuo, temos que fazer com que o Buraco Negro desapareça. Ou seja, deixando ser horizonte ir para zero. Isso equivale permitir que $M \rightarrow 0$ e $J \rightarrow 0$. Assim a métrica (1.24) toma a seguinte forma:

$$ds_{vac}^2 = - \left(\frac{r}{l} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{l}{r} \right)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (1.28)$$

Para retomar o espaço anti-de Sitter basta fazer com que $M = -1$ e $J = 0$, fazendo com que a singularidade desapareça e seu horizonte deixe de existir. Para este caso, devemos

ter:

$$ds^2 = - \left(1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right) dt^2 + \left(1 + \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (1.29)$$

Portanto, percebe-se que o espaço anti-de Sitter surge como um “estado vinculado”, separado do espectro contínuo de Buraco Negro por uma diferença de uma unidade de massa. Este estado não pode ser deformado continuamente no vácuo (1.28), porque a deformação exigiria passar por uma sequência de singularidades que não estão incluídas nesta configuração de espaço.

1.5 Termodinâmica de um Buraco Negro

O primeiro indício de que pode haver uma ligação entre os buracos negros e termodinâmica veio, em 1970, com a descoberta, por meio do formalismo matemático, de que a área da superfície do horizonte de eventos tem a propriedade de sempre aumentar quando matéria adicional ou radiação é absorvida. Além disso, se dois Buracos Negros colidem e se fundem para formar um, a área do horizonte deste novo é maior do que a soma dos que colidiram. Estas propriedades sugerem que existem uma semelhança entre a área do horizonte de eventos de um buraco negro e o conceito de entropia em termodinâmica.

A primeira lei da termodinâmica diz que uma pequena mudança na entropia de um sistema é acompanhada por uma variação proporcional na energia do sistema. O fator de proporcionalidade é chamada de temperatura do sistema. Em [18], observa-se uma lei similar relativa a variação da massa de um Buraco Negro para uma alteração na área do horizonte de eventos. Onde, o fator de proporcionalidade envolve uma quantidade chamada de gravidade de superfície, que é uma medida da força do campo gravitacional no horizonte de eventos. Se a área do horizonte de eventos é análoga a entropia, então parece que a gravidade de superfície é análoga à temperatura. A semelhança é reforçada pelo fato de a gravidade de superfície ser a mesma em todos os pontos do horizonte de eventos, fato semelhante ocorre com a temperatura, pois esta é a mesma em todos os lugares em um corpo em equilíbrio térmico. Nota-se a existência dessa relação íntima entre essas leis pode nos fornece uma chave para a compreensão da natureza fundamental dos buracos

negros em uma teoria quântica da gravidade, bem como para a nossa compreensão de alguns aspectos da própria natureza da termodinâmica.

Quando um Buraco Negro é criado por colapso gravitacional, ele rapidamente se estabelece um estado estacionário que se caracteriza por apenas três parâmetros: a massa, o momento angular e a carga elétrica. Fora estas três propriedades, o Buraco Negro não preserva nenhum outro detalhes do objeto que entrou em colapso. Esta conclusão foi conhecida como um teorema “Buracos Negros não têm cabelos” [19].

Imagine que um Buraco Negro engole um corpo quente possuindo uma certa quantidade de entropia. Então, o observador de fora descobre que a entropia total na parte do mundo acessível a sua observação diminuiu. Este desaparecimento da entropia poderia ser evitado de forma puramente formal se simplesmente atribuíssemos a entropia do corpo ingerido à região interna do Buraco Negro. De fato, esta “solução” é manifestamente insatisfatória porque qualquer tentativa de um observador “externo” para determinar a quantidade de entropia “absorvida” pelo Buraco Negro está condenada à falha. Pouco depois da absorção, o Buraco Negro torna-se estacionário e completamente “esquece”, como resultado da “calvície”, tais “detalhes” como a estrutura do corpo ingerido e sua entropia[14].

Visto que não estamos inclinados a abandonar a lei da entropia porque um buraco negro se formou em algum lugar do Universo, então temos que concluir que qualquer Buraco Negro, por si só, possui uma certa quantidade de entropia e que um corpo quente que cai nela não só transfere sua massa, momento angular e carga elétrica para o Buraco Negro, mas também a entropia S . Foi inicialmente apontado por [20] que uma relação próxima poderia existir entre certas leis satisfeitas pelos buracos negros na relatividade geral clássica e as leis comuns da termodinâmica. O teorema da área da relatividade geral clássica afirma que a área, A , de um Buraco Negro nunca pode diminuir em qualquer processo:

$$\Delta A \geq 0. \tag{1.30}$$

De fato, o teorema da área de Hawking implica que a área A não diminui em

nenhum processo clássico; isto é, comporta-se como a entropia faz. Verificou-se, de fato, que a analogia da física do Buraco Negro com a termodinâmica é bastante abrangente.

Esse resultado é muito análogo à afirmação da segunda lei ordinária da termodinâmica: a entropia total, S , de um sistema fechado nunca diminui em nenhum processo:

$$\Delta S \geq 0. \quad (1.31)$$

Pouco tempo depois, a analogia entre certas leis da física do Buraco Negro na relatividade geral clássica e as leis da termodinâmica foi desenvolvida sistematicamente por [18]. Eles provaram que, na relatividade geral, a gravidade superficial, k , de um Buraco Negro estacionário deve ser constante no horizonte de eventos. Eles observaram que esse resultado é análogo à lei zero da termodinâmica, cuja sua afirmativa diz que a temperatura T , deve ser uniforme em um corpo em equilíbrio térmico. Com isso, Bardeen, Carter e Hawking provaram o que vinha a ser a “primeira lei da mecânica do Buraco Negro”. No caso do vácuo, esta lei afirma que as diferenças em massa M , área A e momento angular J , de dois buracos negros estacionários próximos devem ser relacionados por[21]:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} k \delta A + \Omega \delta J, \quad (1.32)$$

onde Ω indica a velocidade angular do horizonte do evento. Os termos adicionais podem aparecer no lado direito da eq. (1.32) quando os campos de matéria estão presentes. Eles observaram que esta lei é intimamente análoga à primeira lei ordinária da termodinâmica, que afirma que as diferenças de energia E , entropia e outros parâmetros de estado de dois estados de equilíbrio térmico próximos de um sistema são dadas por:

$$\delta E = T \delta S + \xi, \quad (1.33)$$

ξ são os “termos de trabalho”

Se compararmos as Leis zero, primeira e segunda da termodinâmica, seus correspondentes nas “Leis da mecânica do Buraco Negro”, percebemos a analogia das quantidades:

$$E \leftrightarrow M, \quad (1.34)$$

$$T \leftrightarrow \alpha k, \quad (1.35)$$

$$S \leftrightarrow \frac{A}{8\pi\alpha}, \quad (1.36)$$

α é uma constante indeterminada

Essa relação é de tamanha importância, pois decorre do fato de que E e M representam a mesma quantidade física, ou seja, a energia total do sistema. No entanto, na relatividade geral clássica, a temperatura física de um Buraco Negro é zero absoluto, isso nos leva a pensar que não pode haver relação física entre T e k . Consequentemente, também seria inconsistente assumir uma relação física entre S e A . Por esse motivo, no momento em que apareceu em [18], a maioria dos pesquisadores viu a analogia entre a Buraco Negro e leis termodinâmicas como uma curiosidade matemática, sem qualquer significado físico.

Essa analogia mudou com a descoberta de Hawking que, devido para efeitos de criação de partículas quânticas, um Buraco Negro irradia até o infinito espécies de partículas com um espectro de corpo negro perfeito, à temperatura (em unidades com $G = c = h = k = 1$)

$$T = \frac{k}{2\pi}. \quad (1.37)$$

Assim, $k/2\pi$ é a temperatura física de um Buraco Negro, não apenas uma quantidade que desempenha um papel unicamente matemático, mas sim análogo à temperatura nas leis da mecânica do Buraco Negro. Deste modo, o cálculo de Hawking da criação de partículas efetivamente deu uma resposta ressonantemente positiva à questão de saber se existe algum significado físico para a relação matemática entre as leis da mecânica do Buraco Negro e as leis da termodinâmica.

Podemos encontrar a entropia pela seguinte expressão:

$$S = \int \frac{dM}{T_H} \quad (1.38)$$

Termodinâmica para a métrica de Schwarzschild

Para este cálculo, temos que a temperatura Hawking é dada por:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{dg_{00}}{dr} \Big|_{r_H}, \quad (1.39)$$

utilizando a equação acima para a métrica (1.22), esta toma a seguinte forma:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \Big|_{r=2M} \Rightarrow T_H = \frac{1}{8\pi M}, \quad (1.40)$$

com o Resultado obtido acima, podemos encontrar a entropia, através da equação (1.38), que nos dá:

$$S = \int 3\pi M dM = 4\pi M^2 = \pi r_h^2, \quad (1.41)$$

onde r_h é o raio do horizonte de Schwarzschild. Ao reescrever este resultado em termos da área de uma esfera:

$$S = \frac{A}{4}. \quad (1.42)$$

Esta equação é a formula de Bekeinstein-Hawking, na qual postularam que a entropia de uma buraco negro deve ser proporcional a sua área.

Termodinâmica para a métrica BTZ

Agora, utilizaremos a métrica (1.24) para calcularmos a temperatura, que será:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right) \Big|_{r=r_+} \Rightarrow T_H = \frac{1}{2\pi r_+} \left(\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} \right). \quad (1.43)$$

Uma vez encontrada a temperatura Hawking, podemos utiliza-la para calcular a entropia para esta métrica, através da equação (1.38). Além disso, mudamos o elemento de integração dM para dr_+ que foi mostrado na equação (1.27). Assim, temos:

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi r_+ \left(\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} \right)^{-1} \left(\frac{2r_+}{l^2} - \frac{J^2}{2r_+^3} \right) dr_+ \Rightarrow \\ S &= \int 4\pi dr_+ \Rightarrow \\ S &= 4\pi dr_+ \Rightarrow \\ S &= A. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Consideramos que a área do Buraco Negro em $(2 + 1)$ -dimensões é $A = 4\pi r_+$.

Capítulo 2

Não-Comutatividade

A não-comutatividade é uma opção para descrever o espaço-tempo quantificado, buscando responder questões sobre sua natureza quântica em escalas de energia muito altas, isto é, as singularidades gravitacionais.

Neste capítulo iremos discutir sobre os aspectos da não-comutatividade, o problema de Landau causado quando se considera essa geometria e o estudo de duas funções no espaço-tempo não comutativo, isto é, Produto Moyal.

2.1 Aspectos Gerais

O conceito de não-comutatividade dá-se a partir dos estudos de Heisenberg sobre o efeito ultravioleta na tentativa de encontrar explicações para as divergências na eletrodinâmica quântica, porém o pioneiro a formalizar essa ideia fora Snyder. Em seu modelo existe uma escala de comprimento mínimo universal em distâncias próximas a $\sqrt{\theta}$ que geralmente é limitado ao comprimento de Planck, e, como tal, não é acessível para observações experimentais[22].

Uma alternativa promissora ao cenário de Planck é discutida em teorias com “grandes dimensões extras”, tais como teoria das cordas que, no limite de baixas energias de modo que os efeitos são detectados no LHC [23].

Essas ideias nos dá a possibilidade de provar experimentalmente a não-comutatividade e os efeitos da gravidade quântica. A confirmação mais convincente da Gravidade Quântica TeV seria a produção de um mini Buraco Negro em colisões

hadronicas [24] [25]. Esta assinatura se torna inconfundível quando se é feita uma análise detalhada de ambos os produtos em decaimento e do eventual resíduo do Buraco Negro. Até agora, o cenário padrão de evaporação de BH ofereceu previsões detalhadas e definidas para o espectro de partículas emitidas, enquanto não é conclusivo sobre a fase final de evaporação de BN. Essa ambiguidade pode ser observada até a descrição semi-clássica do processo de Hawking, pois a matéria emitida pelo BN é representada pela teoria quântica de campo no espaço-tempo curvo, no entanto o próprio BN ainda é de geometria clássica de fundo. Por outro lado, o estágio final da decaimento de Buraco Negro requer correções de gravidade quântica que o modelo semi-clássico não consegue fornecer.

Em vista do caráter “quântico”, espera-se que a geometria não-comutativa para o estágio tardio da evaporação seja determinado pelas flutuações do espaço-tempo quando o raio do horizonte do BN se torne compatível com $\sqrt{\theta}$. As tentativas usuais de obter soluções do tipo Buraco Negro a partir das equações Einstein “não-comutativas” são baseadas na expansão perturbativa neste parâmetro.

O espaço tempo não-comutativo nasceu essencialmente com a mecânica quântica, onde, no espaço de fases ¹, as variáveis canônicas x^μ e p_ν são substituídas por operadores \hat{x}^μ e \hat{p}_ν e obedecem a relação de comutação de Heisenberg $[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu]$. Como consequência, o espaço de fases torna-se espalhado, sendo assim, a noção de ponto da célula de Planck é perdida, porém no limite clássico onde $\hbar \rightarrow 0$, temos o espaço reestabelecido. Ao descrever essa geometria “sem ponto”, Von Neumann disse que não faria sentido a noção de ponto em um espaço quântico, pois isto violaria o princípio da incerteza de Heisenberg. Daí então deu-se início a geometria não-comutativa[26].

O interesse pela não-comutatividade foi desenvolvido quando se mostrou que a teoria de campo se torna não-comutativa quando a matéria se desdobra da gravidade e o espaço-tempo induz uma álgebra de coordenadas não-comutativa. Na gravidade quântica de loop, os operadores espaciais não se deslocam e obtém-se um colecter não comutativo.

¹Espaço de fases ou espaço fásico é definido como o espaço formado pelas posições generalizadas e seus momentos conjugados correspondentes. Fisicamente cada ponto do espaço fásico representa um possível estado do sistema mecânico.

A não-comutatividade é introduzida por meio de [27]:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde Θ representa uma matriz anti-simétrica $D \times D$, sendo D a dimensão do espaço-tempo e $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D - 1$ tem dimensão de comprimento quadrado. Em casos mais simples, o Θ se torna uma constante. Como as coordenadas não comutam, elas não podem ser diagonalizadas simultaneamente, o que implica em uma relação de incerteza proporcional a Θ . A partir do princípio da incerteza de Heisenberg generalizado:

$$\Delta x^{\mu 2} \Delta x^{\nu 2} \geq \left(\frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \right)^2. \quad (2.2)$$

Encontramos:

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\Theta^{\mu\nu}|. \quad (2.3)$$

Essa matriz determina a discretização fundamental do espaço-tempo, da mesma forma que a constante de Planck \hbar discretiza o espaço de fase. Como consequência, a geometria resultante é “inaproveitável”, já que a noção de ponto não é mais justificada por causa da incerteza induzida pelo comportamento não-comutativo das coordenadas. Em outras palavras, ao localizar uma das coordenadas, a outra se torna espalhada, perdendo assim a representação usual de um ponto através da localização de duas coordenadas [28].

Portanto, pode-se interpretar essa perda de resolução como o surgimento de um ultravioleta eficaz natural interrompido, regulando não só a gravidade, mas também a teoria quântica de campo. ZSABO, corrobora ao dizer que:

“A melhor evidência que temos da teoria da não-comutatividade parte da teoria das cordas, que é o melhor candidato para a teoria quântica da gravidade. Devido as cordas terem comprimentos infinitos, definidos pela escala de Planck $l_p \approx \sqrt{\frac{G\hbar}{c^2}} \approx 10^{-35}m$, não é possível observar distâncias menores do que l_p . Para altas energias, as cordas modificam o princípio da incerteza de Heisenberg.”[26]

Adequando-se para essa abordagem, o princípio da incerteza Heisenberg se modifica e passaremos a chamar de princípio da incerteza generalizado (GUP). Baseado nas altas

energias das cordas este assume a seguinte forma:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + l_s^2 \Delta p \right). \quad (2.4)$$

Estudos recentes mostram que o princípio da incerteza generalizado (GUP) é cada vez mais importantes nas proximidades dos horizontes de eventos dos buracos negros [26] e [29].

Observe que no limite de $l_s = 0$, a relação acima se torna a relação da mecânica quântica usual. Desta forma, a teoria de cordas fornece uma forma explicita da noção de achatamento do espaço-tempo descrito acima [26]. A relação de incerteza pode ser postulada como sendo:

$$\Delta x^i \Delta x^j = l_p^2. \quad (2.5)$$

2.1.1 Problema de Landau

O problema de Landau trata-se de um sistema não-relativístico, onde N_e elétrons interagem, movendo-se em duas dimensões. Consideremos uma partícula carregada de massa m movendo-se no plano $\mathbf{r}_a = 1, \dots, N_e$ e na presença de um campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$ constante e perpendicular ao plano em que eles se movem.

Para esta situação física, a lagrangeana pode ser descrita da seguinte forma:

$$L = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{m_e}{2} \dot{\mathbf{r}}_a^2 + e \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_a) - V(\mathbf{r}_a) \right] - \sum_{a<b} U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b). \quad (2.6)$$

Em que $A(r_a) = (0, Bx_a, 0)^2$, é o correspondente potencial vetor.

Para quantizarmos canonicamente esse sistema, iremos determinar o correspondente operador hamiltoniano que pode ser obtido por:

$$H = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{\pi_a^2}{2m_e} + V(\mathbf{r}_a) \right] - \sum_{a<b} U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b), \quad (2.7)$$

onde o momento mecânico (não-canônico) é dado por:

$$\pi_a = m_e \dot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{p}_a - eA(\mathbf{r}_a), \quad (2.8)$$

²Este potencial aparece escrito nesta forma devido a um calibre representado pelo potencial vetor $A' = A + \Delta f$ e $V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$, onde f é uma função arbitrária.

\mathbf{p}_a é o momento canônico que obedece as relações de comutação usuais.

$$[x_a, P_b^x] = [Y_a, P_b^y] = i\delta^{ab}, \quad (2.9)$$

$$[x_a, Y_b] = [P_a^x, P_b^y] = 0. \quad (2.10)$$

Há, também, relação entre comutadores quânticos não nulos, que são dados por:

$$[\hat{\pi}_a^x, \hat{\pi}_b^y] = ieB\delta_{ab}. \quad (2.11)$$

Note que o espaço dos momentos na presença de um campo magnético B de fundo é não-comutativo.

Podemos reescrever o operador momento $\hat{\pi}_a$ em termos dos operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico. Na ausência de interações, $V = U = 0$, os autovalores de energia da hamiltoniana são aqueles dos níveis de Landau:

$$E = \frac{eB}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

O surgimento da não-comutatividade das coordenadas dá-se ao tomarmos o limite de campo forte, ou seja $B \rightarrow \infty$, que, de maneira mais formal, tomamos no limite de massa infinitesimal $m_e \rightarrow 0$. Isso faz com que a lagrangeana tome a seguinte forma:

$$L_0 = \sum_{a=1}^{N_e} [eBx_a\dot{y}_a - V(x_a, y_a)] - \sum_{a<b} U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b). \quad (2.13)$$

Para cada $a = 1, \dots, N_e$, que a lagrangeana acima é da forma $p\dot{q} - h(p, q)$, e forma um par canônico (eBx_a, y_a) cuja relação de comutação é:

$$[\hat{x}_a^i, \hat{x}_b^j] = \frac{i\delta_{ab}\epsilon^{ij}}{eB} = i\delta_{ab}\theta^{ij}, \quad (2.14)$$

em que o parâmetro da não-comutatividade é:

$$\theta^{ij} = \frac{\epsilon^{ij}}{eB}, \quad (2.15)$$

sendo ϵ^{ij} o tensor de Levi-Civita.

Os elétrons movem-se no nível mais baixo que o de Landau, onde é descrito por um plano não-comutativo. Isso acontece devido a imposição de restrições de primeira classe, ou seja, $\pi_a \approx 0$ [26] e [37].

Podemos obter a não-comutatividade no espaço das coordenadas através do procedimento de quantização canônica de Dirac para sistemas vinculados.

A partir da lagrangeana (2.13), obtemos os momentos canonicamente conjugados[31]:

$$px_a = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_a} = 0, \quad (2.16)$$

$$py_a = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{y}_a} = eBx_a. \quad (2.17)$$

O sistema acima possui os seguintes vínculos:

$$\phi_1 \equiv px_a \approx 0, \quad (2.18)$$

$$\phi_2 \equiv py_a - eBx_a \approx 0. \quad (2.19)$$

Das expressões acima, fazamos o parêntese de Poisson, que nos dá:

$$\{\phi_1, \phi_2\} = eB. \quad (2.20)$$

Da relação (2.20) percebemos que estes estão classificados como segunda classe³[32], cuja a hamiltoniana canônica é:

$$H = py_a \dot{y} - L_0 = \sum_{a=1}^{N_e} V(x_a, y_a) + \sum_{a<b} U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b). \quad (2.21)$$

Com os vínculos primários temos a hamiltoniana primeira:

$$H_p = H + u^1 \phi_1 + u^2 \phi_2, \quad (2.22)$$

onde $u^1 u^2$ são os multiplicadores de Lagrange. Os parênteses fundamentais de Poisson são definidos como:

$$\{x^i, x^j\} = 0, \{x^i, p^j\} = \delta^{ij}. \quad (2.23)$$

Por causa da condição de consistência, $\dot{\phi}_i \approx 0$ com $i = 1, 2$, os vínculos primários da expressão (2.22) são todos de segunda classe.

Os parênteses de Dirac são definidos por:

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \sum_{r,s=1}^2 \{f, \phi_r\} C_{rs}^{-1} \{\phi_s, g\}, \quad (2.24)$$

³Na terminologia de Dirac os vínculos são classificados como sendo de primeira classe, se, entre eles, o parêntese de Poisson seja nulo, caso contrário serão de segunda classe.

onde

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -1/eB \\ 1/eB & 0 \end{vmatrix},$$

é a inversa da matriz $C_{rs} = \{\phi_r \phi_s\}$ e ϕ_r o conjunto de todos os vínculos de segunda classe.

Assim, temos que:

$$\{x_a^i, x_b^j\}_D = -\frac{1}{eB} \delta_{ab} \epsilon^{ij}, \quad (2.25)$$

e a quantização é obtida pela correspondência

$$\{x_a^i, x_b^j\}_D \rightarrow i [\hat{x}_a^i, \hat{x}_b^j], \quad (2.26)$$

logo,

$$[\hat{x}_a^i, \hat{x}_b^j] = \frac{1}{eB} \delta_{ab} \epsilon^{ij} = i \delta_{ab} \theta^{ij}. \quad (2.27)$$

A não-comutatividade das coordenadas são estabelecidas no limite clássico, onde temos os parênteses de Poisson não nulos. No limite $B \rightarrow \infty$ o espaçamento entre os níveis de Landau torna-se infinito e no nível mais baixo $n = 0$ temos um desacoplamento dos níveis restantes no sistema. Com isso, em seu limite, o campo forte projeta o espectro quântico no nível mais baixo de Landau.

2.1.2 Produto Moyal

Compreende-se que uma teoria sobre o espaço-tempo deformado com a relação de comutação conforme fora mostrado anteriormente é equivalente a outra teoria do espaço-tempo comutativo em que um produto de duas funções no espaço-tempo não-comutável original é substituído por um produto deformado (*) das funções no espaço-tempo comutativo, o chamado produto Moyal:

$$(f * g)(x) \equiv \exp \left[\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right] f(x)g(y), \quad (2.28)$$

Onde f e g são funções das coordenadas. Como o parâmetro θ varia de zero para um valor positivo, passamos do regime comutativo para não-comutativo.

A expressão acima pode ser expandida para que possamos obter a primeira ordem de θ :

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \left[1 + \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} + O(\theta^2) \right] f(x)g(x), \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f(x) \frac{\partial}{\partial y^\beta} g(x) + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

. Note que nesta última expressão há um acréscimo de fase na multiplicação de dois operadores.

Embora apareçam muitos trabalhos sobre o lado da gravidade não-comutativo, onde a maioria foram soluções obtidas diretamente das equações de campo, o progresso foi bastante lento. Há vários fatores para isso, mas os principais foram: um é que a gravidade não-comutativa em si ainda não está bastante estabelecida, e a outra é que a gravidade não é exatamente uma Teoria de Gauge.

Propriedades do Produto Moyal

i) Comutadores entre duas coordenadas:

$$\begin{aligned} [x^\alpha; x^\beta] &= x^\alpha * x^\beta - x^\beta * x^\alpha \\ &= x^\alpha x^\beta + \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} - x^\beta x^\alpha - \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ &= i\theta^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

ii) Comutador entre as coordenadas x^α e $f(x)$:

$$\begin{aligned} [x^\alpha; f(x)] &= x^\alpha * f(x) - f(x) * x^\alpha \\ &= x^\alpha f(x) + \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f(x)}{\partial x^\beta} - f(x) x^\alpha - \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= i\theta^{\alpha\beta} \frac{\partial f(x)}{\partial x^\beta}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

iii) Comutador entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$:

$$\begin{aligned}
[f(x); g(x)] &= f(x) * g(x) - g(x) * f(x) \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right] f(x)g(y) - \exp \left[\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right] g(x)f(y). \\
&= 2i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) f(x)g(y).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Para o anti-comutador de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, temos:

$$\{f(x); g(x)\} = 2 \operatorname{cos} \left(\frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) f(x)g(x). \tag{2.32}$$

Agora, para mostrar algumas outras propriedades, utilizaremos a transformada de Fourier para o produto Moyal, na qual assume-se a seguinte forma:

$$f(x) * g(x) = \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} f(k)g(k') e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu}. \tag{2.33}$$

A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, nos diz que:

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \cdot e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{2.34}$$

Aplicando a propriedade acima no produto das exponenciais da equação (2.33), temos:

$$e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} = e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} \cdot e^{-\frac{1}{2} k_\mu [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] k'_\nu}, \tag{2.35}$$

$$= e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} \cdot e^{-\frac{1}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} k'_\nu}, \tag{2.36}$$

Usando os resultados obtidos da expressão (2.36) na equação (2.33), obtemos:

$$f(x) * g(x) = \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} f(k)g(k') e^{-\frac{1}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} k'_\nu}. \tag{2.37}$$

Outra propriedade dá-se ao considerar a anti-simetria da matriz θ , na integração do produto Moyal:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu} = \delta(k + k'). \tag{2.38}$$

Assim,

$$\int d^D x f(x) * g(x) = \int d^D x f(x)g(x). \tag{2.39}$$

A integração do produto Moyal de duas funções é igual a integração do produto natural delas.

2.2 Soluções do Buraco Negro em Gravidade Não-comutativa

A formulação de uma versão completa e não-comutativa da Relatividade Geral é um negócio de interesse primário e atualmente é objeto de uma vasta literatura. No momento, apesar do trabalho promissor neste campo, ainda estamos longe de uma teoria amplamente reconhecida de Gravidade não-comutativa, que, em algum sentido, é esperado para fornecer a transição do diferencial suave para o fibroso (ou loopy) do espaço-tempo.

Nesta seção não discutiremos sobre a precisão dos modelos propostos de gravidade não-comutativa na literatura, mas apresentaremos a formulação que conduziu concretamente a novas métricas, obtidas pela resolução, exatamente ou aproximadamente, da versão não-comutativa das equações de Einstein, a fim de estudar o efeito fisicamente confiável na física dos buracos negros resultantes, definindo o elemento de linha equivalente a formulação não-comutativa e observando se há algum tipo de mudança nas singularidades que ocorrem no espaço-tempo convencional.

2.2.1 A não-comutatividade na métrica de Schwarzschild

Em [33] seus autores mostraram que os restos finais de um Buraco Negro, no plano de fundo não-comutativo, é um objeto termodinâmico estável. Este foi o primeiro trabalho que abordou os estudos de Buraco Negro de Schwarzschild não-comutativo.

A não-comutatividade elimina estruturas semelhantes a pontos em favor de objetos manchados em espaço-espaço plano. O efeito de “mancha” é implementado substituindo a função Dirac-delta pela distribuição Gaussiana da largura $\sqrt{\theta}$ [33].

Felizmente, não é necessário mudar o tensor de Einstein parte das equações de campo e que os efeitos não-comutáveis podem ser implementados atuando apenas na fonte da matéria. O que sabemos com certeza, é que a não-comutatividade é uma propriedade intrínseca próprio da dimensão, enquanto a curvatura mede a força do campo métrico, isto é, a resposta à presença de uma distribuição em massa de energia. Inspirado por este resultado, a não-comutatividade no Buraco Negro de Schwarzschild, tomando a densidade

de massa para ser uma distribuição Gaussiana é dado por [33]:

$$\rho_\theta(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp(-r^2/4\theta). \quad (2.40)$$

A massa M da partícula, em vez de ser perfeitamente localizada no ponto, é distribuída através da região de tamanho linear $\sqrt{\theta}$. Isso ocorre devido à incerteza generalizada do comutador de coordenadas (2.1).

Usando a eq. (2.40) podemos escrever a massa do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo de raio r da seguinte maneira [34]:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_\theta(r) dr = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (2.41)$$

onde

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \equiv \int_0^{r^2/4\theta} x^{1/2} e^{-x} dx, \quad (2.42)$$

é a função gamma e θ é o parâmetro de não-comutatividade.

A métrica do Buraco Negro de Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = -f_\theta(r) dt^2 + f_\theta(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.43)$$

onde

$$f = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (2.44)$$

e

$$\Omega^2 = dv^2 + \text{sen}^2 v d\phi^2, \quad (2.45)$$

O raio do horizonte de evento é encontrado quando a componente g_{11} diverge, o que é análogo a fazer $H(r) = 0$. Desta forma temos:

$$r_H = 2M \left[1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-M^2/\theta} + O\left(\frac{\sqrt{\theta}}{M}\right) \right]. \quad (2.46)$$

O efeito da não-comutatividade é exponencialmente pequeno, o que é razoável esperar, pois em grandes distâncias o espaço-tempo recupera o regime clássico. Ou seja, a equação acima se reduz ao horizonte de eventos para o caso comutativo, $\hat{r}_h = 2M$.

Nestas condições, a temperatura Hawking toma a seguinte forma:

$$T = \frac{1}{4\pi r_H} \left(1 - \frac{r_H^3}{4\theta^{3/2}\gamma(3/2, r_H^2/4\theta)} e^{-r_H^2/4\theta} \right), \quad (2.47)$$

$$T = \frac{1}{8\pi} - \frac{M}{2\sqrt{\pi^3\theta}} e^{-M^2/\theta} \left(\frac{M}{\sqrt{\theta}} + O\left(\frac{\sqrt{\theta}}{M}\right) \right). \quad (2.48)$$

Quando $\frac{M}{\sqrt{\theta}} \gg 1$ a equação (2.48) retornará ao caso convencional para a métrica de Schwarzschild, ou seja $T = \frac{1}{8\pi M}$.

Assim, a entropia é dada por:

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_H^2, \quad (2.49)$$

$$S = 4\pi M^2 - 16\sqrt{\pi} M^2 e^{-\frac{M^2}{\theta}} \left(\frac{M}{\sqrt{\theta}} + O\left(\frac{\sqrt{\theta}}{M}\right) \right). \quad (2.50)$$

Esta equação tem mesma função para o caso da Lei da área de Benkenstein-Hawking no espaço comutativo.

2.2.2 A métrica BTZ no espaço não-comutativo

Para (2 + 1)-dimensões, a fonte de energia localizada em uma distribuição estática e esfericamente simétrica com um perfil Gaussiano mínimo é tomada como:

$$\rho = \frac{M}{4\pi\theta} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (2.51)$$

sua distribuição de massa é dada por:

$$m(r) = M \int_0^{r^2/4\theta} e^t dt = M \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right) \right]. \quad (2.52)$$

Considere que:

$$r_H^2 = \frac{M}{\Lambda} \left[2\exp\left(-\frac{r_H^2}{4\theta}\right) \right]. \quad (2.53)$$

Ao resolver as equações de Einstein, levando em consideração a métrica BTZ não-comutativa, encontramos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\varphi + N^\varphi dt)^2. \quad (2.54)$$

Em que:

$$f(r) = -8M(1 - e^{-r/4\theta}) + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (2.55)$$

$$N^\varphi = -\frac{J}{2r^2}. \quad (2.56)$$

Para essas condições, a temperatura Hawking se dá pela seguinte equação[36]:

$$T_H = -\frac{r_H/\sqrt{\theta}}{4\pi} \left[2\Lambda\sqrt{\theta}\exp\left(-\frac{r_H^2}{4\theta}\right) \right]. \quad (2.57)$$

A equação acima a temperatura Hawking para o caso não-comutativo, ou seja, levando em consideração a correção do parâmetro θ .

O próximo passo é encontrar as correções θ da entropia de Bekenstein-Hawking (S) do buraco negro de BTZ:

$$S = 4\pi r_H \approx 4\pi\sqrt{Ml} - 4\pi\sqrt{Ml}\exp\left(-\frac{Ml^2}{4\theta}\right), \quad (2.58)$$

onde o primeiro termo se diz respeito a entropia de Benkenstein-Hawking para o Buraco Negro BTZ e o segundo termo é a correção para a não-comutatividade θ .

Capítulo 3

Efeitos do comprimento mínimo no Buraco Negro BTZ

No capítulo anterior vimos que, ao considerarmos a não-comutatividade em um espaço-tempo, perdemos a noção de ponto. Como consequência, uma massa, considerada como puntiforme em um espaço-tempo comutativo, deve ser tratada como uma distribuição de massa. Naturalmente, a hipótese da não-comutatividade faz com que as soluções das equações de Einstein, associadas a uma massa localizada, sejam modificadas. Conceitualmente, para que essas soluções mantenha suas características, devemos substituir a massa puntiforme por uma “espalhada”.

Neste capítulo, consideraremos o Buraco Negro BTZ com um comprimento mínimo, onde este tem comportamento semelhante ao não-comutativo. Uma vez que consideramos uma distribuição de massa, abordaremos algumas das propriedades termodinâmicas e analisaremos se tais propriedades são obedecidas. Em particular, avaliaremos numericamente como a temperatura, a entropia e a capacidade térmica dependem do raio do horizonte de eventos.

3.1 Buraco Negro tipo BTZ com um comprimento mínimo

Nosso objetivo aqui é obter a solução BTZ com um comprimento mínimo. Para tanto, além de considerarmos que o espaço-tempo possui $(2 + 1)$ dimensões, admitirmos

que a geometria é gerada por uma massa em rotação e assumirmos a existência de uma constante cosmológica negativa, $\Lambda = -l^{-2}$, nas equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{l^2}g_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

devemos substituir a função Delta de Dirac, que representaria uma massa puntiforme em uma geometria comutativa, por uma função de distribuição, $\rho(r)$.

Exceto pelo fato que essa função deve recair na Delta de Dirac, no limite em que o parâmetro de não-comutatividade é nulo, não existem restrições quanto a sua forma. Efeito análogo ocorre ao considerarmos o comprimento mínimo dado a partir do raio de um átomo de hidrogênio. Diante disso, a adotaremos como

$$\rho(r) = \frac{8M}{a^2\pi} \exp\left(\frac{-4r}{a}\right), \quad (3.2)$$

onde M é a massa total difundida e a é um parâmetro positivo que se assemelha com a não-comutatividade.

Assim, a distribuição de massa “espalhada”, contida em uma região de raio r , é

$$\mathcal{M} = \int_0^r \rho(r)2\pi r dr = M \left[1 - \frac{(4r+a)}{a} \exp\left(\frac{-4r}{a}\right) \right]. \quad (3.3)$$

A lei de conservação $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ indica que o tensor de energia-momento possui a forma anisotrópica $T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p_r, \rho_\perp)$, onde a pressão radial e tangencial são dadas por $p_r = -\rho$ e $p_\perp = -\rho r \partial_r \rho$, respectivamente. Levando isso em conta, ao resolvermos as equações de campo de Einstein, obtemos o seguinte elemento linha:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\varphi + N^\varphi dt)^2, \quad (3.4)$$

onde

$$f(r) = -8\mathcal{M} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (3.5)$$

e

$$N^\varphi = -\frac{J}{2r^2}. \quad (3.6)$$

No limite de $r/a \rightarrow \infty$, nossa solução se reduz à solução que descreve o Buraco Negro BTZ com momento angular J . Neste sentido, denominamos a métrica acima por Buraco Negro BTZ de comprimento mínimo.

O raio do horizonte do Buraco Negro é obtido quando fazemos $f = 0$. Dessa forma, a partir do gráfico de $f(r)$, representado na figura 3.1, podemos observar que o BTZ com comprimento mínimo possui dois horizontes, isto é, o horizonte interior (Cauchy), r_C , e o externo (eventos), r_H , e que a distância entre os horizontes cresce a medida que a massa M aumenta. Também podemos verificar que existe uma massa mínima, M_0 , para que um *Buraco Negro Extremo* seja encontrado. Nesta situação, os raios dos horizontes interno e externo são iguais ao raio do horizonte mínimo, r_0 . Em nossas análises, considerando $J = 1$, $a = 0,1$ e $l = 2$, encontramos $M_0 \approx 0,061$ e $r_0 \approx 0,99$

Outro aspecto a ser destacado é que r_0 aumenta à medida que o parâmetro de a cresce, conforme mostra a figura 3.2.

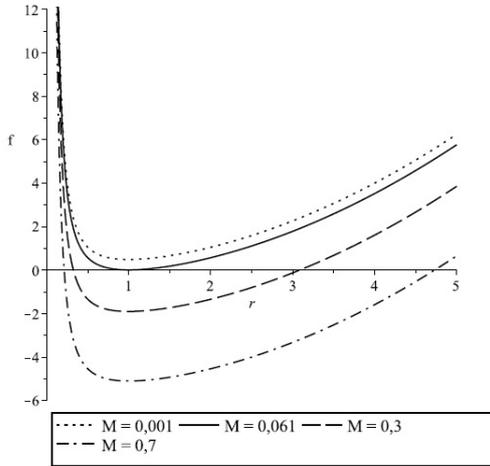


Figura 3.1: Gráfico $f(r)$ para alguns valores de M , com $J = 1$, $a = 0,1$ e $l = 2$. A massa e o raio do Buraco Negro Extremo são $M_0 \approx 0,061$ e $r_0 \approx 0,99$.

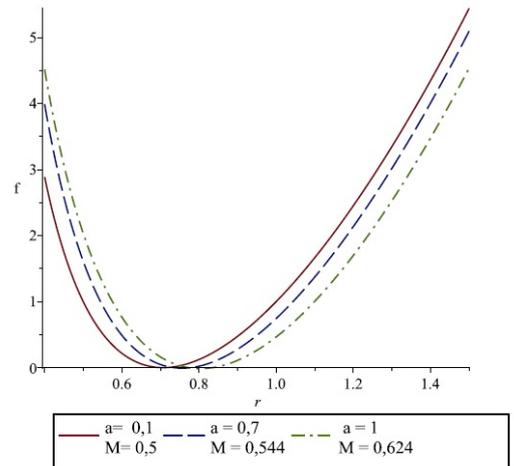


Figura 3.2: Gráfico de $f(r)$ para os conjuntos de valores $(a = 0,1, M = 0,5)$, $(a = 0,7, M = 0,544)$ e $(a = 1, M = 0,624)$, com $l = 0,5$ e $J = 2$.

3.2 Cálculo das variáveis termodinâmicas no Buraco Negro com comprimento mínimo

Em 1972, o físico Jacob Bekenstein propôs que o Horizonte de Eventos seria uma medida da entropia de um Buraco Negro. Porém, verificou-se que se o Horizonte de Eventos fosse realmente uma medida de sua entropia, ele deveria emitir radiação, algo impossível para um Buraco Negro, já que tudo que entra não pode sair.

Este paradoxo permaneceu até 1974, quando Hawking [19] verificou que haveria uma possibilidade de o Horizonte de Eventos ser uma medida da Entropia de um Buraco Negro, sem mesmo precisar-se emitir diretamente uma determinada radiação. Segundo ele, como não existe um vácuo absoluto, de acordo com os limites impostos pelo Princípio da Incerteza de Werner Heisenberg, então existem vários pares de partículas virtuais interagindo entre si em torno de um Buraco Negro, nos quais a energia positiva de uma partícula cancela a energia negativa da outra, e vice-versa. A partícula de energia negativa seria atraída pela gravidade fortíssima do Buraco Negro e cairia dentro dele, liberando sua parceira de energia positiva para o espaço exterior. A energia negativa da partícula dentro do Buraco Negro diminuiria parte de sua massa, já que cancelaria parte da energia positiva da massa do Buraco Negro. A partícula de energia positiva liberada pareceria que como se emitida pelo Buraco Negro, para um observador distante no espaço. Ou seja, a partícula de energia positiva não viria diretamente do Buraco Negro, como pensado pelo observador externo, mas do espaço exterior a ele mesmo. Desse modo, a idéia de Vácuo quântico resolve esse problema, admitindo que o Horizonte de Eventos seja uma medida da Entropia de um Buraco Negro.

A radiação de um Buraco Negro é chamada de Radiação de Hawking, em homenagem ao físico britânico Stephen William Hawking, que demonstrou teoricamente como tais corpos emitiam tal radiação.

Nesta seção, encontraremos as variáveis associadas à termodinâmica do Buraco Negro com um comprimento mínimo.

- **Temperatura Hawking**

A temperatura do Buraco Negro é dada por:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r_H} \Rightarrow T_H = \frac{r_H}{2\pi l^2} \left[1 - \frac{J^2 l^2}{4r_H^4} - \frac{64Ml^2}{a^2} \exp\left(\frac{-4r_H}{a}\right) \right]. \quad (3.7)$$

Usando o fato que a função $f(r)$ é nula no horizonte de eventos, podemos escrever a massa M em termos de r_H , isto é,

$$M = \frac{\frac{r_H^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r_H^2}}{8 \left[1 - \left(1 + \frac{4r_H}{a} \right) \exp\left(-\frac{4r_H}{a}\right) \right]}. \quad (3.8)$$

Logo, substituindo esta expressão em (3.7), obtemos a temperatura em função de r_H :

$$T_H = \frac{r_H}{2\pi l^2} \left\{ 1 - \frac{J^2 l^2}{4r_H^4} - \frac{8l^2}{a} \frac{\frac{r_H^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r_H^2}}{\left[a \exp\left(\frac{4r_H}{a}\right) - 4r_H - a \right]} \right\}. \quad (3.9)$$

Para entendermos o resultado apresentado pela equação (3.9), traçamos, na figura 3.3, as curvas da temperatura Hawking em função de r_H para diferentes valores do parâmetro a . Além disso, na figura 3.4 fizemos uma comparação entre comportamentos das temperaturas dos Buracos Negros BTZNC e BTZ com comprimento mínimo.

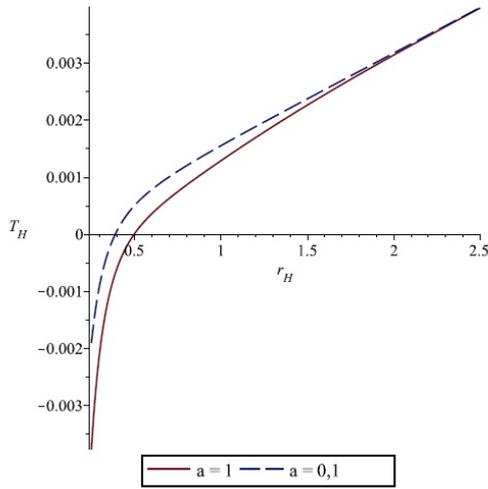


Figura 3.3: T_H como uma função de r_H para um Buraco Negro de comprimento mínimo, nos casos em que $a = 1$ e $a = 0,1$. Em ambas as situações, consideramos $l = 10$ e $J = 0,03$.

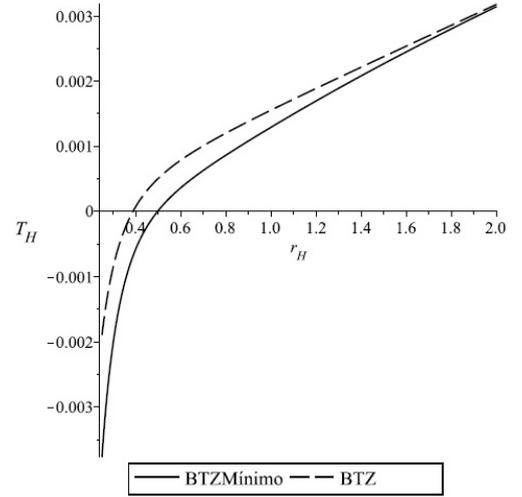


Figura 3.4: T_H como uma função de r_H para um Buraco Negro BTZNC de comprimento mínimo em comparação com um Buraco Negro BTZ. Nos dois casos, consideramos $l = 10$ e $J = 0,03$.

Conforme mostra a figura 3.3, abaixo de um determinado valor de r_H , denominado raio mínimo, r_0 , a temperatura do Buraco Negro BTZNC de comprimento mínimo se tornaria

negativa. Porém, como T_H não pode ser negativo, entendemos que há um raio de horizonte mínimo que o Buraco Negro poderá assumir. Na verdade, devido a radiação e a evaporação, o Buraco Negro esfriará e o raio do horizonte se reduzirá. Contudo, quando o valor r_0 for atingido, esse processo se encerrará e sua temperatura será nula. Ainda de acordo com a figura 3.3, uma vez que as linhas sólidas e tracejadas estão relacionadas ao Buraco Negro de comprimento mínimo com $a = 1$ e $a = 0, 1$, respectivamente, podemos concluir que o valor de r_0 aumenta com o crescimento da constante a .

Vale salientar que o valor de r_0 , obtido a partir da imposição da condição $T_H = 0$, é o mesmo que obteríamos caso considerássemos que, no horizonte mínimo, $f = 0$ e $\partial_r f = 0$.

Analisando as curvas da figura 3.4, percebemos que, quando r_H é muito grande, as temperaturas dos Buracos Negros BTZ e BTZ de comprimento mínimo são aproximadamente iguais. Dito de outra forma, quando a massa é muito grande, os efeitos da não-comutatividade torna-se imperceptíveis.

• Entropia

Agora vamos calcular e investigar a entropia do Buraco Negro com um comprimento mínimo. Para isso, exigimos que a primeira lei seja satisfeita, $dM = T_H dS_H + \Omega dJ$, onde Ω é a velocidade angular do buraco negro. Por outro lado, como as quantidades físicas estão sendo avaliadas no horizonte de eventos, M pode ser expresso em termos de $M = M(r_H, J)$ e dM se torna $dM = \frac{\partial M}{\partial r_H} dr_H + \frac{\partial M}{\partial J} dJ$. A partir das duas formas diferentes de dM , encontramos $dS_H = \frac{1}{T_H} \frac{\partial M}{\partial r_H} dr_H$. Diante disso, vamos definir a entropia do Buraco Negro como:

$$S = \int_{r_0}^{r_H} \frac{1}{T_H} \frac{\partial M}{\partial r_H} dr_H, \quad (3.10)$$

em que $S = 0$ no horizonte mínimo r_0 (onde a massa do Buraco Negro é minimizada).

Então, substituindo (3.8) e (3.9) na equação acima, encontramos a entropia do Buraco Negro BTZNC, a qual é dada por:

$$S = \frac{\pi}{2} \int_{r_0}^{r_H} \frac{dr_H}{1 - \left(1 + \frac{4r_H}{a}\right) \exp\left(-\frac{4r_H}{a}\right)}. \quad (3.11)$$

A entropia de Bekenstein-Hawking ou entropia do Buraco Negro, a qual é dada por $S_{BH} = \frac{\pi}{2}r_H$, é a quantidade de entropia que deve ser atribuída a um Buraco Negro para cumprir as leis da termodinâmica.

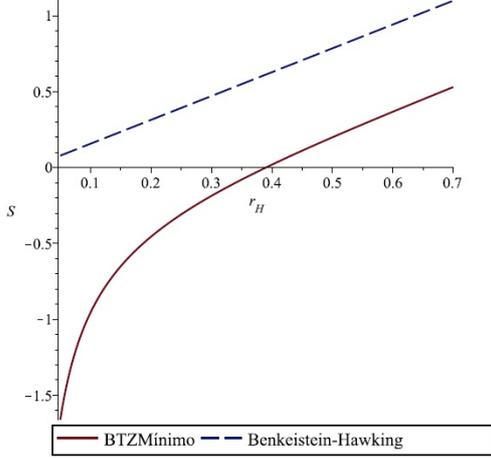


Figura 3.5: Entropia vs r_H . Entropia do Buraco Negro BTZ de comprimento mínimo com $a = 1$ e $l = 10$.

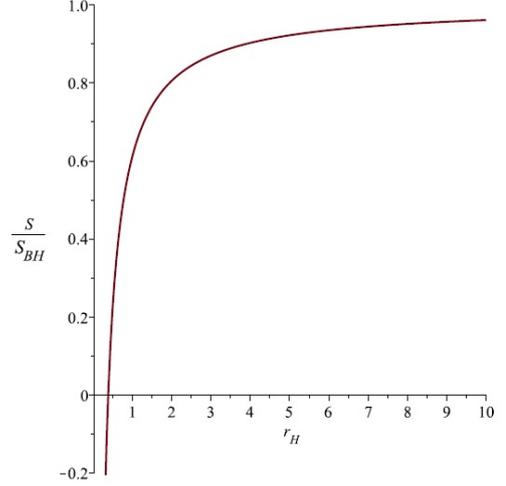


Figura 3.6: Entropia de Bekenstein-Hawking vs r_H .

Nas figuras 3.5 e 3.6, comparamos o resultado que encontramos para entropia com a de Bekenstein-Hawking. Nelas, vemos que, para determinados valores de r_H , a entropia do BTZ de comprimento mínimo torna-se negativa. Porém, como a entropia não pode assumir valores negativos, entendemos que o valor de r_H , para o qual ela se anula, corresponde ao raio de horizonte mínimo. Naturalmente, esta característica reforça a nossa argumentação anterior. Outro aspecto que pode ser observado nestas figuras é que, a medida que o raio do horizonte aumenta, os valores da entropia do Buraco Negro BTZ de comprimento mínimo se aproximam daqueles previstos pela entropia de Bekenstein-Hawking. Isto evidencia o fato que, para grandes valores de r_H , isto é, massas grandes, os efeitos da não-comutatividade se tornam desprezíveis.

• Capacidade Térmica

Para verificar a estabilidade do Buraco Negro BTZ de comprimento mínimo, calculamos a capacidade térmica, a qual é dada por

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\partial M}{\partial r_H} \left(\frac{\partial T}{\partial r_H} \right)^{-1}. \quad (3.12)$$

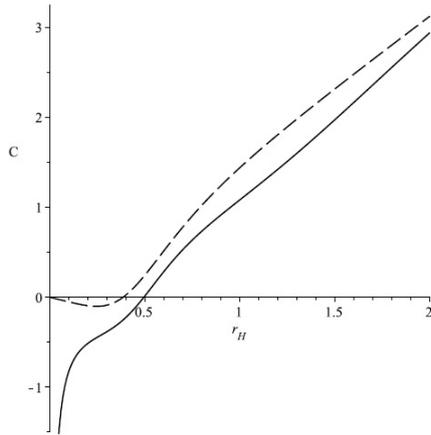


Figura 3.7: Capacidade térmica em função de r_H . A linha sólida representa o Buraco Negro BTZ de comprimento mínimo e a pontilhada representa o buraco negro BTZ com $a = 0,1$. Em ambos os casos adotamos $l = 10$ e $J = 0,03$.

A figura 3.7 nos mostra o comportamento do nosso cálculo numérico para a capacidade térmica. Podemos observar que esta desaparece no horizonte de eventos extremos $r_0 \approx 0,4888$ para $l = 10$, $a = 0,1$ e $J = 0,03$, tornando-se negativo quando $r_H < r_0$. No entanto, como esta região não é fisicamente permitida, pela definição dos raios do horizonte, a capacidade é positiva para $r_H > r_0$, o que faz com que o Buraco Negro BTZNC seja estável.

3.3 Análise do movimento geodésico do Buraco Negro de comprimento mínimo

Nesta seção, analisaremos o movimento geodésico, como já fora explicado, porém iremos voltar esse estudo para o espaço-tempo no qual está localizado o Buraco Negro BTZ. Além do mais, para simplificar os cálculos, admitiremos que não existe rotação, isto é, consideraremos $J = 0$.

De acordo com [39], as geodésicas são obtidas ao resolvermos as equações:

$$2K = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (3.13)$$

e

$$\frac{\partial K}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0, \quad (3.14)$$

onde $\dot{x} \equiv dx^\mu/du$, sendo $u = \tau$ (tempo próprio). Vale salientar que, nos intervalos tipo-tempo e tipo-luz, $2K$ será igual a -1 e 0 , respectivamente.

Uma vez que estamos supondo que não existe rotação, o elemento de linha (3.4) assumirá a seguinte forma:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\varphi^2, \quad (3.15)$$

em que

$$f(r) = -8\mathcal{M} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (3.16)$$

Usando este fato, a equação (3.13) nos leva a:

$$K = \frac{1}{2} [-f\dot{t}^2 + f^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2]. \quad (3.17)$$

Logo, utilizando a expressão acima em (3.14), para os casos em que $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, obtemos:

$$\dot{t} = \frac{E}{f} \quad \text{e} \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}, \quad (3.18)$$

onde E e L são constantes.

Finalmente, substituindo as equações (3.18) em (3.13), chegamos à:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{eff} = \frac{E^2}{2}, \quad (3.19)$$

em que:

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left\{ -8M \left[1 - \frac{(4r+a)}{a} \exp\left(\frac{-4r}{a}\right) \right] + \frac{r^2}{l^2} \right\} \left(\frac{L^2}{r^2} - 2K \right). \quad (3.20)$$

A equação (3.19) pode ser interpretada como a equivalente da conservação da energia da gravitação Newtoniana, com um potencial efetivo dado por pela expressão (3.20). Sendo assim, a partir do gráfico do potencial efetivo, podemos fazer uma análise qualitativa do movimento.

A curva do potencial efetivo para geodésicas tipo-luz se aproxima, assintoticamente, de $L^2/2l^2$. Isto significa que, se o fóton possuir uma energia menor que esse valor, tenderá

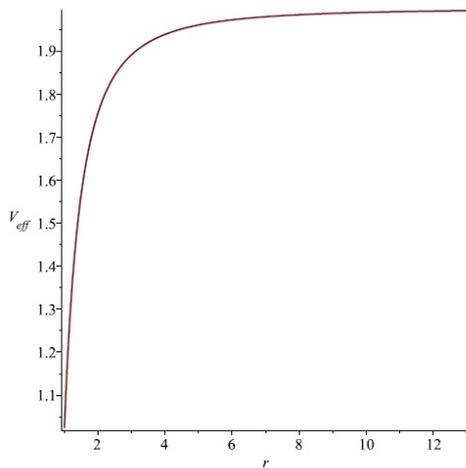


Figura 3.8: V_{eff} vs r . Potencial efetivo para geodésicas tipo-luz.

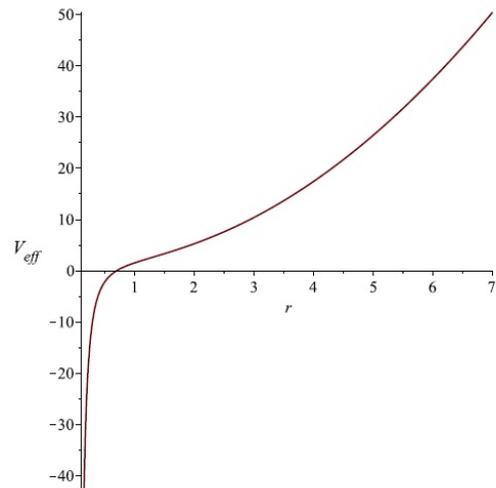


Figura 3.9: V_{eff} vs r . Potencial efetivo para geodésicas tipo-tempo.

à singularidade. Por outro lado, se sua energia for maior que $L^2/2l^2$, poderá seguir para o infinito ou ser absorvido pela singularidade. No que se refere à órbitas tipo-tempo, a figura mostra que, independente da sua energia, a partícula cairá na singularidade. Isso mostra que a configuração descrita pela métrica BTZ de comprimento mínimo, mesmo sem o efeito da rotação, caracteriza um Buraco Negro.

Capítulo 4

Conclusões

Para o desenvolvimento deste trabalho, consideramos as idéias propostas pelos pesquisadores Bañados, Teitelboim e Zanelli que obtiveram uma métrica, nomeada com as iniciais de seus nomes, respectivamente, para Buracos Negros em $(2+1)$ -dimensões. Esse tipo de estudo é relevante pelo fato de servir como um bom laboratório e relativamente simples, que propiciará a compreensão das propriedades de um Buraco Negro a nível quântico que permanecem, até agora, um mistério.

Também nos ancoramos nas idéias propostas por Hawking, 1976, sobre radiação emitida por Buracos Negros, onde mostra que algumas propriedades como a área do horizonte de eventos, a massa e a gravidade superficial têm equivalências diretas com propriedades termodinâmicas, a entropia, a energia e a temperatura, respectivamente. No decorrer de nosso estudo, analisamos correções quânticas para estas propriedades termodinâmicas de Buracos Negros num plano de fundo não-comutativo.

Com a finalidade de incluirmos uma solução BTZ com um comprimento mínimo a partir da densidade de superfície obtido do átomo de hidrogênio, analisamos essa distribuição para investigamos as propriedades termodinâmicas para este tipo de Buraco Negro e avaliamos o movimento geodésico nesse espaço tempo. No que se refere às variáveis termodinâmicas, verificamos que os comportamentos das temperatura Hawking (3.3) e (3.4) podemos comparar nossos resultado com o já conhecido na literatura e podemos perceber que a medida que o raio aumenta ambos tendem ao mesmo valor,

na entropia (3.5) e (3.6) comparamos o resultado que encontramos para entropia com a de Bekenstein-Hawking onde vemos que, para determinados valores de r_H , a entropia do BTZ de comprimento mínimo assume um valor para o qual ela não seja nula, correspondente ao raio de horizonte mínimo e capacidade térmica (3.7) é positiva, o que garante que o Buraco Negro BTZ com um comprimento mínimo seja estável, dentro da região fisicamente permitida. Esses resultados indicam que há uma massa mínima para que possa existir um Buraco Negro. Além disso, na situação em que a massa é muito grande, os efeitos do comprimento mínimo, no qual se assemelha ao não-comutatividade, tornam-se imperceptíveis.

Com respeito ao movimento geodésico, mesmo desconsiderando a rotação, os movimentos tipo-luz (3.19) e tipo-tempo (3.20) mostraram que, de fato, a configuração de espaço-tempo descrita pela métrica BTZ com um comprimento mínimo representa um Buraco-Negro.

Futuras investigações, poderiam acrescentar carga e ponderar o comportamento para esse tipo de Buraco Negro, observando se ele permanece estável, através das variáveis termodinâmicas, assim como o comportamento geodésico.

Referências Bibliográficas

- [1] FERRARO, Rafael. **Einstein's Space-Time:** An Introduction to Special and General Relativity. Universidad de Buenos Aires: Springer Science e Business Media, 2007. 310 p.
- [2] BAÑADOS, Máximo; TEITELBOIM, Claudio; ZANELLI, Jorge. Black hole in three-dimensional spacetime. **Physical Review Letters**, v. 69, n. 13, p.1849-1851, 28 set. 1992. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.69.1849>.
- [3] MALDACENA, Juan. The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity **International Journal of Theoretical Physics**, [s.l.], v. 38, n. 4, p.1113-1133, 1999. Springer Nature. <http://dx.doi.org/10.1023/a:1026654312961>.
- [4] Ashtekar, Abhay; Bojowald, Martin; Lewandowski, Jerzy. Mathematical structure of loop quantum cosmology. **Adv. Theor. Math. Phys.** 7 (2003), no. 2, 233–268. <https://projecteuclid.org/euclid.atmp/1112627633>.
- [5] SZABO, R. J. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces. **Physics Reports**, v. 378, ed. 4, p. 207-299, mai. 2003. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/s0370-1573\(03\)00059-0](http://dx.doi.org/10.1016/s0370-1573(03)00059-0).
- [6] BAÑADOS, M. et al. Chern-Simons formulation of noncommutative gravity in three dimensions. **Physical Review D**, v. 64, set. 2001. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.64.084012>.

- [7] ANACLETO, M. A.; BRITO, F., A.; PASSOS, E. Gravitational Aharonov-Bohm Effect Due to Noncommutative BTZ Black Hole. **Physics Letters B**, v. 743, p. 184-188, 2015.
- [8] SADEGHI, Jafar et al. Effective Potential in Noncommutative BTZ Black Hole. **International Journal Of Theoretical Physics**, [s.l.], v. 55, n. 2, p.892-900, 7 jul. 2015. Springer Nature. <http://dx.doi.org/10.1007/s10773-015-2732-x>.
- [9] Landau, L. D.; Lifschitz, E. M. (1971). **Classical Theory of Fields. Course of Theoretical Physics.**, Vol. 2 (3rd ed.). London: Pergamon. ISBN 0-08-016019-0.
- [10] **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.
- [11] DELBEM, N. F. **INTRODUÇÃO MATEMÁTICA AOS MODELOS COSMOLÓGICOS**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus de Rio Claro-SP, 2010, 144p.
- [12] CARROLL, S. M. **LECTURE NOTES ON GENERAL RELATIVITY**. Santa Bárbara: University of California, 1997.
- [13] LETELIER, P. S. **Soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial**. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2005, vol.27, n.1, pp.121-136. ISSN 1806-1117. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172005000100015>.
- [14] FROLOV, V. P. NOVIKOV, I. D. **Black Hole Physics: ASIC CONCEPTS AND NEW DEVELOPMENTS**. Springer Science and Business Media, Netherlands, 1998.
- [15] CRUZ, Norman; MARTÍNEZ, Cristián; PEÑA, Leda. Geodesic structure of the $(2 + 1)$ -dimensional BTZ black hole. **Classical And Quantum Gravity**, [s.l.], v. 11, n. 11, p.2731-2739, 1 nov. 1994. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/11/11/014>.

- [16] BAÑADOS, Máximo et al. Geometry of the 2+1 black hole. **Physical Review D**, [s.l.], v. 48, n. 4, p.1506-1525, 15 ago. 1993. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.48.1506>.
- [17] BAÑADOS, M. et al. Chern-Simons formulation of noncommutative gravity in three dimensions. **Physical Review D**, v. 64, set. 2001.
- [18] BARDEEN, J. M., CARTER, B.; HAWKING, S. W. THE FOUR LAWS OF BLACK HOLE MECHANICS. **COMMUN. Math. Phys.** 31, 161(1973).<https://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103858973>
- [19] HAWKING, S. W. Black Holes and Thermodynamics. **Physical Review D**, [s.l.], v. 13, n. 2, p.191-197, 15 jan. 1976. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.13.191>.
- [20] EKENSTEIN, Jacob D. et al. Black Holes and Entropy. **Physical Review D**, [s.l.], v. 7, n. 8, p.2333-2346, 15 abr. 1973. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.7.2333>.
- [21] WALD, R. M. **Black Holes and Relativistic Stars** University of Chicago Press, 1998.
- [22] SPALLUCCI, Euro et al. Non-commutative geometry inspired higher-dimensional charged black holes. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 670, n. 4-5, p.449-454, jan. 2009. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2008.11.030>.
- [23] ARKANI-HAMED, Nima et al. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 429, n. 3-4, p.263-272, jun. 1998. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/s0370-2693\(98\)00466-3](http://dx.doi.org/10.1016/s0370-2693(98)00466-3).
- [24] ALBERGHI, G. L.; CASADIO, R.; GALLI, D.; GREGORI, D.; TRONCONI, A.; VAGNONI, V. PROBING QUANTUM GRAVITY EFFECTS IN BLACK HOLES AT LHC. **Journal Of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, [s.l.], v. 34,

- n. 4, p.767-778, 16 mar. 2007. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/34/4/012>.
- [25] CASANOVA, Alex; SPALLUCCI, Euro. TeV mini black hole decay at future colliders. **Classical And Quantum Gravity**, [s.l.], v. 23, n. 3, p.45-62, 10 jan. 2006. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/23/3/r01>.
- [26] SZABO, R. J. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces. **Physics Reports**, [s.l.], v. 378, n. 4, p.207-299, maio 2003. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/s0370-1573\(03\)00059-0](http://dx.doi.org/10.1016/s0370-1573(03)00059-0).
- [27] NICOLINI, Piero; SMAIAGIC, Anais; SPALLUCCI, Euro. Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 632, n. 4, p.547-551, jan. 2006. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2005.11.004>.
- [28] NICOLINI, Piero. NONCOMMUTATIVE BLACK HOLES, THE FINAL APPEAL TO QUANTUM GRAVITY: A REVIEW. **International Journal Of Modern Physics A**, [s.l.], v. 24, n. 07, p.1229-1308, 20 mar. 2009. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s0217751x09043353>.
- [29] MAJUMDER, Barun. Black hole entropy with minimal length in tunneling formalism **General Relativity And Gravitation** , [s.l.], v. 45, n. 11, p.2403-2414, 20 ago. 2013. Springer Nature. <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-013-1581-2>.
- [30] TEDESCO, D. G, **Um Estudo Sobre a Teoria de Campos no Espaço-Tempo não-Comutativo**. 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual do Rio de Janeiro - RJ.
- [31] ANACLETO, M. A. **Correção Não-comutativa para o efeito Aharonov-Bohm: Uma abordagem da Teoria Quântica de Campos**. São Paulo, 2004. Tese(Doutoramento) – Universidade de São Paulo – Dept. de Física Matemática.
- [32] DIRAC, Paul Adrien Maurice. **Lectures on Quantum Mechanics**. 2. ed. Yeshiva University: Belfer Graduate School Of Science, 1964. 87 p.

- [33] NICOLINI, Piero; SMAILAGIC, Anais; SPALLUCCI, Euro. Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole. **Physics Letters B**, [s.l.], v. 632, n. 4, p.547-551, jan. 2006. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2005.11.004>.
- [34] WEI, S.-H. et al.WEI, Shao-wen et al. Area spectrum of Schwarzschild black hole inspired by noncommutative geometry. **ArXiv**, [s.l.], abr. 2010.
- [35] KIM, Wontae; SON, Edwin J; YOON, Myungseok. Thermodynamics of a black hole based on a generalized uncertainty principle. **Journal Of High Energy Physics**, [s.l.], v. 2008, n. 01, p.035-035, 14 jan. 2008. Springer Nature.
- [36] RAHAMAN, Farook et al. BTZ black holes inspired by noncommutative geometry. **Physical Review D**, [s.l.], v. 87, n. 8, 4 abr. 2013. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.87.084014>.
- [37] TEDESCO, D. G, **Um Estudo Sobre a Teoria de Campos no Espaço-Tempo não-Comutativo**. 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual do Rio de Janeiro - RJ.
- [38] BEMFICA, F. S., **Dinâmica Quântica de Sistemas Não-Comutativos**. 2009. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul - RS.
- [39] D'INVERNO, R. A., **Introducing Einstein's Relativity**. New York, 1992.