



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Buraco Negro Acústico e Efeito Aharonov-Bohm  
Análogo**

**José André Vieira Campos**

CAMPINA GRANDE

- Julho 2018 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Buraco Negro Acústico e Efeito Aharonov-Bohm**  
**Análogo**

**José André Vieira Campos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto.

CAMPINA GRANDE

- Julho 2018 -

C198b

Campos, José André Vieira.

Buraco negro acústico e efeito Aharonov-Bohm análogo / José André Vieira Campos. - Campina Grande, 2018.

61 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.

"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto".

Referências.

1. Modelo Análogo. 2. Vórtice de Drenagem. 3. Efeito Aharonov-Bohm. I. Anacleto, Marcos Antônio. II. Título.

CDU 524.882(043)

**JOSÉ ANDRÉ VIEIRA CAMPOS**

**BURACO NEGRO ACÚSTICO E EFEITO AHARONOV-BOHM ANÁLOGO**

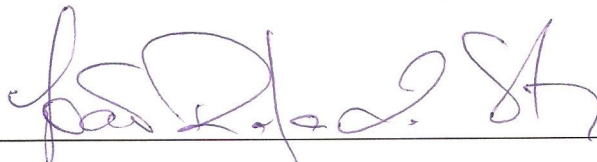
Dissertação aprovada em 23/07/2018

**BANCA EXAMINADORA**



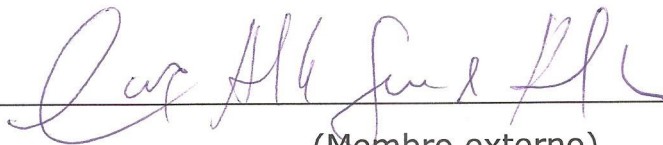
(Presidente)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida  
Departamento de Ciências Exatas – UFPB

Para meu pai João Monteiro (*in memoriam*)

*Nada neste mundo é para ser temido... somente  
compreendido.*

- Marie Sklodowska (Madame Curie)

# Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida e condições para que eu conseguisse cumprir mais uma importante etapa da minha vida.

Ao Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto, pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho.

À todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica e todos os funcionários da Unidade Acadêmica de Física.

Aos amigos do departamento pelas discussões de Física, momentos de lazer e que propiciaram que o ambiente fosse agradável para realização do trabalho.

A minha família em especial minha mãe Edileusa e meu irmão Rodrigo, pelo o apoio incondicional e encorajamento constante, em todas as etapas da minha vida.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão da bolsa.

# Lista de Figuras

3.1	Solenóide extremamente longo, onde o vetor campo magnético é uniforme no seu interior e zero em qualquer ponto externo. Nas proximidades do solenóide temos uma partícula com carga $q$ .	17
3.2	Experimento Aharonov-Bohm: dois feixes $\Psi_1$ e $\Psi_2$ passam por lados opostos de um solenóide longo, os feixes são recombinadas do outro lado do solenóide.	19
4.1	Coefficiente de reflexão em função de $\omega$ para $m = 1$ (a) e $m = 2$ (b). As curvas correspondem aos diferentes valores de $C/D$ . Os gráficos mostram que o coeficiente de reflexão decai exponencial da frequência crítica para superradiância.	32
4.2	Coefficiente de reflexão em função de $\omega$ para $C = 0$ (sem rotação) (a) a absorção $\sigma_{abs}$ em função de $\omega$ correspondente a cada reflexão (b). As curvas correspondem aos diferentes valores do ângulo azimutal $m$ de 0 até 5. Em (b) é possível observar (curva pontilhada) que a absorção total converge para o limite de altas frequências.	36
4.3	Vórtice de espalhamento para baixas frequências, efeito análogo (vermelha e cinza) e efeito AB quântico (preto tracejado). Sem drenagem o efeito análogo fica simétrico ao efeito quântico, quando é inserido um valor de drenagem a simetria é perdida.	37
5.1	Reflexão para os modos de $m = 1$ e $m = 2$ com diferentes valores de $\lambda$ , as linhas tracejadas referi-se ao efeito sem a contribuição de $\lambda$ . Conforme aumentamos o valor de $\lambda$ o intervalo de frequência onde ocorre o efeito de superradiância diminui para os dois casos.	45
5.2	Vórtice de espalhamento para baixas frequências para os diferentes valores de $\lambda$ , as linhas tracejadas referem ao efeito sem a contribuição de $\lambda$ . O gráfico em (a) mostra o efeito sem drenagem e (b) o efeito com drenagem.	48
5.3	Absorção em função da frequência angular para um buraco acústico (2+1)dimensões para $m = 0$ . Temos o aumento da absorção de acordo com que aumentamos o valor de $\lambda$ .	49



5.4 Do lado esquerdo a absorção para o caso sem circulação  $C = 0$  e no lado direito e admitido uma circulação  $C = 0.5$ . Analisado os módulos  $m = 1$  e  $m = 2$ , o efeito de superradiância é perceptível no gráfico (b) onde vemos valores negativos na absorção. . 50

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos um modelo análogo de gravitação, introduzido por William George Unruh em 1981, conhecido como buraco negro acústico baseado na propagação do som em um superfluido. Verificamos o comportamento das equações de fluido em um vórtice de drenagem ou “draining bathtub” (banheira de drenagem) onde é possível estudar fenômenos que ocorrem em um buraco negro, como aqueles que são descritos por Kerr na relatividade geral. O trabalho inicia com uma revisão sobre buracos negros acústicos descrevendo a métrica para este caso, seguindo com um estudo sobre o efeito Aharonov-Bohm onde analisamos a teoria do espalhamento para este efeito. Apresentamos também uma análise da métrica acústica, para um vórtice de drenagem, utilizando as condições assintóticas encontramos a solução analítica para a equação radial obtida a partir da métrica. Com estes resultados estudamos fenômenos como superradiância, espalhamento e seção de choque de espalhamento diferencial por um vórtice drenante, comparando estes resultados com o espalhamento obtido para o efeito Aharonov-Bohm. Realizamos uma análise numérica, onde é possível verificar graficamente estes efeitos. Considerando o modelo abeliano de Higgs com termos de altas derivadas, montamos uma nova métrica e considerando o caso não-relativístico, verificamos que a seção de choque de espalhamento diferencial e a absorção são modificados por um termo extra.

Palavras-chave: Modelo análogo, Vórtice de drenagem, Efeito Aharonov-Bohm.

# Abstract

In this dissertation we studied an analogue model of gravitation introduced by William George Unruh in 1981, known as an acoustic black hole based on the propagation of sound in a superfluid. We verify the behavior of the fluid equations in a draining bathtub, where it is possible to study phenomena that occur in a black hole, such as those described by Kerr in general relativity. The work begins with a review on acoustic black holes describing the metric for this case, followed by a study on the Aharonov-Bohm effect where we analyze the scattering theory for this effect. We also present an analysis of the acoustic metric, for a draining bathtub, from the asymptotic conditions we find the analytical solution for the radial equation obtained from the metric. With these results we studied phenomena such as superradiance, scattering and differential scattering cross section by a draining vortex, comparing these results with the scattering obtained for the Aharonov-Bohm effect. We perform a numerical analysis, where it is possible to check these effects graphically. Considering the Abelian Higgs model with terms of high derivatives, we set up a new metric and considering the non-relativistic case, we find that the differential scattering cross section and the absorption are modified by an extra term.

Keywords: Analogue model, Draining bathtub, Aharonov-Bohm effect.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Buraco negro acústico</b>	<b>5</b>
2.1	Dinâmica dos fluidos . . . . .	6
2.1.1	Equações fundamentais . . . . .	6
2.1.2	Flutuações . . . . .	7
2.2	Geometria de Lorentz . . . . .	9
2.3	Ergo-região e horizonte acústico . . . . .	12
2.4	Geometria do vórtice . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Efeito Aharonov-Bohm</b>	<b>16</b>
3.1	Efeito Aharonov-Bohm quântico . . . . .	16
3.2	Teoria do espalhamento . . . . .	20
3.3	Amplitude de espalhamento e seção de choque . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Efeito Aharonov-Bohm em um vórtice de drenagem</b>	<b>27</b>
4.1	Equações básicas . . . . .	27
4.1.1	Espaço-tempo efetivo . . . . .	28
4.1.2	Coordenadas tortoise . . . . .	29
4.2	Superradiância . . . . .	31
4.3	Efeito Aharonov-Bohm análogo . . . . .	32
4.3.1	Teoria do espalhamento em duas dimensões . . . . .	32
4.3.2	Deslocamento de fase aproximado . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Efeito Aharonov-Bohm análogo modificado</b>	<b>38</b>
5.1	Modelo . . . . .	38

5.2	Buraco negro acústico para nova métrica . . . . .	40
5.3	Desenvolvimento analítico . . . . .	45
5.4	Resultados numéricos . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas futuras</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>Solução que transforma a equação radial</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Método computacional</b>	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das previsões mais fascinantes da teoria da relatividade geral de Einstein é a potencial existência de buracos negros, ou seja, regiões do espaço-tempo das quais nada é capaz de escapar. Essa idéia de corpos supermassivos foi proposto muito antes por John Michell em uma carta publicada em 1784 [1] com base na física Newtoniana supôs que tal corpo poderia ter a mesma densidade que o Sol, e concluiu que tal corpo se formaria quando o diâmetro de uma estrela exceder a do Sol por um fator de 500, e a velocidade de escape da superfície excede a velocidade usual da luz. Michell observou corretamente que tais corpos supermassivos, mas não radiantes, poderiam ser detectados através da interação de seus efeitos gravitacionais em corpos visíveis próximos. Por mais que a ideia de Michell tenha animado estudiosos da época, esse conceito não foi muito aceito principalmente no início do século XIX quando a natureza ondulatória da luz se tornou aparente [2]. Pois se a luz fosse uma onda, em vez de um "corpúsculo", não ficava clara a influência da gravidade sobre a fuga de ondas de luz.

Só em 1915, isto se tornaria mais claro com o desenvolvimento da teoria da relatividade geral de Albert Einstein, mostrando que a gravidade poderia ser interpretada como uma deformidade da geometria do espaço-tempo, associando a ele uma curvatura que influencia a trajetória de qualquer partícula. Pouco tempo depois uma solução das equações de campo de Einstein foi proposta por Karl Schwarzschild que descreve o campo gravitacional de uma massa pontual e uma massa esférica [3]. Ele demonstrou a existência de uma singularidade na sua métrica onde toda matéria poderia se concentrar em um único ponto criando uma região de volume nulo e densidade infinita, também percebeu que em uma determinada região ao redor deste ponto, surge outra singularidade que ficou

conhecida como raio de Schwarzschild. Esta última singularidade foi removida em 1958 por David Finkelstein [4] introduzindo um novo sistema de coordenadas ele verificou que, do ponto de vista de um observador se movendo juntamente com a superfície da estrela, é possível atingir e ultrapassar o raio de Schwarzschild em um tempo finito. Assim o que antes pensava ser uma singularidade passa a ser chamado de horizonte de eventos, ou seja, um limite no espaço-tempo, além do qual os eventos não podem afetar um observador externo. Desta forma voltava a ideia de objetos altamente densos e que seriam invisíveis por não conseguir emitir sinais luminosos devido o horizonte de eventos.

Desde então, soluções das equações de campo de Einstein têm sido estudadas, sendo a métrica de Schwarzschild considerada a solução de vácuo esfericamente simétrica mais geral das equações de campo de Einstein, por considerar um buraco negro estático sem carga elétrica nem momento angular. A solução correspondente para um corpo carregado, esférico e não rotativo, foi descoberta por Hans Reissner [5] e Gunnar Nordström [6] conhecida como métrica de Reissner-Nordström. Como descrito essas soluções admitiam um buraco negro estático, mas em 1963 Roy Kerr [7] encontrou uma solução exata para as equações de campo de Einstein considerando agora um buraco negro rotativo sem carga, posteriormente Ezra T. Newman [8, 9] generalizou a métrica de Kerr, incluindo a carga.

Muitos trabalhos foram desenvolvidos como o objetivo de conhecer ainda mais a física dos buracos negros, hoje são realizados experimentos com resultados fascinantes como a detecção de ondas gravitacionais pelo LIGO [10, 11]. Algumas décadas atrás a tecnologia não permitia tais detecções e um outro caminho para estudar os buracos negros foi descoberto em 1981 pelo físico canadense William George Unruh [12], quando notou que ondas sonoras se propagando em um fluido em movimento se comportavam semelhante à luz sob a influência de um campo gravitacional. Portanto, ele percebeu que se tivermos um sistema acústico em que o fluido ultrapasse a velocidade do som, poderia ser criado um horizonte de eventos acústico. Isso permitiu a criação de modelos acústicos análogos aos buracos negros da relatividade. Um modelo análogo mais simples que exhibe tanto um horizonte quanto uma ergoregião (é a região externa e próxima ao horizonte de eventos de um buraco negro em rotação) é conhecido como vórtice de drenagem ou draining bathtub (banheira de drenagem) [13, 14]. Este modelo é caracterizado por um fluxo bidimensional com um sumidouro na origem, em um fluido que é considerado barotrópico, não viscoso e no qual o fluxo é localmente irrotacional.

Um efeito interessante ocorre quando temos um vórtice sem drenagem algo que foi estudado tanto no contexto clássico em dinâmica dos fluidos [15] como no contexto quântico tal como em superfluidez observada nos condensados de Bose-Einstein [16]. Neste tipo de fenômenos temos fônons propagando em um vórtice que estão sujeitos ao efeito Aharonov-Bohm [17]. Berry ete al. [18] verificaram esse efeito experimentalmente ao passar cristas de onda de água por um vórtice não rotativo dando origem a diferentes forças de deslocamento de frentes de onda. Outros fenômenos que podem ocorrer quando adicionado uma componente de drenagem em um vórtice são a superradiância e a absorção. Experimentos mais recentes realizados na Universidade de Nottingham, no Reino Unido [19] pela equipe liderada por Theo Torres observaram que ondas planas que se propagam na superfície da água são amplificadas após serem espalhadas por um vórtice drenante.

Nesta dissertação pretendemos abordar algumas características que descrevem o comportamento dos buracos negros acústicos. A revisão teórica está voltada mais precisamente para o modelo que imita um buraco negro de Kerr, ou seja, com rotação em  $(2 + 1)$  dimensões. Esse tipo de modelo possibilita estudar alguns fenômenos como espalhamento, que para as nossas discussões é considerado apenas para baixas frequências, verificando a existência do efeito Aharonov-Bohm para um vórtice sem drenagem. Como uma possível contribuição, verificamos o comportamento desse efeito a uma métrica acústica modificada, obtida quando termos de altas derivadas são incluídos na lagrangeana do modelo abelian Higgs [20].

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, é feita uma revisão das principais propriedades de um buraco negro acústico. Iniciamos a revisão com as equações básicas da dinâmica dos fluidos, posteriormente é feita a conexão com a geometria de Lorentz chegando assim, na métrica conhecida como métrica acústica. Nesse ponto destacamos algumas características da métrica. O capítulo segue com as analogias acústicas como horizonte e ergo região, introduzindo a geometria de um vórtice.

No Capítulo 3, continuamos a revisão, onde realizamos uma breve descrição do efeito Aharonov-Bohm, que tem diversas analogias nas áreas da física. Aqui focamos no efeito quântico como foi descrito originalmente por Aharonov e Bohm. Uma pequena revisão sobre a teoria do espalhamento é feita.

No Capítulo 4, apresentamos os cálculos para descrever algumas propriedades que



podem ser encontradas para o modelo de um vórtice de drenagem, como deslocamento de fase, absorção e seção de choque de espalhamento diferencial, é feita uma breve discussão sobre superradiância mostrando alguns resultados numéricos para reflexão. Calculamos a seção de choque de espalhamento diferencial para esse modelo e comparamos os resultados com o espalhamento do efeito Aharonov-Bohm descrito no capítulo anterior.

No Capítulo 5, é introduzido termos de altas derivadas, usando o modelo abeliano de Higgs e calculamos os efeitos no caso não-relativístico para essa nova métrica. Obtemos o deslocamento de fase para baixas frequências tanto analítico tomando as devidas aproximações, quanto os resultados numéricos. Determinamos também, a seção de choque de espalhamento para essa nova métrica e comparamos com os resultados obtidos no capítulo 4, verificamos a influencia do termo extra obtido a partir da nova métrica sobre o efeito Aharonov-Bohm análogo.

Finalmente no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Buraco negro acústico

Em 1981, William George Unruh desenvolveu uma maneira de discretizar certos aspectos da física de buracos negros usando a teoria dos fluxos acústicos supersônicos [21]. A conexão entre esses dois sistemas aparentemente diferentes é surpreendente e poderosa, e foi estudada de forma independente várias vezes ao longo da década e meia que se seguiu [22]. Neste trabalho, não pretendemos detalhar todas as analogias existentes no buraco negro acústico, apenas fazer uma breve abordagem sobre alguns aspectos como dinâmica dos fluidos, geometria de Lorentz e definir algumas noções como ergoesfera, horizontes de eventos acústicos para fluxos de fluidos supersônicos. Acreditamos ser relevante apontar que este capítulo é uma revisão com base principalmente em [13, 23].

Vamos começar nosso estudo lembrando que, para um fluido não viscoso homogêneo estático, a propagação das ondas sonoras é regida pela equação simples [24, 25, 26]

$$\partial_t^2 \psi = c_s^2 \nabla^2 \psi, \quad (2.1)$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som. Generalizar esse resultado para um fluido que não é homogêneo, ou para um fluido que está em movimento, mesmo em um movimento não-estável, é mais sutil do que se possa imaginar.

**Teorema:** *Se um fluido é barotrópico não viscoso, e o fluxo é irrotacional (embora possivelmente dependente do tempo), a equação de movimento para a velocidade potencial que descreve um distúrbio acústico é idêntica à equação de movimento d'alembertiano para uma propagação de campo escalar sem massa minimamente acoplada em uma geometria*

lorentziana em  $(3 + 1)$  dimensões.

$$\Delta\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi) = 0. \quad (2.2)$$

Nessas condições, a propagação do som é regida por uma métrica acústica  $g_{\mu\nu}(t, \vec{x})$ . Esta métrica acústica descreve uma geométrica lorentziana em  $(3 + 1)$  dimensões. Dependendo algebricamente da densidade, velocidade do fluxo, e da velocidade local do som no fluido, ou seja,

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v^2) & \vdots & -\vec{v} \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots\dots\dots \\ -\vec{v} & \vdots & I \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

(Aqui  $I$  é uma matriz identidade  $3 \times 3$ ). Em geral, quando um fluido é não homogêneo e está fluindo, o tensor acústico de Riemann associado com esta métrica de Lorentz será diferente de zero.

Mesmo que a dinâmica dos fluidos subjacentes seja newtoniana, não-relativista, e ocorra em um espaço tempo plano, as flutuações (ondas de som) são regidas por um espaço-tempo curvo em uma geometria lorentziana de  $(3 + 1)$  dimensões (pseudo-riemanniano).

## 2.1 Dinâmica dos fluidos

A dinâmica dos fluidos preocupa-se com o estudo do movimento de fluidos (líquidos e gases). Como os fenômenos considerados na dinâmica dos fluidos são macroscópicos, um fluido é considerado um meio contínuo. Isso significa que qualquer pequeno elemento de volume no fluido é sempre tão grande que ainda contém um grande número de moléculas. Assim, quando falamos de elementos infinitamente pequenos de volume, sempre nos referiremos àqueles que são “fisicamente” infinitamente pequenos, ou seja, muito pequenos em comparação com o volume do corpo em questão, mas grandes comparados com as distâncias entre as moléculas [26].

### 2.1.1 Equações fundamentais

As equações fundamentais para dinâmica dos fluidos [26, 25] são as equações de continuidade e a equação de Euler descritas respectivamente por

$$\partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad (2.4)$$

e

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \rho [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = \vec{F}. \quad (2.5)$$

Iniciando a análise assumindo que o fluido é não viscoso, com as únicas forças presentes sendo aquelas devido à pressão e a gravidade Newtoniana, ficamos com

$$\vec{F} = -\nabla p - \rho \nabla \theta_g, \quad (2.6)$$

onde  $\theta_g$  é o potencial gravitacional Newtoniana. Usando a relação matemática  $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{\nabla v^2}{2} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ , podemos escrever a equação de Euler (2.5) da forma

$$\partial_t \vec{v} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left( \frac{v^2}{2} + \theta_g \right). \quad (2.7)$$

Agora tomando um fluxo livre de vorticidade, ou seja, *localmente irrotacional*<sup>1</sup>. Introduzindo uma velocidade potencial  $\psi$  de tal modo que  $\vec{v} = -\nabla \psi$ , pelo menos localmente e tomando um fluido *barotrópico*<sup>2</sup> ( $\rho$  apenas função de  $p$ ), torna-se possível definir

$$\zeta(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')}; \quad \text{de modo que} \quad \nabla \zeta = \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (2.8)$$

Assim a entalpia específica,  $\zeta(p)$ , é função apenas de  $p$ . A equação de Euler agora é reduzida para

$$-\partial_t \psi + \zeta + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \theta_g = 0. \quad (2.9)$$

Esta é uma versão da equação de Bernoulli na presença de forças motrizes externas.

## 2.1.2 Flutuações

Como próximo passo, vamos linearizar as equações de movimento em torno de algum fundo assumido  $(\rho_0, p_0, \psi_0)$ . Sendo  $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,  $p = p_0 + \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,

---

<sup>1</sup>A condição irrotacional é automaticamente satisfeita para o componente de superfluidos físicos. Este ponto foi enfatizado por Comer [27], que também apontou que em um superfluidos haverá múltiplas métricas acústicas (e múltiplos horizontes acústicos) correspondentes ao primeiro e segundo som. Mesmo para fluidos normais, os fluxos livres de vorticidade são comuns, especialmente em situações de alta simetria.

<sup>2</sup>Uma suposição não declarada deste tipo é implícita, embora não explícita, na análise de referência [12]. Por outro lado, a referência [21] explicitamente faz a suposição mais forte de que o fluido é isentrópico. (Isto é, a densidade de entropia específica é considerada constante em todo o fluido). Esta é uma suposição mais forte do que realmente é necessária, e a hipótese barotrópica mais fraca usada aqui é suficiente.

e  $\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Outros pontos devem ser considerados como o potencial gravitacional  $\theta_g$  fixo e externo e o som sendo definido como essas flutuações linearizadas nas quantidades dinâmicas. Observe que esta é a definição padrão de som e, mais geralmente, de distúrbios acústicos. Em princípio, estamos interessados em resolver as equações completas de movimento para as variáveis de fluido  $(\rho, p, \psi)$ . Na prática, é comum e extremamente útil separar o movimento, descrito pelas variáveis exatas  $(\rho, p, \psi)$ , em um movimento de massa médio  $(\rho_0, p_0, \psi_0)$ , e em um distúrbio acústico de baixa frequência  $(\varepsilon\rho_1, \varepsilon p_1, \varepsilon\psi_1)$ .

Linearizar a equação de continuidade resulta no par de equações

$$\partial_t \rho_0 + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) = 0, \quad (2.10)$$

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{v}_0 + \rho_0 \vec{v}_1) = 0. \quad (2.11)$$

Agora, a condição barotrópica implica

$$\zeta(p) = \zeta(p_0 + \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = \zeta_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.12)$$

Usando esse resultado na linearização da equação de Euler, obtém-se o par

$$-\partial_t \psi_0 + \zeta_0 + \frac{1}{2} (\nabla \psi_0)^2 + \theta_g = 0, \quad (2.13)$$

$$-\partial_t \psi_1 + \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 = 0. \quad (2.14)$$

Essa última equação pode ser rearranjada da forma,

$$p_1 = \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1). \quad (2.15)$$

Usando a superposição barotrópica temos,

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1). \quad (2.16)$$

Agora substituindo este resultado da equação de Euler linearizada pela equação linearizada de continuidade. Nos leva à

$$-\partial_t \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \right) + \nabla \cdot \left( \rho_0 \nabla \psi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \vec{v}_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \right) = 0. \quad (2.17)$$

Esta equação de onda descreve a propagação do potencial escalar linearizado  $\psi_1$ . Uma vez que,  $\psi_1$  é determinado, usando a equação (2.15) encontra-se  $p_1$ , da mesma forma  $\rho_1$  é obtido usando a equação (2.16). Assim, esta equação de onda determina

completamente a propagação de distúrbios acústicos. Os campos de fundo  $p_0$ ,  $\rho_0$  e  $\vec{v}_0 = -\nabla\psi_0$ , que aparecem como coeficientes dependentes do tempo e da posição nesta equação de onda, são limitados para resolver as equações do movimento do fluido para um fluxo externo, barotrópico, não viscoso e irrotacional.

Para simplificar algebricamente, definimos a velocidade local do som como

$$\frac{1}{c_s^2} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (2.18)$$

e construindo uma matriz simétrica  $4 \times 4$  da forma

$$f^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s v^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots\dots & \cdot & \dots\dots\dots \\ -v_0^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Em seguida, usando coordenadas quadrimensionais  $x^\mu \equiv (t; x^i)$  a equação (2.17) pode ser reescrita como

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1) = 0. \quad (2.20)$$

Esta formulação bastante compacta é completamente equivalente à equação (2.17) e é um passo mais promissor para outras manipulações. As etapas restantes são uma aplicação direta das técnicas da geometria de Lorentz em um espaço curvo quadrimensional.

## 2.2 Geometria de Lorentz

Em qualquer conjunto lorentziano (isto é, pseudo-riemanniano), o espaço curvo escalar d'alembertiano é dado em termos da métrica  $g_{\mu\nu}$

$$\Delta\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi). \quad (2.21)$$

A métrica  $g^{\mu\nu}$ , é a inversa da matriz  $g_{\mu\nu}(t, \vec{x})$  enquanto que o determinante  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ . Assim, podemos reescrever a equação de onda (2.17) derivando em termos do d'alembertiano desde que se defina [13]

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

A definição anterior implica em

$$\det(f^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^4 g^{-1} = g. \quad (2.23)$$

Por outro lado, a partir da expressão explícita (2.19), calculando o determinante temos

$$g = \det(f^{\mu\nu}) = \left(\frac{\rho_0}{c_s^2}\right)^4 [(-1) \cdot (c_s^2 - v_0^2) - (-v_0)^2] \cdot [c_s^2] \cdot [c_s^2] = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2}. \quad (2.24)$$

Assim,

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2}; \quad \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c_s}. \quad (2.25)$$

Podemos, portanto, definir os coeficientes da métrica acústica inversa

$$g^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{1}{\rho_0 c_s} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots\dots & \cdot & \dots\dots\dots \\ -v_0^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Para determinar a métrica acústica precisamos calcular a inversa da matriz (2.26). Por outro lado, é ainda mais fácil reconhecer que temos um exemplo da divisão Artimeitt-Deser-Misner de uma métrica espacial lorentziana em  $(3 + 1)$  dimensões do espaçotempo. Tais métricas são comumente usada na discussão de valores iniciais na teoria da gravidade de Einstein, na relatividade geral. A métrica acústica neste caso é

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots\dots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Sendo o elemento de linha acústico equivalente, expresso como

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c_s} [-c_s^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt) \delta_{ij} (dx^j - v_0^j dt)]. \quad (2.28)$$

Neste momento é interessante mencionar alguns breves comentários discutidos em [13]: Observe que a assinatura desta métrica é de fato  $(-, +, +, +)$ , como deveria ser considerando uma geometria lorentziana.

Observe que, na física acústica, é a densidade da métrica inversa,  $f^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$  que é de significado mais fundamental para derivar a equação de onda do que a própria métrica  $g_{\mu\nu}$  (esta observação continua mantida em situações mais gerais, onde muitas vezes é significativamente mais fácil calcular a densidade do tensor  $f^{\mu\nu}$  do que calcular a métrica efetiva  $g_{\mu\nu}$ ).

Deve-se enfatizar que existem duas métricas distintas relevantes para serem discutidas:

- Primeiramente discutimos a métrica do espaço tempo físico que, neste caso, é apenas a métrica plana usual do espaço de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} \equiv (\text{diag}[-c_{\text{luz}}^2, 1, 1, 1])_{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

onde  $c_{\text{luz}}$  é a velocidade da luz no vácuo. Aqui partículas fluidas se acoplam apenas à métrica física  $\eta_{\mu\nu}$ . Na verdade, o movimento fluido é completamente não-relativístico, de modo que  $\|v_0\| \ll c_{\text{luz}}$ , e é bastante suficiente considerar a relatividade galileana para a mecânica de fluidos subjacente.

- A segunda é para as ondas sonoras, que não “enxergam” a métrica física. Deste modo, perturbações acústicas acoplam-se apenas à métrica acústica  $g_{\mu\nu}$ .

A geometria determinada pela métrica acústica, no entanto, herda algumas propriedades chave da existência da métrica física plana subjacente. Por exemplo, a topologia de grupo não depende da métrica específica considerada. A geometria acústica herda a topologia subjacente da métrica física  $-\mathcal{R}^4$  com possivelmente algumas regiões excluídas (devido a condições de contorno impostas).

Além disso, a geometria acústica herda automaticamente a propriedade de “causalidade estável” [28]. Note que,

$$g^{\mu\nu} (\nabla_\mu t) (\nabla_\nu t) = -\frac{1}{\rho_0 c_s} < 0. \quad (2.30)$$

Outros conceitos que se traduzem imediatamente são os de “ergo-região”, “superfície presa” e “horizonte de eventos”. Essas noções serão desenvolvidas de forma mais completa na subseção a seguir.

A quadri-velocidade adequadamente normalizada do fluido é

$$V^\mu = \frac{(1; v_0^i)}{\rho_0 c_s}, \quad (2.31)$$

tal que,

$$g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = g(V, V) = -1. \quad (2.32)$$

Esta quadri-velocidade está relacionada ao gradiente do parâmetro do tempo natural por

$$\nabla_\mu t = (1, 0, 0, 0); \quad \nabla^\mu t = \frac{(1; v_0^i)}{\rho_0 c_s} = -\frac{V^\mu}{\sqrt{\rho_0 c_s}}. \quad (2.33)$$



Assim, as curvas integrais do campo de velocidade do fluido são ortogonais (na métrica de Lorentz), para as superfícies de tempo constantes. O tempo acústico apropriado ao longo das linhas de fluxo de fluido é

$$\tau = \int \sqrt{\rho_0 c_s} dt, \quad (2.34)$$

e as curvas integrais são geodésicas da métrica acústica se e somente se  $\rho_0 c_s$  for independente da posição.

Observe que, em uma geometria lorentziana geral em (3+1) dimensões, a métrica possui 6 graus de liberdade por ponto no espaço tempo (matriz simétrica 4 por 4 tem 10 componentes independentes, depois subtraindo 4 condições de coordenadas). Em contraste, a métrica acústica é mais restrita. Sendo especificada pelos três escalares  $\psi_0(t, \vec{x})$ ,  $\rho_0(t, \vec{x})$  e  $c_s(t, \vec{x})$ , a métrica acústica possui no máximo 3 graus de liberdade por ponto no espaço-tempo. Além disso, a equação de continuidade é capaz de reduzir à 2 graus de liberdade que pode ser considerado  $\psi_0(t, \vec{x})$  e  $c_s(t, \vec{x})$ .

Uma observação: onde na relatividade geral usa-se a palavra “estacionário”, na dinâmica dos fluidos usa-se a frase “fluxo constante”. A palavra “estática” em relatividade geral traduz-se em uma restrição bastante desordenada no fluxo de fluido.

Finalmente, na gravidade de Einstein, a métrica do espaço-tempo está relacionada à distribuição de matéria pelas equações diferenciais de Einstein-Hilbert não-lineares. Em contraste, no contexto atual, a métrica acústica está relacionada à distribuição de matéria de uma forma algébrica simples.

## 2.3 Ergo-região e horizonte acústico

Esta seção e a subsequente são dedicadas à explicar a analogia acústica. Conceitos e quantidades como horizonte de eventos e ergoesferas são características importantes da relatividade geral padrão, e as analogias são úteis somente na medida em que preservam adequadamente essas noções.

Vamos começar com a noção de uma ergo-região: considere as curvas integrais do vetor  $K^\mu \equiv (\partial/\partial t)^\mu = (1, 0, 0, 0)^\mu$  (mesmo que o fluxo não esteja estável, a métrica de Minkowski nos fornece uma definição natural de “em repouso”). Então

$$g_{\mu\nu} (\partial/\partial t)^\mu (\partial/\partial t)^\nu = g_{tt} = - [c_s^2 - v^2]. \quad (2.35)$$

Essa quantidade muda de sinal quando  $\|\vec{v}\| > c_s$ . Assim, qualquer região do fluxo supersônico é uma ergo-região (e o limite da ergo-região pode ser considerado como sendo a ergo-superfície). O análogo desse comportamento na relatividade geral é a ergosfera em torno de qualquer buraco negro giratório, é uma região onde o espaço “se move” com velocidade superluminal relativa para as estrelas fixas [28, 29].

Uma superfície presa na acústica pode ser definida de duas formas: Se a velocidade do líquido estiver em todos os lugares apontando para dentro e o componente normal da velocidade do fluido for em toda parte maior que a velocidade local do som, então, independentemente da direção em que se propague uma onda sonora, será varrida para dentro pelo fluxo de fluido e ficará presa no interior a superfície, esta é chamada de superfície externamente presa. As superfícies internamente presas podem ser definidas exigindo que o fluxo de flutuação esteja em todos os lugares apontando para fora com o componente normal supersônico. É apenas pelo fato de que a métrica de Minkowski fornecer uma definição natural de “em repouso” que podemos adotar uma definição tão simples e direta.

O horizonte de eventos é definido, como na relatividade geral, exigindo que seja o limite da região da qual geodésicas nulas (neste caso fônons), não podem escapar. Este é a descrição de um horizonte de eventos futuros. Um horizonte de eventos passado pode ser definido em termos do limite da região que não pode ser alcançado por fônons penetrantes.

## 2.4 Geometria do vórtice

Como exemplo de um fluxo de fluido em que a distinção entre ergo-região e horizonte de eventos acústicos é crítica, considere o fluxo de fluido de um vórtice de drenagem mais comumente encontrado na literatura como “Draining Bathtub” (banheira de drenagem) ou simplesmente DBT, Nesta dissertação vamos nos referir a esse fenômeno como vórtice drenante ou vórtice de drenagem.

Portanto, podemos modelar um vórtice de drenagem por um fluxo dimensional  $(2 + 1)$  com um sumidouro na origem. A equação de continuidade implica que, para o componente radial da velocidade do fluido, devemos ter

$$\rho v^{\hat{r}} \propto \frac{1}{r}. \quad (2.36)$$

Na direção tangencial, o requisito para que o fluxo seja livre de vorticidade (além de uma

possível contribuição da função delta no núcleo do vórtice), implica, através do teorema de Stokes, que

$$v^{\hat{t}} \propto \frac{1}{r}. \quad (2.37)$$

Por outro lado, assumindo a conservação do momento angular (isso coloca uma restrição nas forças externas do corpo ao assumir a ausência de torques externos) implica a restrição ligeiramente diferente

$$\rho v^{\hat{t}} \propto \frac{1}{r}. \quad (2.38)$$

Combinando essas restrições, a densidade de fundo  $\rho$  deve ser constante em todo o fluxo (o que implica automaticamente que a pressão de fundo  $p$  e a velocidade do som  $c$  também são constantes ao longo do fluxo de fluido). Além disso, para a velocidade potencial de fundo, devemos ter

$$\psi(r, \theta) = D \ln(r/a) + C\theta. \quad (2.39)$$

Note que, como já sugerido anteriormente, a velocidade potencial não é uma função verdadeira (porque tem uma descontinuidade ao passar por  $2\pi$ ). A velocidade potencial deve ser interpretada como sendo definido por partes em regiões sobrepostas que circundam o núcleo do vórtice em  $r = 0$ . A velocidade do fluxo de fluido é

$$\vec{v} = \frac{D\hat{r}}{r} + \frac{C\hat{\theta}}{r}. \quad (2.40)$$

Deixando um pre-fator independente da posição, a métrica acústica para um vórtice de drenagem é explicitamente dada por

$$ds^2 = -c_s^2 dt^2 + \left(dr - \frac{D}{r} dt\right)^2 + \left(r d\theta - \frac{C}{r} dt\right)^2, \quad (2.41)$$

que pode ser reescrita como

$$ds^2 = -\left(c_s^2 - \frac{D^2 + C^2}{r^2}\right) dt^2 - 2\frac{D}{r} dr dt - 2C d\theta dt + dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (2.42)$$

Podemos observar que, o fluxo de fluido do vórtice é visto como possuindo uma métrica acústica que é estavelmente causal e que não envolve curvas de tempo fechadas.

A ergosfera se forma em

$$r_{ergosfera} = \frac{\sqrt{D^2 + C^2}}{c_s}. \quad (2.43)$$

Note que o sinal de  $D$  é irrelevante na definição da ergosfera e ergo-região: não importa se o núcleo do vórtice é uma fonte ou um sumidouro.

O horizonte de evento acústico forma sempre que a componente radial da velocidade do fluido excede a velocidade do som, isto é, em

$$r_{\text{horizonte}} = \frac{|D|}{c_s}. \quad (2.44)$$

O sinal de  $D$  agora faz diferença. Para  $D < 0$ , estamos lidando com um futuro horizonte acústico (buraco negro acústico), enquanto que para  $D > 0$  estamos lidando com um horizonte de eventos passado (buraco acústico branco).

Embora esta construção tenha sido expressada em (2+1) dimensões, é claro que podemos adicionar uma dimensão extra indo para (3+1) dimensões e interpretando o resultado como uma superposição de um filamento de vórtice comum e uma fonte de linha

$$ds^2 = -c_s^2 dt^2 + \left( dr - \frac{D}{r} dt \right)^2 + \left( r d\theta - \frac{C}{r} dt \right)^2 + dz^2. \quad (2.45)$$

Este elemento de linha para o buraco negro acústico será utilizado no capítulo 4 onde vamos desenvolver essa métrica e comparar os resultados de espalhamento com o efeito Aharonov-Bohm. Esse efeito sera discutido no capitulo seguinte.

# Capítulo 3

## Efeito Aharonov-Bohm

Neste capítulo é feita uma breve descrição do efeito Aharonov-Bohm na mecânica quântica. Posteriormente, realizaremos uma discussão sobre o espalhamento, que será de fundamental importância para as comparações feitas nos capítulos seguintes.

Em 1959, Yakir Aharonov e David Bohm [17] mostraram que uma função de onda para uma partícula carregada é influenciada por um potencial eletromagnético em uma região onde os campos magnéticos e elétricos são nulos. O efeito que ficou conhecido como efeito Aharonov-Bohm (AB) teve sua confirmação experimental em 1960 por Robert G. Chambers [30]. Chambers realizou o experimento proposto no artigo de Aharonov e Bohm e provou a existência do efeito. Nos anos seguintes, o efeito foi confirmado por experimentos cada vez mais precisos. Desde a publicação em 1959 tem sido encontrado análogos em diversas áreas como gravitação [31], dinâmica dos fluidos [18, 32, 15], ótica [33] e condensado de Bose-Einstein [16, 34].

### 3.1 Efeito Aharonov-Bohm quântico

Na mecânica clássica, podemos descrever o movimento de uma partícula usando a lei de força de Lorentz, que contém campos, ou usando o formalismo canônico e a função de Hamilton, que é expressa em termos de potenciais. Mas se quisermos descrever a dinâmica da partícula na mecânica quântica, temos que usar o formalismo canônico porque a equação de Schrödinger contém explicitamente a função de Hamilton. Portanto a hamiltoniana para uma partícula carregada no campo eletromagnético [35], é da forma,

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + q\phi(\vec{r}) + V(\vec{r}), \quad (3.1)$$

onde  $V$  é um possível potencial não elétrico. Usando o momento na forma  $\vec{p} = -i\hbar\nabla$  e aplicando a hamiltoniana na equação de Schrödinger

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( i\hbar\nabla + q\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + q\phi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (3.2)$$

que descreve a dinâmica da partícula carregada em um campo eletromagnético.

Agora consideremos uma partícula carregada nas proximidades de um solenoide extremamente longo, de tal forma que o campo magnético interno é uniforme e externo é zero. Além disso, vamos utilizar um sistema de coordenadas polares com o eixo  $z$  no meio do solenoide, e apontando na direção do campo magnético Figura 3.1. Para resolver a equação de Schrödinger, devemos primeiro determinar os potenciais vetorial e escalar  $\vec{A}$  e  $\phi$  respectivamente, como o solenoide não tem carga, o campo elétrico  $\vec{E} = -\nabla\phi$  é zero, então podemos tomar  $\phi = 0$ . O potencial vetor fora do solenoide deve satisfazer duas condições: primeiramente,  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , que é simplesmente a definição do potencial vetor; segundo, teorema de Stokes impõe que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \Phi_m, \quad (3.3)$$

onde o caminho de integração  $\mathcal{C}$  é uma curva em torno do solenoide e  $\Phi_m$  é o fluxo magnético através do solenoide. Usualmente é comum escolher o potencial vetor como

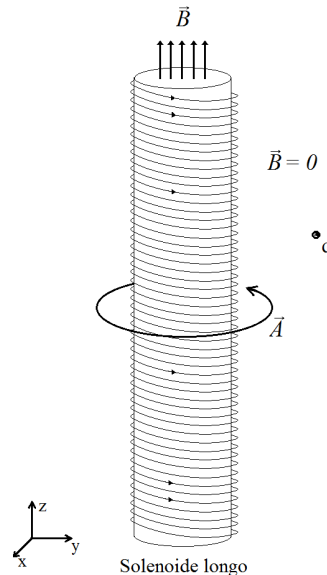


Figura 3.1: Solenoide extremamente longo, onde o vetor campo magnético é uniforme no seu interior e zero em qualquer ponto externo. Nas proximidades do solenoide temos uma partícula com carga  $q$ .

sendo

$$\vec{A} = \frac{\Phi_m}{2\pi r} \hat{\theta}, \quad (3.4)$$

onde  $r$  é a distância do eixo  $z$  e  $\hat{\theta}$  é o vetor unitário na direção de  $\theta$  do sistema de coordenadas polares. Esta escolha satisfaz ambas as condições mencionadas acima. Vemos que, embora o campo magnético esteja confinado no interior do solenoide, o potencial vetor não é zero fora do solenoide.

Para descrever a função de onda para uma partícula carregada é necessário resolver a equação (3.2), para isso, é interessante escrever a função de onda da forma

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{i\xi(\vec{r})} \Psi'(\vec{r}, t), \quad (3.5)$$

onde

$$\xi(\vec{r}) = \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{O}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.6)$$

O ponto inicial da integração  $\mathcal{O}$  é escolhido arbitrariamente, o que é consequência da liberdade de calibre para o potencial eletromagnético. É importante frisar que, o potencial  $\vec{A}$  seja irrotacional, ou seja, que o campo  $\vec{B}$  seja zero. Caso contrario,  $\xi(\vec{r})$  é dependente do caminho em (3.6), e portanto não é função de  $r$ . Em termos de  $\Psi'$  o gradiente de  $\Psi$  é

$$\nabla\Psi = e^{i\xi(\vec{r})} (i\nabla\xi(\vec{r})) \Psi' + e^{i\xi(\vec{r})} (\nabla\Psi'), \quad (3.7)$$

onde  $\nabla\xi(\vec{r}) = \frac{q}{\hbar} \vec{A}$

$$(i\hbar\nabla + q\vec{A}) \Psi = i\hbar e^{i\xi(\vec{r})} \nabla\Psi'. \quad (3.8)$$

Assim,

$$(i\hbar\nabla + q\vec{A})^2 \Psi = -\hbar e^{i\xi(\vec{r})} \nabla^2 \Psi'. \quad (3.9)$$

Substituindo esta igualdade em (3.2) e cancelando o fator  $e^{-i\xi(\vec{r})}$  ficamos com

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi' - V\Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Vemos que a função de onda  $\Psi'$  é uma solução da equação de Schrödinger na ausência do potencial vetor  $\vec{A}$ .

Agora para ilustrar o efeito Aharonov-Bohm, considere dois feixes de elétrons que passam por lados opostos em torno de um solenoide longo como mostrado na Figura 3.2. Semelhante ao experimento de dupla fenda, o esperado é um padrão de interferência quando os feixes se encontrarem do outro lado do solenoide.

Uma forma de descrever essa interferência, é representar os feixes em forma de ondas planas, ou seja, como

$$\Psi_1 = \mathcal{A}_1 e^{i\kappa x_1} \quad \text{e} \quad \Psi_2 = \mathcal{A}_2 e^{i\kappa x_2}, \quad (3.11)$$

aqui  $\kappa$  é o vetor de onda para os feixes de elétrons e  $x_1$  e  $x_2$  são as distâncias percorridas por cada feixe.

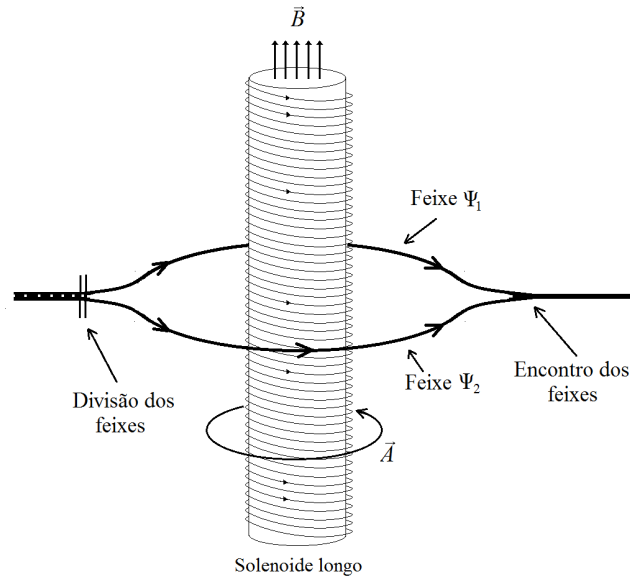


Figura 3.2: Experimento Aharonov-Bohm: dois feixes  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  passam por lados opostos de um solenoide longo, os feixes são recombinadas do outro lado do solenoide.

Se o solenoide não contem campo magnético, o potencial vetor externo é zero, então há deslocamento de fase  $\Delta\varphi$  entre  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  e consequentemente o padrão de interferência dependerá apenas da diferença de caminhos percorridos pelos feixes  $\Delta\varphi = \kappa(x_1 - x_2)$ .

Quando o campo magnético é ligado, o potencial vetor é descrito como em (3.4), então, as funções de onda  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  irão adquirir fatores de fase adicionais (3.5). Com isso o padrão de interferência mudará para a fase adicional

$$\Delta\varphi = \xi_1 - \xi_2. \quad (3.12)$$

Usando a equação (3.6) podemos calcular essa diferença, cuja relação é dado por

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \xi_1 - \xi_2 &= \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{C}_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ \Delta\varphi &= \frac{q}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{q}{\hbar} \Phi_m, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  representam os caminhos percorridos por cada feixe ao passar pelo solenoide. Como eles formam um caminho fechado em torno do solenoide, a diferença de fase total entre os feixes será proporcional ao fluxo magnético. O deslocamento de fase pode ser descrito como:

$$\Delta\varphi = \frac{q\Phi_m}{\hbar} \equiv 2\pi\alpha; \quad \Phi_m = \frac{2\pi\hbar}{q}\alpha. \quad (3.14)$$



Aqui  $\alpha$  é uma medida adimensional da intensidade do efeito Aharonov-Bohm [36]. Se os feixes de partículas carregadas passarem em lados opostos do núcleo, as franjas de interferência podem ser produzidas pela variação do campo magnético dentro do núcleo. Isso ocorre mesmo que essas partículas carregadas não interajam com a região do campo magnético ou elétrico não nulo, sugerindo que  $\vec{A}$  tem uma certa realidade física.

## 3.2 Teoria do espalhamento

Nesta seção é feita uma breve revisão da teoria do espalhamento baseado principalmente em [37]. Com o objetivo de explicar alguns elementos que serão importantes para os capítulos seguintes. Para mais detalhes e um estudo completo da matemática da teoria do espalhamento, ver [38, 39] além do citado anteriormente.

Considere um sistema em mecânica quântica (não-relativística) cujos estados  $\epsilon$  são vetores unitários em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e cuja evolução temporal é gerada pelo operador auto-adjunto  $H$  atuando em  $\mathcal{H}$  e sendo  $H_0$  o hamiltoniano atuando em  $\mathcal{H}_0$ . Se os estados  $e^{-iHt}g$  são estados espalhados, ou seja, se à estados livres  $\epsilon_{\pm} \in \mathcal{H}_0$  de tal modo que

$$\| e^{-iHt}\epsilon - \mathcal{F}e^{-iH_0t}\epsilon_{\pm} \| = \| \epsilon - e^{iHt}\mathcal{F}e^{-iH_0t}\epsilon_{\pm} \|, \quad (3.15)$$

desaparecendo para  $t \rightarrow \pm\infty$ . Como próximo passo, vamos introduzir o chamado mapeamento de comparação  $\mathcal{F} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ , que é um operador unitário.

A definição para os operadores de onda são

$$W_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt}\mathcal{F}e^{-iH_0t}, \quad (3.16)$$

além disso, os vetores  $\epsilon_{\pm}$  e  $\epsilon$  satisfazem a relação  $\epsilon = W_{\pm}\epsilon_{\pm}$  e,

$$\epsilon_+ = S\epsilon_-, \quad (3.17)$$

onde  $S = W_+^*W_-$  é chamado operador de espalhamento ou matriz  $S$ .

O sistema físico considerado aqui é um espalhamento de partículas para um obstáculo cilíndrico no plano de pontos  $\vec{x} = (x, y)$ , e o espaço de Hilbert é dado por  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2, dx dy)$ . Além disso, também estamos interessados na dispersão de um potencial contínuo de curto alcance  $V(x, y)$ , ou seja, significa que há uma constante  $C$ , para  $R > 0$  tal que

$$|V(x, y)| \leq \frac{C}{r^{1+\vartheta}}, \quad \forall r > R, \quad (3.18)$$

para um  $\vartheta > 0$ . O hamiltoniano relativo à este sistema físico é

$$H = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(x, y) \quad \text{e} \quad H_0 = k_x^2 + k_y^2, \quad (3.19)$$

atuando no espaço de posição  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2, dx dy)$  e momento  $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^2, dk_x dk_y)$ , respectivamente. Além disso, temos  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ ,  $k^2 = |\vec{k}|^2$  e o operador de comparação  $\mathcal{F}$  é simplesmente a transformada de Fourier.

Na teoria do espalhamento dependente do tempo, resolve-se a equação de Schrödinger dependente do tempo para as funções de onda incidente e refletida  $\Psi_{(in)}(\vec{r}, \vec{k})$  e  $\Psi_{(re)}(\vec{r}, \vec{k})$ , respectivamente, que são reduzidas a uma onda plana da forma  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  para  $r \rightarrow \infty$ . A conexão com os operadores de onda é dada da forma:

$$(W_{\pm\epsilon})(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{k} \Psi_{(re/in)}(\vec{r}, \vec{k}) g(\vec{k}). \quad (3.20)$$

Agora considerando, um potencial esfericamente simétrico  $V(r)$  e, assim, empregando coordenadas polares tanto na posição espacial  $(r, \theta)$  quanto no espaço de momento  $(k, \theta')$ , obtemos

$$H = - \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + V(r) \quad \text{e} \quad H_0 = k^2, \quad (3.21)$$

respectivamente. O comportamento assintótico para a função de onda incidente que é solução da equação de Schrödinger independente do tempo, é tal que

$$\Psi_{(in)}(r, \theta; k, \theta') \sim e^{ikr \cos(\theta - \theta')} + f(k, \theta) e^{ikr} / r^{1/2}; \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.22)$$

onde  $f(k, \theta)$  é a amplitude de espalhamento. A seção de choque de espalhamento diferencial é dado por [37]

$$\left( \frac{d\sigma}{d\theta} \right) (k, \theta) = |f(k, \theta)|^2. \quad (3.23)$$

Fisicamente, esta quantidade mede a densidade de probabilidade de uma partícula incidente, após a interação com o alvo, isto é, uma partícula dispersa a ser encontrada dentro de um cone em torno de  $(k, \theta)$ . O objetivo agora é encontrar o comportamento assintótico de  $\Psi_{(in)}$  e a amplitude de espalhamento. Para isso é feito os seguintes procedimentos.

Primeiro usando a expressão (3.22) para  $\theta' = 0$ , fazemos a expansão de Fourier para o fator de onda plana [37]

$$e^{ikr \cos(\theta)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_{|m|}(kr) e^{im\theta}, \quad (3.24)$$

e para a amplitude de espalhamento

$$f(k, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(k) e^{im\theta}. \quad (3.25)$$

O termo  $J$  é uma função de Bessel de primeira espécie, e seu comportamento assintótico para  $J_n(x)$  é dado da forma,

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.26)$$

Usando estes resultados e também a função cosseno na forma exponencial, a equação (3.22) pode ser reescrita da forma

$$\Psi_{(in)}(r, \theta; k, 0) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^m e^{i\pi/4 - ikr}}{(2\pi kr)^{1/2}} + \left( \frac{e^{-i\pi/4}}{(2\pi kr)^{1/2}} + \frac{f_m}{r^{1/2}} \right) \right] e^{im\theta}. \quad (3.27)$$

por outra lado  $\Psi_{(in)}$  é solução da equação de Schödinger e é regular na origem. Usando então a seguinte separação de variáveis

$$\Psi_{(in)}(r, \theta; k, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(k) \Psi_m(r, k) e^{im\theta}, \quad (3.28)$$

onde  $\Psi_m$  é solução da equação radial para o momento angular  $m$ , ficamos com

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{m^2}{r^2} + V(r) \right] \Psi = k^2 \Psi, \quad (3.29)$$

que é regular na origem. Como  $V(r)$  é pequeno, o comportamento de  $\Psi_m$  para  $r \rightarrow \infty$  é da forma,

$$\Psi_m(r, k) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_m(k)\right), \quad (3.30)$$

onde o deslocamento de fase  $\delta$  mede a diferença de argumento em comparação com o comportamento assintótico de  $J_{|m|}(kr)$ , que é a solução da equação radial para  $V(r) = 0$ .

Agora comparando as soluções assintóticas de  $\Psi_{(in)}$ , como dada por (3.27) por um lado, e por (3.28) e (3.30) por outro lado. Temos que

$$a_m(k) = i^{|m|} e^{i\delta_m(k)}, \quad (3.31)$$

e

$$f_m(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} (e^{2i\delta_m(k)} - 1). \quad (3.32)$$

Assim, substituindo esse resultado em (3.25) tem-se a amplitude de espalhamento em termos do deslocamento de fase  $\delta_m$

$$f(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m(k)} - 1) e^{im\theta}. \quad (3.33)$$

Agora, descrevendo a abordagem para o caso dependente do tempo. A decomposição dos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}_0$  nos subespaços  $\mathcal{H}_m$ ,  $\mathcal{H}_{0,m}$ , com projeções correspondentes  $P_m$ ,  $P_{0,m}$ , é tal que [40]

$$(P_m \eta)(r, \theta) = \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} \eta_m(r), \quad (3.34)$$

onde

$$\eta_m(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} \eta(r, \theta) d\theta, \quad (3.35)$$

são os componentes de  $\eta$  com momento angular  $m$ , pertencentes ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_r = L^2([0, \infty), r dr)$ . O hamiltoniano  $H$  deixa os subespaços  $\mathcal{H}_m$  invariantes, o que leva a uma sequencia de hamiltonianos da forma

$$H_m = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{m^2}{r^2} + V(r), \quad (3.36)$$

em  $\mathcal{H}_r$ . A transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  pode ser decomposta como

$$(\mathcal{F}\epsilon)(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} (\mathcal{F}_m \epsilon_m)(r), \quad (3.37)$$

onde  $\mathcal{F}_m$  é um operador unitário

$$(\mathcal{F}_m F)(r) = i^{|m|} \int_0^{\infty} J_{|m|}(kr) F(k) k dk, \quad (3.38)$$

onde  $\mathcal{H}_k = L^2([0, \infty), k dk)$ . Correspondentemente, consideramos uma sequência de operadores de onda de  $\mathcal{H}_k$  em  $\mathcal{H}_r$ , tal que

$$W_{\pm, m} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iH_m t} \mathcal{F}_m e^{-ik^2 t}. \quad (3.39)$$

Como  $W_{\pm, m}$  existem e são completos em cada setor  $m$ , temos a seguinte relação com a abordagem independente do tempo

$$(W_{\pm, m} F)(r) = i^{|m|} \int_0^{\infty} \Psi_m(kr) e^{\mp i\delta_m(k)} F(k) k dk. \quad (3.40)$$

A correspondente matriz  $S$ , cujos elementos são

$$S_m = W_{+, m}^* W_{-, m}, \quad (3.41)$$

isto é,  $S_m$  é simplesmente o operador de multiplicação de  $e^{2i\delta_m(k)}$  em  $\mathcal{H}_k$ .

A definição do operador de onda (3.16) pode ser escrito como

$$(W_{\pm} \epsilon)(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} (W_{\pm, m} \epsilon_m)(r). \quad (3.42)$$

Da mesma forma, o operador de espalhamento  $S : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$  é encontrado da forma que satisfaça a expressão

$$\begin{aligned}
\langle \epsilon, Sh \rangle &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{\epsilon}_m(k) S_m(k) h_m(k) k dk \\
&= \langle \epsilon, h \rangle + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk \int_{-\pi}^{\pi} d\theta d\theta' e^{im(\theta-\theta')} \bar{\epsilon}(k, \theta) h(k, \theta') (e^{2i\delta_m(k)} - 1) \\
&= \langle \epsilon, h \rangle + \int_0^{\infty} k dk \int_{-\pi}^{\pi} d\theta d\theta' \bar{\epsilon}(k, \theta) h(k, \theta') \left( \frac{ik}{2\pi} \right)^{1/2} f(k, \theta - \theta'), \tag{3.43}
\end{aligned}$$

para todo  $\epsilon, h \in \mathcal{H}_0$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  significa o produto interno em  $\mathcal{H}_0$ , e então

$$(S - 1)(k, \theta) = \left( \frac{ik}{2\pi} \right)^{1/2} f(k, \theta), \tag{3.44}$$

esta expressão, é a relação correta entre  $f$  e  $S$ .

### 3.3 Amplitude de espalhamento e seção de choque

A teoria do espalhamento para um solenoide é rigorosamente formulado por Ruijsenaars [37]. Em seu artigo é considerado um solenoide magnético infinitamente longo, eletricamente blindado, e um elétron se movendo para fora do solenoide. Desta forma é calculado como uma onda plana incidente é espalhada pelo solenoide, ou seja, é encontrada a amplitude de espalhamento para este problema, no caso limite considerando um solenoide de espessura zero, correspondendo assim, a um “fio de fluxo”. Vamos abordar alguns detalhes desse procedimento.

Para iniciar o nosso estudo vamos considerando um campo magnético da forma

$$\vec{B}(x, y, z) = (0, 0, B(r)), \tag{3.45}$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2$  e  $B(r)$  é nulo para  $r \geq R$ , onde  $R$  é o raio do solenoide e  $r$  a distancia da partícula ate o centro do solenoide. O fluxo magnético  $\Phi_m$  através de um plano  $x - y$  é dado por

$$\Phi_m = 2\pi \int_0^R r B(r) dr, \tag{3.46}$$

e o potencia vetor magnético para  $r \geq R$  pode ser tomado como

$$\vec{A} = \frac{\Phi_m}{2\pi r^2}. \tag{3.47}$$

Assim na condição de  $r \geq R$  a Hamiltoniana correspondente para uma partícula de massa  $1/2$  e carga  $q$  pode ser escrita em coordenadas polares como ( $\hbar \equiv 1$ )

$$H(\alpha) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( i \frac{\partial}{\partial \theta} - \alpha \right)^2. \quad (3.48)$$

Aqui, temos que

$$\alpha = -\frac{q\Phi_m}{2\pi}, \quad (3.49)$$

e desconsideramos a coordenada  $z$  aqui se torna irrelevante.

Vamos agora considerar o caso limite onde  $R = 0$  (correspondente a um “fio de fluxo”). O espaço das funções de onda  $\mathcal{H}$  é então o espaço de posição usual nas coordenadas polares,  $\mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_\theta$  onde  $\mathcal{H}_r = L^2([0, \infty), r dr)$ , e  $\mathcal{H}_\theta = L^2((-\pi, \pi), d\theta)$ . Para  $\alpha = 0$ ,  $H(\alpha)$  é o laplaciano usual em coordenadas polares representando a energia cinética para uma partícula livre, que é multiplicado por  $k^2$  no espaço de momentos  $\mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_\theta$  após uma transformação de Fourier. Mais detalhadamente  $i \frac{\partial}{\partial \theta}$  pode ser substituído por  $-m$  em cada subespaço do momento angular  $\mathcal{H}_m$ , e o operador diferencial resultante  $H_m$  em  $\mathcal{H}_r$  se transforma multiplicando por  $k^2$  em  $\mathcal{H}_k$  se usarmos o mapeamento unitário  $\mathcal{F}_m$ .

Para  $\alpha \neq 0$ , entretanto o argumento  $i \frac{\partial}{\partial \theta}$  tem o mesmo comportamento para o caso  $\alpha = 0$ , então pode ser substituído por  $-m$  em  $\mathcal{H}_m$ . Isto pode ser descrito como uma sequencia de Hamiltonianos

$$H_{m\alpha} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \alpha)^2}{r^2} \quad (3.50)$$

em  $\mathcal{H}_r$ . Assim a equação radial de Schrodinger para o momento angular  $m$ , pode ser escrita como

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \alpha)^2}{r^2} \right) \Psi = k^2 \Psi. \quad (3.51)$$

A solução regular na origem é a função de Bessel  $J_{|m+\alpha|}(kr)$ , cujo comportamento assintótico é dado da seguinte forma

$$J_{|m+\alpha|}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left( kr - \frac{|m + \alpha|}{2} \pi - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.52)$$

Comparando com (3.30), concluímos que o deslocamento de fase depende apenas de  $\alpha$  e é dado por

$$\delta_m(\alpha) = \frac{\pi}{2} (|m| - |m + \alpha|), \quad (3.53)$$

assim, o correspondente operador de espalhamento é

$$e^{2i\delta_m(\alpha)} = \begin{cases} e^{-i\pi\alpha}, & m \geq -\alpha \\ e^{i\pi\alpha}, & m \leq -\alpha \end{cases} \quad (3.54)$$

Note que  $e^{2i\delta_m(\alpha)}$  é igual à 1 ou -1 para  $\alpha$  inteiro par ou ímpar respectivamente. A relação (3.54) pode ser compreendida intuitivamente da seguinte forma: as funções de onda com momento angular positivo “circundam” a origem no sentido horário, o potencial  $\vec{A}$  cria uma espécie de “vorticidade”  $-\alpha$ , que induz as funções de onda com  $m$  maior que  $-\alpha$  contornarem a origem no sentido anti-horário. O oposto ocorre para a função de onda com momento angular negativo que circunda a origem no sentido anti-horário, por sua vez o potencial  $\vec{A}$  cria uma “vorticidade” que induz as funções de onda com  $m$  menor que  $-\alpha$  contornarem a origem no sentido horário.

Então, os coeficientes de Fourier de  $f_\alpha$  na expressão (3.33) têm módulo constante e não desaparecem com  $|m| \rightarrow \infty$ ; deste modo, a amplitude de espalhamento  $f_\alpha$  é vista como uma distribuição. Para obter a amplitude de espalhamento associada ao deslocamento de fase (4.24), note que a correspondência do operador  $S$  em  $\mathcal{H}_0$  satisfaz a seguinte relação [37]

$$(S_\alpha \epsilon)(k, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} s_\alpha(\theta - \theta') \epsilon(k, \theta') d\theta', \quad (3.55)$$

onde,

$$s_\alpha(\theta) = \delta(\theta) \cos(\pi\alpha) + i \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} e^{-i[\alpha]\theta} \frac{P}{e^{i\theta} - 1}, \quad (3.56)$$

onde,  $[\alpha]$  é o maior número inteiro menor ou igual a  $\alpha$  e  $P$  é o valor principal. Essas expressões e a relação (3.44) descritos no final da seção anterior, implicam na seguinte expressão para a amplitude de espalhamento

$$f_\alpha(k, \theta) = \left( \frac{2\pi}{ik} \right)^{1/2} \left[ \delta(\theta) (\cos(\pi\alpha) - 1) + i \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} e^{-i[\alpha]\theta} \frac{P}{e^{i\theta} - 1} \right]. \quad (3.57)$$

Agora, se  $\theta \neq 0$  a distribuição  $f_\alpha$  é representada pela função

$$f_\alpha(k, \theta) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{(2\pi ik)^{1/2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)}, \quad (3.58)$$

e a seção de choque de espalhamento diferencial (3.23) para este caso é dado por

$$\left( \frac{d\sigma}{d\theta} \right)_\alpha(k, \theta) = \frac{1}{2\pi k} \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \theta \neq 0, \quad (3.59)$$

que concordam com as expressões encontradas por Aharonov e Bohm [17] e também por outros autores, por exemplo em [41].

# Capítulo 4

## Efeito Aharonov-Bohm em um vórtice de drenagem

Neste capítulo introduzimos o modelo de vórtice de drenagem, também conhecido na literatura como “draining bathtub” (banheira de drenagem). Escrevemos a métrica acústica e a equação de onda, descrevendo a propagação do som neste modelo, comparamos o efeito proveniente da absorção com o efeito Aharonov-Bohm descrito no capítulo 3.

### 4.1 Equações básicas

A métrica acústica que descreve a propagação das ondas sonoras em um fluxo de fluido para um vórtice de drenagem como descrito no capítulo 2 é:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{D^2 + C^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{2D}{r} dr dt - 2C d\theta dt + dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (4.1)$$

Aqui já definimos a velocidade do som  $c_s$  como 1, temos também que  $D$  e  $C$  são constantes arbitrárias reais e positivas relacionadas as componentes radial e angular para uma velocidade de fluido de fundo da forma:

$$\vec{v} = -\frac{D\hat{r}}{r} + \frac{C\hat{\theta}}{r}. \quad (4.2)$$

Esta velocidade de fluxo pode ser obtida a partir do gradiente da velocidade potencial,  $\vec{v} = \nabla\psi$ , onde  $\psi = -D \log(r/a) + C\theta$ .



### 4.1.1 Espaço-tempo efetivo

O espaço tempo, descrito pela métrica (4.1), pode ser alternativamente expresso por um novo sistema de coordenadas. Essas novas coordenadas podem ser encontradas ao completar quadrado no elemento de linha (4.1), e organizando os termos de tal forma que podemos chegar ao seguinte resultado,

$$d\tilde{t} = dt - \frac{Ddr}{rf(r)} \quad e \quad d\tilde{\theta} = d\theta - \frac{CDdr}{r^3f(r)}, \quad (4.3)$$

onde  $f(r) = 1 - \frac{D^2}{r^2}$ .

Substituindo essas novas coordenadas em (4.1) obtemos um novo elemento de linha,

$$ds^2 = \left( f(r) - \frac{C^2}{r^2} \right) d\tilde{t}^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\tilde{\theta}^2 + 2C\tilde{\theta}d\tilde{t}, \quad (4.4)$$

neste novo elemento de linha a uma inversão na assinatura da métrica com relação a (4.1). O raio da ergoesfera é dado por  $g_{00}(r_e) = 0$ , enquanto o horizonte de eventos é dado pela singularidade de coordenadas  $g_{rr}(r_h) = 0$ , isto é

$$1 - \frac{D^2}{r_h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_h = D, \quad (4.5)$$

$$1 - \frac{D^2 + C^2}{r_e^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_e = \sqrt{r_h^2 + C^2} = \sqrt{D^2 + C^2}. \quad (4.6)$$

A métrica pode ser escrita da forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) - \frac{C^2}{r^2} & 0 & C \\ 0 & -f(r)^{-1} & 0 \\ C & 0 & -r^2 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

com a determinante  $\det(g_{\mu\nu}) = r^2$  e a inversa  $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r)^{-1} & 0 & \frac{C}{f(r)r^2} \\ 0 & -f(r) & 0 \\ \frac{C}{f(r)r^2} & 0 & \left( \frac{C^2}{r^2} - f(r) \right) \frac{f(r)^{-1}}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Considerando a equação de Klein-Gordon para uma perturbação acústica linear  $\psi(t, r, \theta)$  para a métrica (4.8),

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left( \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \psi = 0. \quad (4.9)$$

Abrindo os termos da equação obtemos,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{r^2}} \partial_0 \left( \sqrt{r^2} g^{00} \partial_0 \right) \psi + \frac{2}{\sqrt{r^2}} \partial_0 \left( \sqrt{r^2} g^{0\theta} \partial_\theta \right) \psi + \frac{1}{\sqrt{r^2}} \partial_r \left( \sqrt{r^2} g^{rr} \partial_r \right) \psi \\ & + \frac{1}{\sqrt{r^2}} \partial_\theta \left( \sqrt{r^2} g^{\theta\theta} \partial_\theta \right) \psi = 0, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$f(r)^{-1} \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{2f(r)^{-1}}{r^2} \frac{d}{dt} \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r f(r) \frac{d}{dr} \right) \psi + \left( \frac{C^2}{r^2} - f(r) \right) \frac{f(r)^{-1}}{r^2} \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} = 0. \quad (4.10)$$

A partir dos componentes da métrica do vórtice de drenagem, fica claro que o espaço-tempo curvo (2+1) dimensões possui isometrias que correspondem a translações no tempo e rotações no plano. A solução da equação de Klein Gordon para termos sem massa pode, portanto, ser escrita como,

$$\psi(t, r, \theta) = H(r) e^{i(\omega t - m\theta)}, \quad (4.11)$$

onde  $\omega$  e  $m$  são reais e positivos. Fazendo a substituição de  $\psi(t, r, \theta)$  temos,

$$\begin{aligned} & -f(r)^{-1} \omega^2 H(r) + \frac{2C\omega m}{r^2} f(r)^{-1} H(r) - \left( \frac{C^2}{r^2} - f(r) \right) \frac{f(r)^{-1}}{r^2} m^2 H(r) \\ & - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r f(r) \frac{d}{dr} \right) H(r) = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d^2 H(r)}{dr^2} + \frac{f(r)^{-1}}{r} \left( \frac{r^2 + D^2}{r^2} \right) \frac{dH(r)}{dr} + f(r)^{-2} \left[ \left( \omega - \frac{Cm}{r^2} \right)^2 - f(r) \frac{m^2}{r^2} \right] H(r) = 0. \quad (4.12)$$

### 4.1.2 Coordenadas tortoise

Para facilitar a solução da equação radial (4.12) reduzimos em uma equação tipo de Schrödinger, ou seja, eliminamos a parte de derivada segunda na expressão, para fazer isto introduzimos as coordenadas tortoise (tartaruga)  $r_*$  que é definida pela condição

$$dr_* = \left( 1 - \frac{D^2}{r^2} \right)^{-1} dr, \quad (4.13)$$

$$r_* = r + \frac{D}{2} \log \left[ \frac{r-D}{r+D} \right]. \quad (4.14)$$

Usando a relação  $H(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} G(r_*)$ <sup>1</sup> podemos transformar a equação (4.12) em uma equação tipo de Schrödinger. Reescrevendo a equação (4.12) temos,

<sup>1</sup>Detalhes desta relação entre as coordenadas encontra-se no Apêndice A

$$\frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \left[ f(r) \left( \frac{(r^2 - D^2)}{r^2} \frac{3}{4r^2} - \frac{1}{2r} \frac{r^2 + D^2}{r^3} \right) + \left( \omega - \frac{Cm}{r^2} \right)^2 - f(r) \frac{m^2}{r^2} \right] G(r_*) = 0$$

e

$$\frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \left[ \left( \omega - \frac{Cm}{r^2} \right)^2 + f(r) \left( \frac{r^2 - 5D^2}{4r^4} - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] G(r_*) = 0.$$

Assim ficamos com a seguinte equação radial,

$$\frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \left[ \left( \omega - \frac{Cm}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] G(r_*) = 0, \quad (4.15)$$

onde o potencial é dado por,

$$V(r) = f(r) \left( \frac{m^2 - 1/4}{r^2} + \frac{5D^2}{4r^4} \right).$$

Analisando está equação diferencial em duas regiões distintas, a primeira longe do horizonte sônico  $r \rightarrow \infty$ , e a segunda próximo do horizonte  $r \rightarrow r_h$ . Assim para primeira região assintótica, a equação radial acima pode ser reescrita como,

$$\frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \omega^2 G(r_*) = 0, \quad (4.16)$$

e sua solução é dada por

$$G(r_*) = A_m^{(in)} e^{-i\omega r_*} + A_m^{(re)} e^{i\omega r_*}. \quad (4.17)$$

Note que o primeiro termo da equação acima corresponde a onda incidente e o segundo termo é a onda refletida, assim, o coeficiente de reflexão é dado pela relação  $R_{\omega m} = |A_m^{(re)}|^2 / |A_m^{(in)}|^2$ . De forma similar para uma região assintótica próximo do horizonte a equação radial (4.15) pode ser reescrita aproximadamente como,

$$\frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + (\omega - m\Omega_H)^2 G(r_*) = 0. \quad (4.18)$$

onde  $\Omega_H = C/D^2$  é a velocidade angular para um buraco negro acústico. Impondo a condição de contorno físico que das duas soluções desta equação, apenas a que está entrando é física, de modo que,

$$G(r_*) = A_m^{(tr)} e^{-i(\omega - m\Omega_H)r_*}, \quad (4.19)$$

e  $A^{(tr)}$  é o coeficiente da onda transmitida.

## 4.2 Superradiância

Superradiância é um fenômeno geral na física. A superradiância de movimento inercial refere-se à possibilidade de que um objeto ( eletricamente neutro), dotado de estrutura interna, movendo uniformemente através de um meio, possa emitir fótons mesmo quando iniciado em seu estado fundamental [42]. Alguns exemplos de superradiância de movimento inercial incluem o efeito de Cherenkov, o critério de Landau para o desaparecimento da superfluides e choques de Mach para objetos sólidos viajando através de um fluido [43]. O movimento rotacional não inercial também produz superradiância. Isso foi descoberto por Zel'dovich [44]. Ele apontou que um cilindro feito de material absorvente e girando em torno de seu eixo com frequência  $\Omega$  pode amplificar modos de radiação escalar ou eletromagnética de frequência  $\omega$ , desde que a condição  $\omega < m\Omega$  ( $m$  é o número quântico azimutal com respeito ao eixo de rotação), seja satisfeita.

Há possibilidade de observar superradiância rotacional em buracos negros análogos ou em alguns casos descrito como superressonância por se tratar de fônons. A superradiância foi considerada por Schutzhold e Unruh [14], e mais extensivamente por Basak e Majumdar [45], que calcularam analiticamente os coeficientes de reflexão no limite de baixa frequência. No contexto de análogos, a superradiância inercial baseada no superfluido  ${}^3\text{He}$  foi estudada por Jacobson e Volovik [46].

Uma maneira de provar a existência de superressonância é calcular o Wronskiano da solução de (4.15) e de seu adjunto no horizonte sônico e no infinito. A partir da constância do Wronskiano como uma função da coordenada radial, usando as condições de contorno (4.17) e (4.19) encontramos a seguinte condição de “conservação de energia”:

$$1 - |R_{\omega m}|^2 = \left(1 - \frac{m\Omega_H}{\omega}\right) |T_{\omega m}|^2, \quad (4.20)$$

onde  $T_{\omega m}$  e  $R_{\omega m}$  são os coeficientes de amplitude de transmissão e reflexão respectivamente para a onda espalhada. Desta forma, se  $\omega < m\Omega_H$  o coeficiente de reflexão  $|R_{\omega m}|^2 > 1$ , temos superradiância.

Os resultados numéricos <sup>2</sup> para a métrica em estudo são mostrados na Figura 4.1. O gráfico a esquerda mostra o coeficiente de reflexão em função de  $\omega$  para  $m = 1$ , e o gráfico a direita para  $m = 2$ , para determinados valores de rotação  $C$ . Perceba que conforme

---

<sup>2</sup>Mais detalhes do método numérico utilizado para o cálculo dos coeficientes de reflexão encontra-se no Apêndice B

aumentamos o valor da razão  $C/D$  a região de frequência onde ocorre a superradiância aumenta, ou seja quanto maior a circulação no vórtice maior o efeito de superradiância para um determinado valor de  $m$ .

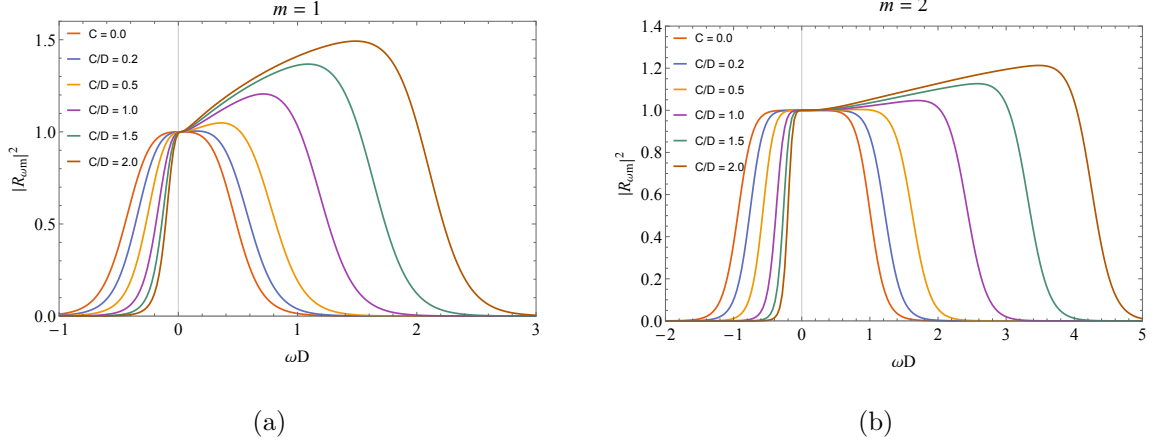


Figura 4.1: Coeficiente de reflexão em função de  $\omega$  para  $m = 1$  (a) e  $m = 2$  (b). As curvas correspondem aos diferentes valores de  $C/D$ . Os gráficos mostram que o coeficiente de reflexão decai exponencial da frequência crítica para superradiância.

## 4.3 Efeito Aharonov-Bohm análogo

### 4.3.1 Teoria do espalhamento em duas dimensões

A teoria do espalhamento em duas dimensões é resumida em [47]. Considerando um espalhamento de uma onda planar monocromática com frequência  $\omega$  dado da forma

$$\psi(t, r, \theta) = e^{-i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m(r) e^{im\theta} / \sqrt{r}, \quad (4.21)$$

de modo que longe do vórtice, a função  $\psi$  pode ser escrita em termos da soma de uma onda planar e uma onda espalhada

$$\psi(t, r, \theta) \sim e^{-i\omega t} (e^{i\omega x} + f_\omega(\theta) e^{i\omega r} / \sqrt{r}). \quad (4.22)$$

Assintoticamente, as soluções assumem a forma (4.17). A onda plana pode ser decomposta em  $e^{i\omega x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\omega r) e^{im\theta}$  e  $J_m(\omega r)$  é uma função de Bessel de primeira espécie. Usando isso, junto com a forma assintótica das funções de Bessel, descobre-se que a amplitude de espalhamento é dada na forma de uma onda parcial

$$f_\omega(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\omega}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m} - 1) e^{im\theta}, \quad (4.23)$$

onde o deslocamento de fase  $\delta_m$  é definido por

$$e^{2i\delta_m} = i(-1)^m \frac{A_m^{(re)}}{A_m^{(in)}}, \quad (4.24)$$

e os coeficientes  $A^{(in)}$  e  $A^{(re)}$  são encontrados a partir a forma assintótica (4.17). A seção transversal de absorção (com dimensão de comprimento) é

$$\sigma_{abs} = \frac{1}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 - |e^{2i\delta_m}|^2). \quad (4.25)$$

A absorção para ondas planares por um vórtice drenante ou “draining bathtub” é descrita com mais detalhes em [40]. A seção de choque de espalhamento diferencial é obtida diretamente pela amplitude de espalhamento,

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = |f_\omega(\theta)|^2. \quad (4.26)$$

### 4.3.2 Deslocamento de fase aproximado

Para calcularmos o deslocamento de fase, devemos primeiro reescrever a equação (4.15) em termos de uma nova função  $X(r) = \sqrt{f(r)}G(r_*)$ . Para isso, vamos primeiro derivar  $X(r)$  em termo de  $r$ ,

$$\frac{dX(r)}{dr} = \frac{df(r)^{1/2}}{dr}G(r_*) + f(r)^{-1/2} \frac{dG(r_*)}{dr_*}. \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2X(r)}{dr^2} &= \frac{d^2f(r)^{1/2}}{dr^2}G(r_*) + \left( \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)^{1/2}}{dr} + \frac{df(r)^{-1/2}}{dr} \right) \frac{dG(r_*)}{dr_*} \\ &+ \frac{1}{f(r)^{3/2}} \frac{d^2G(r_*)}{dr_*^2}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde,

$$\frac{df(r)^{1/2}}{dr} f(r)^{-1} + \frac{df(r)^{-1/2}}{dr} = \frac{1}{2} f(r)^{-1/2} \frac{2D^2}{r^3} f(r)^{-1} - \frac{1}{2} f(r)^{-3/2} \frac{2D^2}{r^3} = 0.$$

Assim temos,

$$\frac{d^2X(r)}{dr^2} = \frac{d^2f(r)^{1/2}}{dr^2}G(r_*) + f(r)^{-3/2} \frac{d^2G(r_*)}{dr_*^2}, \quad (4.29)$$

Deixando a equação acima em função de  $G(r_*)$  ficamos com

$$\frac{d^2G(r_*)}{dr_*^2} = f(r)^{3/2} \frac{d^2X(r)}{dr^2} - f(r) \frac{d^2f(r)^{1/2}}{dr^2} X(r). \quad (4.30)$$

Substituindo este resultado em (4.15) temos

$$\frac{d^2X(r)}{dr^2} - f(r)^{-1/2} \frac{d^2f(r)^{1/2}}{dr^2} X(r) + \left[ \left( \omega - \frac{C\omega m}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] f(r)^{-2} X(r) = 0. \quad (4.31)$$

Sabendo que a derivada segunda de  $\sqrt{f(r)}$  é dado por:

$$\frac{d^2 f(r)^{1/2}}{dr^2} = - \left( \frac{f(r)^{-3/2} D^4}{r^6} + \frac{3f(r)^{-1/2} D^2}{r^4} \right), \quad (4.32)$$

ao substituirmos este resultado na equação diferencial (4.31), podemos reescrever-la na forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left( \frac{f(r)^{-3/2} D^4}{r^6} + \frac{3f(r)^{-1/2} D^2}{r^4} \right) X(r) \\ + \left[ \left( \omega - \frac{C\omega m}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] f(r)^{-2} X(r) = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Juntando todos os termos que multiplicam  $X(r)$  e fazendo uma expansão em série de potencia ao redor de  $1/r$ , obtemos a seguinte expressão,

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left[ \omega^2 - \frac{\tilde{m}^2 - 1/4}{r^2} + U(r) \right] X(r) = 0, \quad (4.34)$$

onde  $\tilde{m}^2 = m^2 + 2\alpha m - 2\beta^2$  e

$$\begin{aligned} U(r) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)m^2 - 4\beta^2\alpha m + 3\beta^4 + 2\beta^2}{\omega^2 r^4} + \frac{\beta^2(2\alpha^2 - \beta^2)m^2 - 6\beta^4\alpha m + 4\beta^6 + 3\beta^4}{\omega^4 r^6} \\ + \mathcal{O}(\omega^{-6} r^{-8}), \end{aligned}$$

com  $\alpha = C\omega$ ,  $\beta = D\omega$ .

Aplicando a formula aproximada de Born,

$$\delta \approx \frac{\pi}{2}(m - \tilde{m}) + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r [J_{\tilde{m}}(\omega r)]^2 U(r) dr. \quad (4.35)$$

E resolvendo a integral desta equação e expandindo os termos no limite  $|m| \gg \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , é possível encontrar uma forma aproximada para o deslocamento de fase definida pela equação (4.24). Os primeiros termos da expressão encontrada são dados por,

$$\delta_m \approx -\frac{\alpha\pi}{2} \frac{m}{|m|} + \frac{3\pi(\alpha^2 + \beta^2)}{8|m|} - \frac{5\alpha\pi(\alpha^2 + \beta^2)}{8m^2} \frac{m}{|m|}. \quad (4.36)$$

Observe que o resultado para o modo  $m = 0$  não é valido, mas nos limites para  $m \rightarrow \pm\infty$  o primeiro termo na equação (4.36) implica que o deslocamento de fase tende à uma constante diferente de zero. Tal resultado culmina no efeito Aharonov-Bohm [48]. Entretanto para o modo isotrópico  $m = 0$  pela equação (4.15) obtemos uma solução com a forma

$$G_{m=0}(r_*) = r^{1/2} e^{\beta\pi/2} J_{i\beta}(\omega r f^{1/2}), \quad (4.37)$$

e um deslocamento de fase imaginário

$$\delta_{m=0} = \frac{1}{2}i\pi\beta. \quad (4.38)$$

Com este valor podemos encontrar a absorção para  $m = 0$  usando a fórmula (4.25), e assim verificamos que para baixas frequências, a absorção de comprimento é igual a uma circunferência de um buraco acústico, ou seja,  $\sigma_{abs} \approx 2\pi D$ .

A Figura 4.2 mostra os resultados numéricos<sup>3</sup> obtidos para reflexão Figura 4.2(a) e absorção Figura 4.2(b) para o caso de  $C = 0$ . Note que para  $m = 0$  o gráfico corta o eixo vertical em  $2\pi$  como deve ser para o limite de baixas frequências ( $\sigma_{abs}/D \approx 2\pi \approx 6.28$ ). Como esperado, no caso estático ( $C = 0$ ), a absorção parcial da onda é independente do sinal de  $m$ . Na parte de baixo temos os resultados para  $C/D = 1$ , aqui a presença da circulação causa o efeito de superradiância como pode ser visto nitidamente para o modulo  $m = 1$  tanto na Reflexão Figura 4.2(c) com valores acima de 1, quanto para a absorção 4.2(d) com valores negativos.

Assim, usando (4.36) e (4.38) na expressão da amplitude de espalhamento (4.23), considerando ordens mais baixas de  $\alpha$  e  $\beta$ , ou seja, (4.36) fica da forma  $\delta_m = -\frac{\alpha\pi}{2} \frac{m}{|m|}$ , obtemos

$$f_\omega(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\omega}} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{-1} (e^{-i\alpha(m/|m|)} - 1) e^{im\theta} + (e^{-\pi\beta} - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} (e^{-i\alpha(m/|m|)} - 1) e^{im\theta} \right\},$$

$$f_\omega(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\omega}} \left\{ (e^{-\pi\beta} - 1) + \frac{(1 + e^{-i\alpha\pi+i\theta})(-1 + e^{i\alpha\pi})}{-1 + e^{i\theta}} \right\}. \quad (4.39)$$

Tomando a aproximação  $(e^{-\pi\beta} - 1) \approx -\pi\beta$  e usando a formula de Euler no segundo termo, chegamos a seguinte expressão

$$f_\omega(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\omega}} \left( \frac{-\pi\beta + \alpha\pi \cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right), \quad (4.40)$$

assim, a seção de choque de espalhamento diferencial fica da forma

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\theta} = |f_\omega(\theta)|^2 \simeq \frac{\pi}{2\omega} \frac{[-\beta \sin(\theta/2) + \alpha \cos(\theta/2)]^2}{\sin^2(\theta/2)}. \quad (4.41)$$

Considerando agora  $\beta = 0$  (no limite sem drenagem), temos o resultado para o vórtice de Fetter [48]

---

<sup>3</sup>Mais detalhes do método numérico utilizado para o calculo dos coeficientes de reflexão encontra-se no Apêndice B



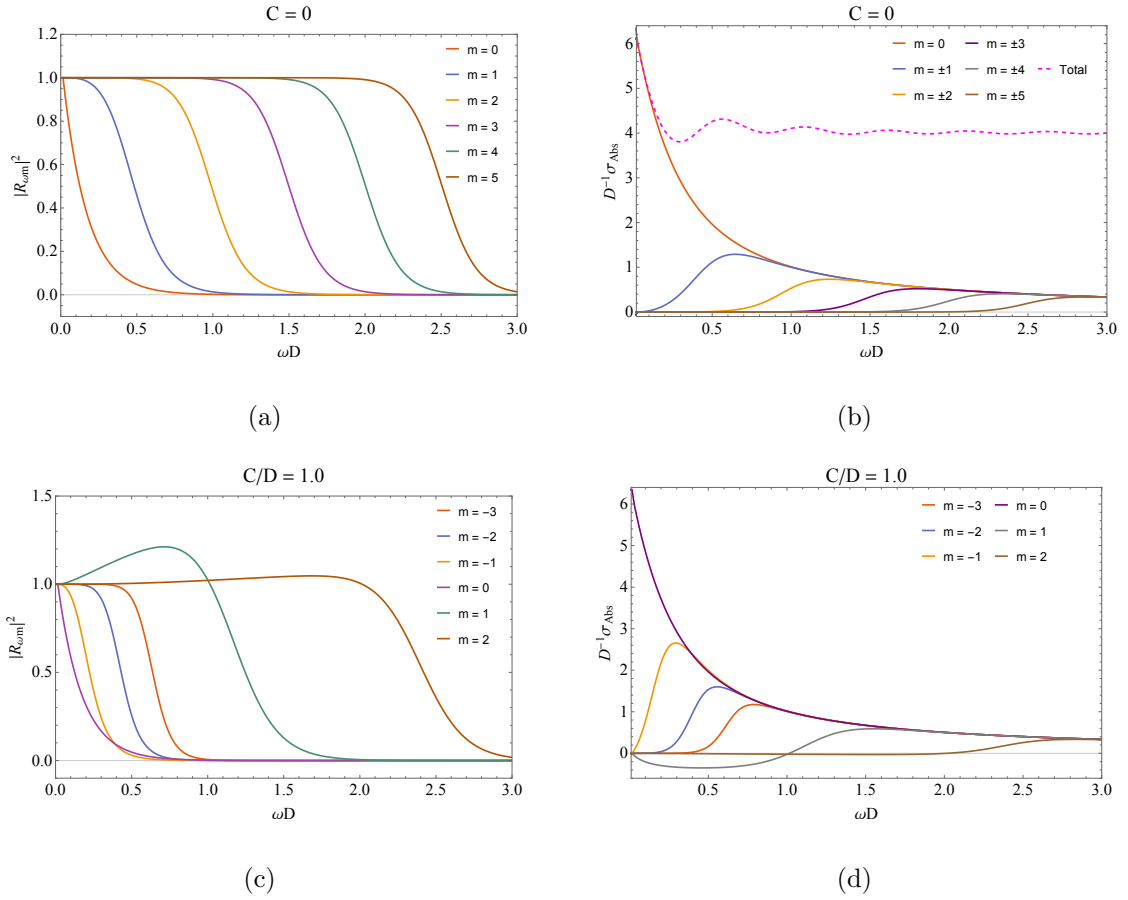


Figura 4.2: Coeficiente de reflexão em função de  $\omega$  para  $C = 0$  (sem rotação) (a) a absorção  $\sigma_{abs}$  em função de  $\omega$  correspondente a cada reflexão (b). As curvas correspondem aos diferentes valores do ângulo azimutal  $m$  de 0 até 5. Em (b) é possível observar (curva pontilhada) que a absorção total converge para o limite de altas frequências.

$$\frac{d\sigma_{vortice}}{d\theta} = \frac{\alpha^2 \pi}{2\omega} \cot^2(\theta/2), \quad (4.42)$$

Fazendo as devidas expansões, podemos ver que o valor encontrado é semelhante ao efeito Aharonov-Bohm, discutido no capítulo 3,

$$\frac{d\sigma_{AB}}{d\theta} = \frac{1}{2\pi\omega} \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{\sin^2(\theta/2)}. \quad (4.43)$$

A Figura 4.3 mostra o comprimento de espalhamento para baixas frequências em função do ângulo de espalhamento, usando as equações (4.41) e (4.43) podemos comparar os dois efeitos. Note que para  $\beta$  igual a zero o efeito análogo ( $\alpha\beta$ ) se ajusta ao efeito quântico (AB) verificando assim uma simetria entre os efeitos. Esta simetria é quebrada quando a drenagem é ligada (cinza), e se torna mais forte à medida que aumentamos o valor de  $\beta$ .

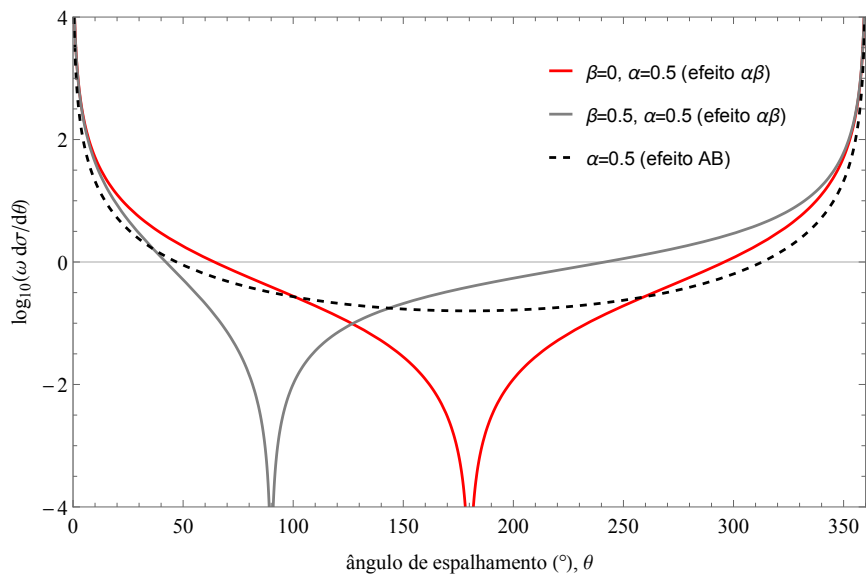


Figura 4.3: Vórtice de espalhamento para baixas frequências, efeito análogo (vermelha e cinza) e efeito AB quântico (preto tracejado). Sem drenagem o efeito análogo fica simétrico ao efeito quântico, quando é inserido um valor de drenagem a simetria é perdida.

# Capítulo 5

## Efeito Aharonov-Bohm análogo modificado

Neste capítulo, introduzido termos de altas derivadas, usando o modelo abeliano de Higgs para o caso não-relativístico. Pretendemos investigar alguns efeitos como o espalhamento e a seção de choque de espalhamento diferencial para essa nova métrica.

### 5.1 Modelo

Nessa nova abordagem consideramos uma lagrangiana para o modelo abeliano de Higgs incluindo termos invariantes de calibre (gauge) e altas derivadas. Portanto, devemos considerar a seguinte forma para a lagrangiana [20]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + (D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi + M^2\varphi^\dagger\varphi + \frac{1}{\Lambda_0^2} (D_\mu D^\mu\varphi)^\dagger (D_\nu D^\nu\varphi) - b|\varphi|^4, \quad (5.1)$$

onde temos  $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi$  e  $\Lambda_0$  é um parâmetro com dimensão de massa. O campo descreve a densidade do superfluido de tal forma que  $\int |\varphi|^2 d^3x = N$  é o número total de átomos (no limite não-relativístico).

O termo de derivada superior no lagrangiano corresponde à relação de dispersão de fônons em condensados atômicos de Bose-Einstein. Essa relação de dispersão é análoga àquela anteriormente considerado em buracos negros acústicos [49] para abordar vários problemas, como física de distâncias ultracurtas.

Agora, para encontrar a métrica acústica do buraco negro, usamos a decomposição  $\varphi = \sqrt{\rho}e^{iS}$  na lagrangiana original e negligenciando os termos de ordem  $O(\square\sqrt{\rho})$  (que pode ser negligenciado em uma região hidrodinâmica), obtemos [50]

$$\mathcal{L} = \frac{F^2}{4} + (u^2 + M^2) \rho - b\rho^2 + \frac{\rho}{\Lambda_0^2} [(\square S)^2 + (\partial_\mu S)^4 + e^2 A^2 (2u^2 - e^2 A^2) - 4e A^\mu u^\nu \partial_\mu S \partial_\nu S], \quad (5.2)$$

onde  $u_\mu = \partial_\mu S - eA_\mu$ ,  $A^2 = A_\mu A^\mu$  e  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  é o operador d'Alambertiano em um espaço de Minkowski. Em um sistema de superfluido, temos um vórtice quântico como um buraco com o superfluido circulando ao redor do vórtice com uma diferença de fase em torno do vórtice dado por  $\Delta S = 2n\pi$ .

Usando a lagrangiana (5.2) e linearizando as equações de movimento ao redor do fundo  $(\rho_0, S_0)$  com  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  e  $S = S_0 + \psi$ , enquanto o campo vetorial  $A_\mu$  permanece inalterado, encontramos a equação de movimento para a perturbação acústica linear dada por uma equação de Klein-Gordon em um espaço curvo com uma derivada superior

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi = \frac{1}{\Lambda_0^2} \partial_\mu (\rho_0 \partial^\mu \square \psi), \quad (5.3)$$

onde os índices  $\mu = t, x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Em seguida definimos  $c_s^2 = b\rho_0/2w_0^2$  (velocidade local do som no fluido),  $v^i = v_0^i/w_0$  (velocidade do fluxo),  $v_0^2 = \nabla S_0 + e\vec{A}$ ,

$$w_0 = -S_0 + eA_t, \quad e \quad \Lambda^2 = \Lambda_0^2/w_0^2. \quad (5.4)$$

Em termos da inversa de  $g^{\mu\nu}$  obtemos a métrica para um buraco negro acústico, negligenciando termos de ordem  $O(1/\Lambda^4)$ , encontramos [20]

$$\begin{cases} g_{00} = -(c_s^2 - v^2) - \frac{(2c_s^2 - 4v^2 + 4v^4 - 6c_s^2 v^2)}{\Lambda^2}; \\ g_{0i} = g_{i0} = -v^i - \frac{4}{\Lambda^2} (1 + c_s^2 - v^2) v^i; \\ g_{ij} = \left(1 + \frac{4}{\Lambda^2}\right) (1 + c_s^2 - v^2) \delta^{ij} + v^i v^j + \frac{2c_s^2}{\Lambda^2} (1 - v^2) \delta^{ij}; \end{cases} \quad (5.5)$$

Esta métrica acústica depende apenas da densidade  $\rho_0$ , a velocidade do som local no fluido  $c_s$  e a velocidade do fluxo  $v$ . Tomando o limite  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  o resultado em [50] é recuperado.

## 5.2 Buraco negro acústico para nova métrica

O elemento de linha acústico em coordenadas polares em um plano com simetria de Lorentz no limite não-relativístico ( $v^2 \ll c_s^2$ ), é dado por.

$$ds^2 = \left[ \left(1 + \frac{2}{\Lambda^2}\right) c_s^2 - \left(1 + \frac{4}{\Lambda^2}\right) v^2 \right] dt^2 + 2 \left(1 + \frac{4}{\Lambda^2}\right) v^r dt dr + 2 \left(1 + \frac{4}{\Lambda^2}\right) v^\theta dt r d\theta - \left(1 + \frac{4}{\Lambda^2}\right) dr^2 - \left(1 + \frac{4}{\Lambda^2}\right) r^2 d\theta^2. \quad (5.6)$$

Da mesma forma como foi feito no capítulo 4 consideramos um fluxo com velocidade potencial  $\psi(r, \theta) = -D \log(r/a) + C\theta$ , cujo perfil de velocidade em coordenadas polares em um plano é dado por,

$$\vec{v} = -\frac{D}{r} \hat{r} + \frac{C}{r} \hat{\theta}. \quad (5.7)$$

Tomando novamente a velocidade do som  $c_s = 1$  e deixando o termo  $\left(1 + \frac{2}{\Lambda^2}\right)$  em evidência, o elemento de linha fica da seguinte forma,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{\Lambda^2}\right) \left\{ \left[ 1 - \left(\frac{\Lambda^2 + 4}{\Lambda^2 + 2}\right) \left(\frac{D^2}{r^2} + \frac{C^2}{r^2}\right) \right] dt^2 - 2 \left(\frac{\Lambda^2 + 4}{\Lambda^2 + 2}\right) \frac{D}{r} dt dr + 2 \left(\frac{\Lambda^2 + 4}{\Lambda^2 + 2}\right) \frac{C}{r} dt r d\theta - \left(\frac{\Lambda^2 + 4}{\Lambda^2 + 2}\right) dr^2 - \left(\frac{\Lambda^2 + 4}{\Lambda^2 + 2}\right) r^2 d\theta^2 \right\}. \quad (5.8)$$

Para reduzir essa expressão e facilitar o desenvolvimento de cálculos futuros, definimos  $\tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda^2 + 4}{\Lambda^2 + 2}$ , assim temos,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{\Lambda^2}\right) \left[ \left(1 - \tilde{\Lambda} \frac{D^2}{r^2}\right) dt^2 - \tilde{\Lambda} \frac{C^2}{r^2} dt^2 - 2\tilde{\Lambda} \frac{D}{r} dt dr + 2\tilde{\Lambda} C dt d\theta - \tilde{\Lambda} dr^2 - \tilde{\Lambda} r^2 d\theta^2 \right]. \quad (5.9)$$

O passo seguinte é definir as transformações de coordenadas, para isso reescrevemos a equação (5.9) completando quadrado para  $dt$ , o que nos leva a

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{\Lambda^2}\right) \left[ f(r) \left( dt - \tilde{\Lambda} \frac{D}{r f(r)} dr \right)^2 - \tilde{\Lambda}^2 \frac{D^2}{r^2 f(r)} dr^2 - \tilde{\Lambda} \frac{C^2}{r^2} dt^2 + 2\tilde{\Lambda} C dt d\theta - \tilde{\Lambda} dr^2 - \tilde{\Lambda} r^2 d\theta^2 \right], \quad (5.10)$$

onde  $f(r) = 1 - \tilde{\Lambda} \frac{D^2}{r^2}$ . Agora definindo os primeiros termos que aparecem elevado ao quadrado na expressão acima da forma  $d\tilde{t} = dt - \tilde{\Lambda} \frac{D}{r f(r)} dr$ , e substituído os valores de  $dt$  temos,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{\Lambda^2}\right) \left[ f(r) d\tilde{t}^2 - \tilde{\Lambda}^2 \frac{D^2}{r^2 f(r)} dr^2 - \tilde{\Lambda} \frac{C^2}{r^2} \left( d\tilde{t} + \tilde{\Lambda} \frac{D}{r f(r)} dr \right)^2 + 2\tilde{\Lambda} C \left( d\tilde{t} + \tilde{\Lambda} \frac{D}{r f(r)} dr \right) d\theta - \tilde{\Lambda} dr^2 - \tilde{\Lambda} r^2 d\theta^2 \right]. \quad (5.11)$$

Já temos a relação entre  $dt$  e  $d\tilde{t}$ , queremos agora relacionar  $d\theta$  com uma nova coordenada, para isso organizamos os termos da seguinte forma,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{\Lambda^2}\right) \left[ f(r)d\tilde{t}^2 - \tilde{\Lambda}^2 \frac{D^2}{r^2 f(r)} dr^2 - \tilde{\Lambda} r^2 d\tilde{\theta}^2 + 2\tilde{\Lambda} C d\tilde{\theta} d\tilde{t} - \tilde{\Lambda} \frac{C^2}{r^2} d\tilde{t}^2 - \tilde{\Lambda} dr^2 \right], \quad (5.12)$$

onde  $d\tilde{\theta} = d\theta - \tilde{\Lambda} \frac{CD}{r^3 f(r)} dr$ .

Com isso temos que as transformações de coordenadas temporal e do ângulo azimutal são as seguintes:

$$d\tilde{t} = dt - \tilde{\Lambda} \frac{D}{r f(r)} dr, \quad (5.13)$$

$$d\tilde{\theta} = d\theta - \tilde{\Lambda} \frac{CD}{r^3 f(r)} dr. \quad (5.14)$$

Reescrevendo a expressão (5.12) nessas novas coordenadas, temos

$$ds^2 = \left(1 + \frac{4}{\Lambda^2}\right) \left[ \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left(1 - \tilde{\Lambda} \frac{D^2 + C^2}{r^2}\right) d\tilde{t}^2 - \left(1 - \tilde{\Lambda} \frac{D^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\tilde{\theta}^2 + 2C d\tilde{\theta} d\tilde{t} \right].$$

Podemos ainda definir um  $d\tilde{s}^2$  da forma  $d\tilde{s}^2 = \left(1 + \frac{4}{\Lambda^2}\right) ds^2$ , para obter a seguinte expressão

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left(1 - \tilde{\Lambda} \frac{D^2 + C^2}{r^2}\right) d\tilde{t}^2 - \left(1 - \tilde{\Lambda} \frac{D^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\tilde{\theta}^2 + 2C d\tilde{\theta} d\tilde{t}, \quad (5.15)$$

A partir da equação acima observamos que o raio da ergoesfera é dado por  $g_{00}(r_e) = 0$ , enquanto o horizonte de eventos é dado pela singularidade de coordenadas  $g_{rr}(r_h) = 0$ , isto é

$$1 - \tilde{\Lambda} \frac{D^2}{r_h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_h = \sqrt{\tilde{\Lambda}|D|}; \quad (5.16)$$

$$1 - \tilde{\Lambda} \frac{D^2 + C^2}{r_e^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_e = \sqrt{r_h^2 + \tilde{\Lambda} C^2}. \quad (5.17)$$

A métrica pode agora ser escrita da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right) & 0 & C \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_h^2}{r^2}\right)^{-1} & 0 \\ C & 0 & -r^2 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

sua métrica inversa é dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}f(r)^{-1} & 0 & \tilde{\Lambda}\frac{C}{r^2}f(r)^{-1} \\ 0 & -f(r) & 0 \\ \tilde{\Lambda}\frac{C}{r^2}f^{-1} & 0 & \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right)\frac{f(r)^{-1}}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

sendo  $f(r) = 1 - \tilde{\Lambda}\frac{D^2}{r^2} = 1 - \frac{r_h^2}{r^2}$ .

Agora consideremos a equação de Klein-Gordon para uma perturbação acústica linear  $\psi(t, r, \theta)$  na métrica (5.19), cuja forma é

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu \left( \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi \right) = 0, \quad (5.20)$$

onde  $g$  é a determinante da métrica. Desenvolvendo a equação de Klein-Gordon obtemos

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\frac{C}{r^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right) - \frac{1}{\tilde{\Lambda}}\left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi}{d\theta^2} - \frac{1}{\tilde{\Lambda}}\frac{f(r)}{r}\frac{d}{dr}\left(rf(r)\frac{d}{dr}\right)\psi = 0. \quad (5.21)$$

Podemos fazer uma separação de variável na equação acima da seguinte forma  $\psi(r, t, \theta) = H(r)e^{-i(m\theta - \omega t)}$ . Fazendo a substituição dessa solução na equação (5.21) obtemos,

$$-\omega^2 H(r) + 2\frac{C}{r^2}m\omega H(r) + \frac{1}{\tilde{\Lambda}}\left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right)\frac{m^2}{r^2}H(r) - \frac{1}{\tilde{\Lambda}}\frac{f(r)}{r}\frac{d}{dr}\left(rf(r)\frac{d}{dr}\right)H(r) = 0. \quad (5.22)$$

Sabendo que,

$$\frac{f(r)}{r}\frac{d}{dr}\left(rf(r)\frac{d}{dr}\right)H(r) = \left[1 + \tilde{\Lambda}\frac{D^2}{r^2}\right]\frac{dH(r)}{dr} + rf(r)\frac{d^2H(r)}{dr^2},$$

obtemos,

$$\left(\omega^2 - 2\frac{C}{r^2}m\omega - \frac{1}{\tilde{\Lambda}}\left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right)\frac{m^2}{r^2}\right)H(r) + \left[1 + \tilde{\Lambda}\frac{D^2}{r^2}\right]\frac{1}{\tilde{\Lambda}}\frac{f(r)}{r}\frac{dH(r)}{dr} + \frac{f(r)^2}{\tilde{\Lambda}}\frac{d^2H(r)}{dr^2} = 0.$$

Deste modo, verificamos que a função radial  $R(r)$  satisfaz a equação diferencial linear de segunda ordem

$$\begin{aligned} \frac{d^2H(r)}{dr^2} + \left[1 + \tilde{\Lambda}\frac{D^2}{r^2}\right]\frac{1}{rf(r)}\frac{dH(r)}{dr} + \tilde{\Lambda}\left[\omega^2 - 2\frac{C}{r^2}m\omega \right. \\ \left. - \frac{1}{\tilde{\Lambda}}\left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right)\frac{m^2}{r^2}\right]f(r)^{-2}H(r) = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Introduzindo as coordenadas tartaruga  $r_*$ , ficamos com as seguintes equações

$$\frac{d}{dr_*} = f(r)\frac{d}{dr}, \quad f(r) = 1 - \frac{r_h^2}{r^2} = 1 - \tilde{\Lambda}\frac{D^2}{r^2}, \quad (5.24)$$

$$r_* = r + \sqrt{\tilde{\Lambda}} \frac{|D|}{2} \log \left( \frac{r - \sqrt{\tilde{\Lambda}}|D|}{r + \sqrt{\tilde{\Lambda}}|D|} \right). \quad (5.25)$$

Observe que nessa nova coordenada, no horizonte sônico  $r = \sqrt{\tilde{\Lambda}}|D|$  faz com que  $r_* \rightarrow -\infty$  enquanto  $r \rightarrow \infty$  corresponde a  $r_* \rightarrow +\infty$ . Agora consideramos uma nova função radial,  $G(r_*) = \sqrt{r}H(r)$  e a equação radial modificada obtida pela equação (5.23) é

$$\begin{aligned} \frac{f(r)^{-2}}{r^{1/2}} \frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \frac{3G(r_*)}{4r^{5/2}} - \frac{f(r)^{-1}}{2r^{5/2}} \left[ 1 + \tilde{\Lambda} \frac{D^2}{r^2} \right] G(r_*) + \tilde{\Lambda} \left[ \omega^2 - 2 \frac{C}{r^2} m \omega \right. \\ \left. - \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left( 1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \frac{m^2}{r^2} \right] \frac{f(r)^{-2}}{r^{1/2}} G(r_*) = 0, \\ \frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \left[ \tilde{\Lambda} \left( \omega - \frac{Cm}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] G(r_*) = 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde  $V(r) = \frac{f(r)}{4r^2} \left[ 4m^2 - 1 + \tilde{\Lambda} \frac{5D^2}{r^2} \right]$ .

Para determinar a solução assintótica de  $G(r_*)$  na equação (5.26) tomamos duas condições. Primeiro analisando a situação quando  $r \gg r_h$  (onde  $C$  tem a mesma ordem de  $D$ ). Nesta condição temos  $r \rightarrow r_*$ , assim a equação (5.26) é reescrita da forma

$$\frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \left[ \tilde{\Lambda} \omega^2 - 2\tilde{\Lambda} \frac{\omega Cm}{r_*^2} - \frac{(m^2 - 1/4)}{r_*^2} \right] G(r_*) = 0,$$

fazendo  $\tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{\Lambda}}\omega$ ,

$$\frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \left[ \tilde{\omega}^2 - 2\sqrt{\tilde{\Lambda}} \frac{\tilde{\omega} Cm}{r_*^2} - \frac{(m^2 - 1/4)}{r_*^2} \right] G(r_*) = 0,$$

ficamos com

$$\frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \left[ \tilde{\omega}^2 - \frac{(\chi^2 - 1/4)}{r_*^2} \right] G(r_*) = 0, \quad (5.27)$$

onde  $\chi = \sqrt{m \left( m + 2\sqrt{\tilde{\Lambda}}\tilde{\omega}C \right)}$ . Assim a solução da equação (5.27) pode ser escrita da forma

$$G(r_*) \approx \sqrt{\frac{\pi \tilde{\omega} r_*}{2}} \left[ A_m^{(in)} e^{i(\chi+1/2)\pi/2} H_\chi^{(1)}(\tilde{\omega} r_*) + A_m^{(re)} e^{-i(\chi+1/2)\pi/2} H_\chi^{(1)*}(\tilde{\omega} r_*) \right], \quad (5.28)$$

onde  $A_m^{(re/in)}$  são coeficientes dependentes de  $\tilde{\omega}$  e  $m$ ,  $H_\chi^{(1)}$  é a função de Hankel [51].

Usando a forma assintótica para a função de Hankel temos

$$G(r_*) = A_m^{(in)} e^{-i\tilde{\omega} r_*} + A_m^{(re)} e^{i\tilde{\omega} r_*}. \quad (5.29)$$



Note que da mesma forma que no capítulo 4, o primeiro termo da equação (5.29) corresponde a onda incidente e o segundo termo a onda refletida, assim o coeficiente incidente é dado por  $A_m^{(in)} = \frac{i^{1/2}(-1)^m}{\sqrt{2\pi\tilde{\omega}}}$ .

O segundo caso, é analisar próximo da região do horizonte ( $r_* \rightarrow -\infty$ ), temos

$$G(r_*) = A_m^{(tr)} e^{-i(\tilde{\omega} - m\tilde{\Omega}_H)r_*}, \quad (5.30)$$

onde,  $\tilde{\Omega}_H = \Omega_H/\sqrt{\tilde{\Lambda}}$  e  $\Omega_H = C/D^2$  é a velocidade angular para um buraco negro acústico e  $A_m^{(tr)}$  é o coeficiente de transmissão.

A dispersão de uma função de onda por um buraco negro acústico do tipo Kerr dá origem a um aumento da amplitude, como foi descrito no capítulo 4. Sendo assim a amplitude de uma função de onda dispersa é representada pela reflexão  $R_{\omega m}$  dado pela expressão,

$$1 - |R_{\omega m}|^2 = \left( \frac{\tilde{\omega} - m\tilde{\Omega}_H}{\tilde{\omega}} \right) |T_{\omega m}|^2. \quad (5.31)$$

Para um frequência no intervalo  $0 < \tilde{\omega} < m\tilde{\Omega}_H$  a reflexão é sempre maior que 1 o que implica no fenômeno da superradiância. Onde  $m$  é o numero do modo azimutal e  $\Omega_H = C/D^2$  é a velocidade angular do buraco negro acústico do tipo Kerr usual. Pela equação (5.31) a velocidade angular modificada  $\tilde{\Omega}_H$  depende do parâmetro  $\tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda^2 + 4}{\Lambda^2 + 4}$ . Para verificar os efeitos de  $\Lambda$ , fazemos a substituição  $\lambda = 1/\Lambda$ , já que  $\Lambda$  assume um valor muito grande quando tentamos retornar ao caso mostrado no capítulo anterior, então trabalhar com o seu inverso facilitara na compreensão dos resultados seguintes. A expressão  $\frac{\Lambda^2 + 4}{\Lambda^2 + 2}$  fica da forma  $\frac{1 + 4\lambda^2}{1 + 2\lambda^2}$  podemos ainda expandir esta ultima expressão em termos de  $\lambda$ ,

$$\frac{1 + 4\lambda^2}{1 + 2\lambda^2} \simeq 1 + 2\lambda^2 - 4\lambda^4 + 8\lambda^6 - 16\lambda^8 + \mathcal{O}(\lambda^{10}). \quad (5.32)$$

Considerando apenas os primeiros termos da expansão (5.32) temos  $\tilde{\Lambda} \simeq 1 + 2\lambda^2$ . Isto significa que para  $\lambda = 0$  retornamos ao caso mostrado no capítulo 4. Já quando adicionado valores a  $\lambda$ , o intervalo de frequência diminui, ou seja, a onda é espalhada com uma amplitude menor como pode ser visto nos gráficos da Figura 5.1. Nos gráficos podemos ver o comportamento da reflexão para alguns valores de  $\lambda$  em duas situações,  $m = 1$  e  $m = 2$ .

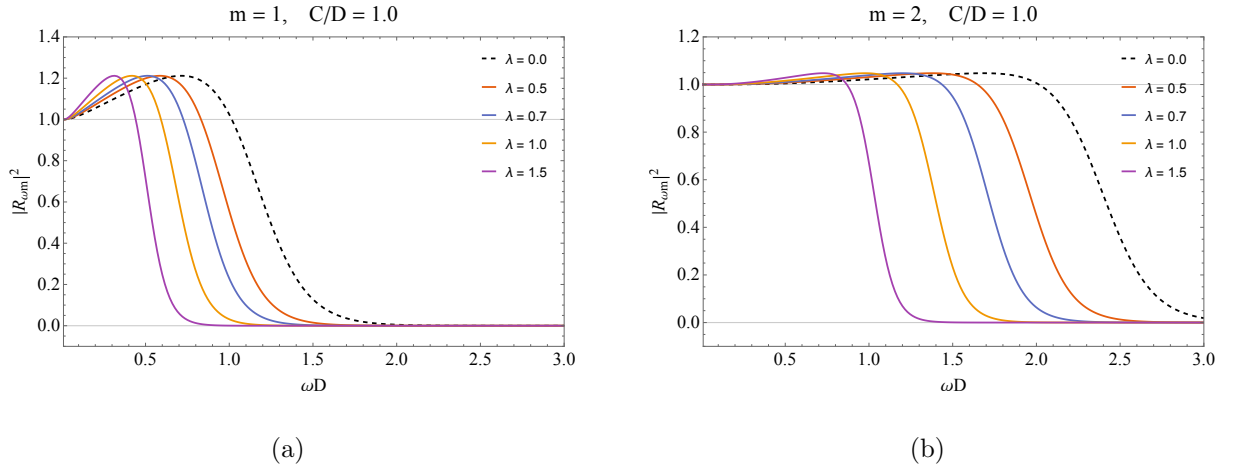


Figura 5.1: Reflexão para os modos de  $m = 1$  e  $m = 2$  com diferentes valores de  $\lambda$ , as linhas tracejadas referi-se ao efeito sem a contribuição de  $\lambda$ . Conforme aumentamos o valor de  $\lambda$  o intervalo de frequência onde ocorre o efeito de superradiância diminui para os dois casos.

### 5.3 Desenvolvimento analítico

Para encontrar o deslocamento de fase, em um valor aproximado, primeiro rescrevemos a equação (5.26) em termos de uma nova função  $X(r) = f(r)^{1/2}G(r_*)$

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \frac{\tilde{\Lambda}^2 D^4}{f(r)^2 r^6} X(r) + \frac{3\tilde{\Lambda} D^2}{f(r) r^4} X(r) + \frac{1}{f(r)^2} \left[ \tilde{\Lambda} \left( \omega - \frac{Cm}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] X(r) = 0,$$

assim temos

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left\{ \frac{1}{f(r)} \left[ \frac{1/4 - m^2}{r^2} + \frac{7\tilde{\Lambda} D^2}{4r^2} \right] + \frac{1}{f(r)^2} \left[ \left( \tilde{\omega} - \sqrt{\tilde{\Lambda}} \frac{Cm}{r^2} \right)^2 + \frac{\tilde{\Lambda}^2 D^4}{r^6} \right] \right\} X(r) = 0. \quad (5.33)$$

Agora expandindo em série de potência em torno de  $1/r$  os termos que multiplicam  $X(r)$  na equação acima, podemos reescrever a equação da seguinte forma,

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left[ \tilde{\omega}^2 - \frac{4\tilde{m} - 1}{4r^2} + U(r) \right] X(r) = 0, \quad (5.34)$$

onde  $\tilde{m}^2 = m^2 + 2\tilde{\alpha}m - 2\tilde{\beta}^2$ ,

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\tilde{\Lambda}} \tilde{\omega} C = \tilde{\Lambda} \omega C = \tilde{\Lambda} \alpha,$$

$$\tilde{\beta} = \sqrt{\tilde{\Lambda}} \tilde{\omega} D = \tilde{\Lambda} \omega D = \tilde{\Lambda} \beta,$$

e

$$U(r) = \frac{(\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2) m^2 - 4\tilde{\beta}^2 \tilde{\alpha} m + 2\tilde{\beta}^2 + 3\tilde{\beta}^4}{\tilde{\omega}^2 r^4} + \frac{\tilde{\beta}^2 (2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2) m^2 - 6\tilde{\beta}^4 \tilde{\alpha} m + 3\tilde{\beta}^4 + 4\tilde{\beta}^6}{\tilde{\omega}^4 r^6} + \mathcal{O}(\tilde{\omega}^{-6} r^{-8}),$$

sendo  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  parâmetros que descrevem o comportamento circular e de drenagem com o termo extra  $\Lambda$ . Aplicando a fórmula aproximada de Borh.

$$\delta_m \approx \frac{\pi}{2} (m - \tilde{m}) + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r [J_{\tilde{m}}(\tilde{\omega} r)]^2 U(r) dr, \quad (5.35)$$

onde  $J_{\tilde{m}}(\tilde{\omega} r)$  é uma função de Bessel de primeira especie. Expandindo os termos e usando  $|m| \gg \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}$ , obtemos [52]

$$\delta_m \approx -\frac{\tilde{\alpha} \pi}{2} \frac{m}{|m|} + \frac{3\pi (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)}{8|m|} - \frac{5\tilde{\alpha} \pi (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)}{8m^2} \frac{m}{|m|}. \quad (5.36)$$

Observe que o resultado para o modo  $m = 0$  não é valido, mas nos limites para  $m \rightarrow \pm\infty$  os primeiros termos na equação (5.36) implicam que o deslocamento de fase tende a uma constante diferente de zero, naturalmente nos levando ao efeito Aharonov-bohm [48]. Entretanto para o modo isotrópico  $m = 0$  pela equação (5.26) obtermos a solução da forma

$$G_{m=0}(r_*) = r^{1/2} e^{\tilde{\beta}\pi/2} J_{i\tilde{\beta}}(\tilde{\omega} r f^{1/2}), \quad (5.37)$$

e o deslocamento de fase é imaginário

$$\delta_{m=0} = \frac{1}{2} i\pi \tilde{\beta}. \quad (5.38)$$

Devido  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  serem proporcionais a  $\tilde{\omega}$  e  $\tilde{\Lambda}$ , podemos concluir que as equações (5.36) e (5.38) tem um efeito AB dominante para espalhamentos de ondas de baixa frequência,  $\omega \sqrt{C^2 + D^2} \ll 1$ .

Assim, usando as equações (5.36) e (5.38), para ordens mais baixas de  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$ , podemos calcular a amplitude de espalhamento e posteriormente a seção de choque de espalhamento diferencial.

A expressão para amplitude de espalhamento fica da forma

$$f_{\tilde{\omega}}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\tilde{\omega}}} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{-1} (e^{-i\tilde{\alpha}(m/|m|)} - 1) e^{im\theta} + (e^{-\pi\tilde{\beta}} - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} (e^{-i\tilde{\alpha}(m/|m|)} - 1) e^{im\theta} \right\},$$

$$f_{\tilde{\omega}}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\tilde{\omega}}} \left\{ (e^{-\pi\tilde{\beta}} - 1) + \frac{(1 + e^{-i\tilde{\alpha}\pi + i\theta})(-1 + e^{i\tilde{\alpha}\pi})}{-1 + e^{i\theta}} \right\}. \quad (5.39)$$

O procedimento usado é similar ao feito no capítulo anterior, o próximo passo é tomar a aproximação  $(e^{-\pi\tilde{\beta}} - 1) \approx -\pi\tilde{\beta}$  e usando a formula de Euler no segundo termo, chegamos a seguinte expressão

$$f_{\tilde{\omega}}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\tilde{\omega}}} \left( \frac{-\pi\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\pi \cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right), \quad (5.40)$$

assim, a seção de choque de espalhamento diferencial para o novo modelo é da forma

$$\frac{d\sigma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}{d\theta} = |f_{\tilde{\omega}}(\theta)|^2 \simeq \frac{\pi}{2\tilde{\omega}} \frac{[-\tilde{\beta} \sin(\theta/2) + \tilde{\alpha} \cos(\theta/2)]^2}{\sin^2(\theta/2)}. \quad (5.41)$$

Retornando com o valor de  $\tilde{\Lambda} = 1 + 2\lambda^2$

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\theta} \simeq \frac{\pi (1 + 2\lambda^2)^{3/2}}{2\omega} \frac{[-\beta \sin(\theta/2) + \alpha \cos(\theta/2)]^2}{\sin^2(\theta/2)}. \quad (5.42)$$

Considerando agora  $\beta = 0$  (no limite sem drenagem), para baixas ordens  $\delta_m = -\frac{\tilde{\alpha}\pi}{2} \frac{m}{|m|}$ , temos o resultado para o vórtice de Fetter [48].

$$\frac{d\sigma_{vortice}}{d\theta} = (1 + 2\lambda^2)^{3/2} \frac{\alpha^2\pi}{2\omega} \cot^2(\theta/2). \quad (5.43)$$

Assim o resultado (5.42) pode ser comparado com o efeito Aharonov-Bohm no pequeno ângulo ou pequenos limites de acoplamento. Estudos sobre o efeito análogo Aharonov-Bohm também foram apresentados em [53, 54, 55], nos quais a seção de choque de espalhamento diferencial obtida é

$$\frac{d\sigma_{AB}}{d\theta} = \frac{(1 + 2\lambda^2)^{3/2}}{2\pi\omega} \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{\sin^2(\theta/2)}. \quad (5.44)$$

Vimos ate aqui que os resultados obtidos em (5.42) e (5.43) se assemelham aos resultados obtidos no capítulo 4 para a seção de choque de espalhamento diferencial quando tomamos  $\lambda$  igual a zero.

A Figura 5.2 mostra o comprimento de espalhamento para baixas frequências em função do ângulo de espalhamento. Para  $\lambda = 0$  (linhas tracejadas) o sistema retorna ao caso descrito no capítulo 4, e quando inserimos valores para  $\lambda$  é possível verificar o comportamento do efeito tanto para um caso sem drenagem Figura 5.2(a) quanto para um caso com drenagem Figura 5.2(b). A contribuição do termo extra faz com que as curvas dos gráficos se desloquem para cima simetricamente.

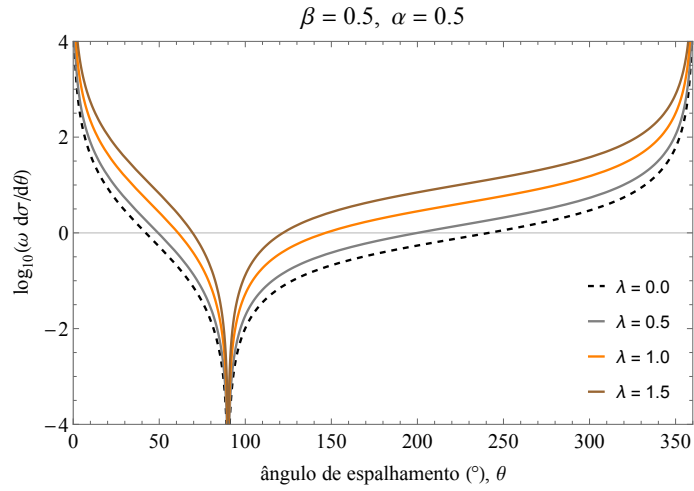
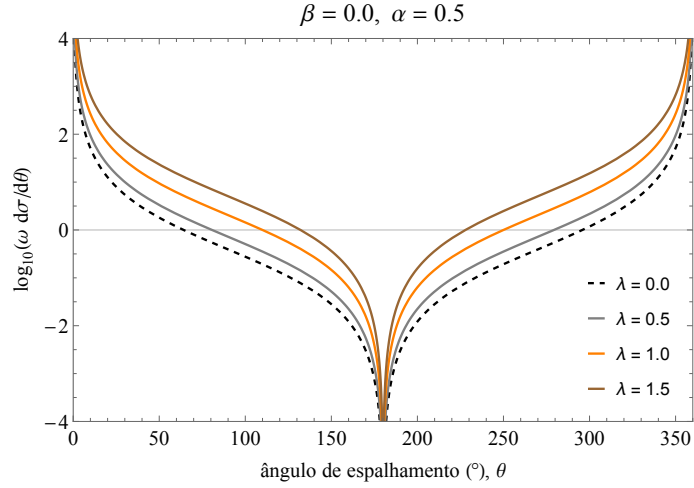


Figura 5.2: Vórtice de espalhamento para baixas frequências para os diferentes valores de  $\lambda$ , as linhas tracejadas referem ao efeito sem a contribuição de  $\lambda$ . O gráfico em (a) mostra o efeito sem drenagem e (b) o efeito com drenagem.

## 5.4 Resultados numéricos

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos dos comprimentos de absorção com valores arbitrários de frequência de onda incidente, para a métrica do buraco negro acústico rotativo descrito previamente. Para isso, evoluímos a equação (5.23) numericamente e obtemos os valores de reflexão e posteriormente de absorção. Para estes cálculos usamos a expansão (5.32) para uma melhor apresentação no gráfico. O método numérico aplicado está descrito no Apêndice B.

A absorção pode ser obtida para  $m = 0$  analiticamente a partir de (5.38) e da

equação para seção transversal de absorção descrita no capítulo 4,

$$\sigma_{abs} = \frac{1}{\tilde{\omega}} (1 - |e^{2i\delta_m}|^2),$$

no limite de baixas frequências obtemos  $\sigma_{abs} \approx 2\pi\sqrt{1 + 2\lambda^2}D$ , este comprimento de absorção é igual a circunferência de um buraco acústico vezes um termo que depende das altas derivadas.

A Figura 5.3 mostra o comportamento da seção transversal de absorção para  $m = 0$  sem circulação para os valores definidos de  $\lambda$ . Como já era previsto, a partir do resultado analítico para baixas frequências descrito acima, temos um aumento do valor da absorção quando inserimos valores em  $\lambda$ , além disso, é possível ver que a área de absorção aumenta conforme aumentamos o valor de lambda.

Na Figura 5.4 temos um comparativo para os casos com e sem circulação para os números azimutais  $m = 1$  e  $m = 2$ . Os gráficos à esquerda mostra a absorção para o caso estático  $C = 0$  neste caso os valores da absorção independe do sinal de  $m$ , vemos que ao variar o novo termo a forma da curva se modifica aumentando pico da curva, ou seja, a área da seção transversal aumenta. Esse aumento ocorre também para os gráficos a direita, para um caso rotativo  $C = 0.5$ , a diferença aqui é a presença de valores negativos da absorção que é nítido na Figura 5.4(b), o que corresponde a superradiância descrito anteriormente.

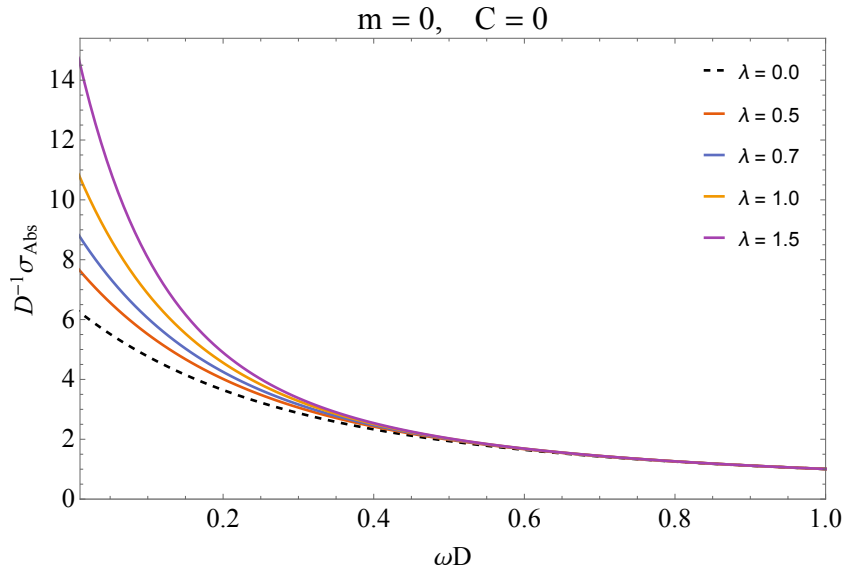


Figura 5.3: Absorção em função da frequência angular para um buraco acústico (2+1)dimensões para  $m = 0$ . Temos o aumento da absorção de acordo com que aumentamos o valor de  $\lambda$ .

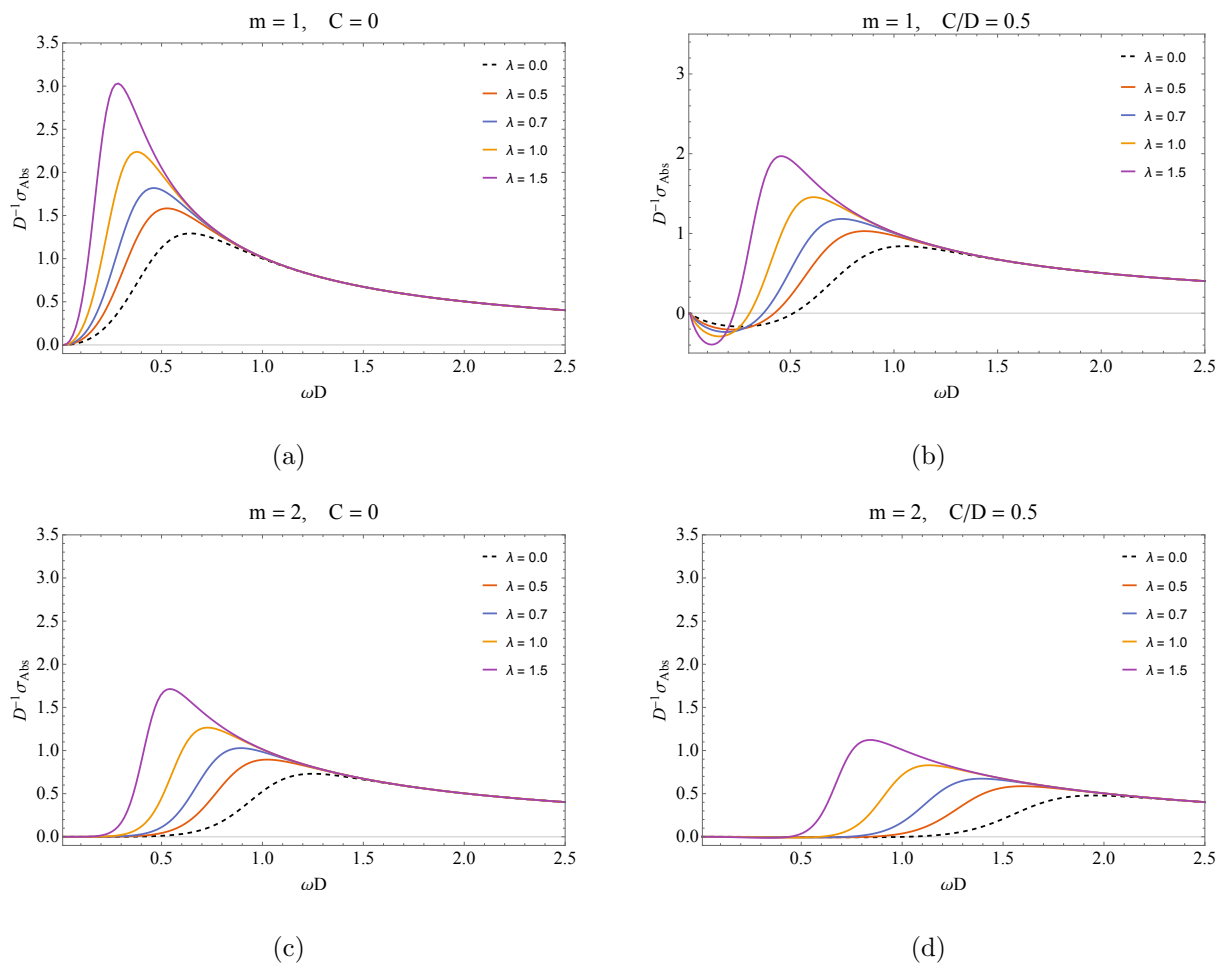


Figura 5.4: Do lado esquerdo a absorção para o caso sem circulação  $C = 0$  e no lado direito e admitido uma circulação  $C = 0.5$ . Analisado os módulos  $m = 1$  e  $m = 2$ , o efeito de superradiância é perceptível no gráfico (b) onde vemos valores negativos na absorção.

# Capítulo 6

## Conclusões e perspectivas futuras

O buraco negro acústico é uma poderosa analogia para estudar a relatividade geral e, em particular, para estudar experimentalmente algumas das características da física dos buracos negros. Este trabalho apresentou tanto uma revisão teórica examinando, a partir de uma variedade de perspectivas, o espalhamento de uma onda planar por um vórtice de drenagem ou “draining bathtub” (um sistema que foi proposto como um análogo para um buraco negro em rotação [14]), quanto um estudo novo, acrescentando termos de altas derivadas na métrica e verificando o comportamento dos parâmetros de espalhamento para esta nova abordagem.

Revisamos algumas características importantes, como a superradiância, que surge quando a frequência  $\omega$  é menor que  $m\Omega_H$  onde  $\Omega_H$  é a velocidade angular para o horizonte, neste caso verificamos pela equação de conservação (4.20) que temos uma reflexão maior que 1 ou seja  $|R_{\omega m}|^2 > 1$ , o que caracteriza uma superradiância ou superresonância por se tratar de fonons. Verificamos este efeito graficamente com o auxílio dos resultados numéricos. Vimos também que o espalhamento por um vórtice de drenagem leva a um efeito análogo Aharonov-Bohm determinado por dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\beta$  (4.41), e que o fluxo de drenagem e a presença de um horizonte de eventos acústico desempenham papéis importantes nesse efeito. Lembrando que a dispersão por um vórtice “padrão” que leva a um análogo do efeito Aharonov-Bohm, foi mostrado em 1980 por Berry et al. [18], onde neste caso era controlado por um único parâmetro adimensional  $\alpha$ .

A nova abordagem baseia-se no modelo abeliano de Higgs estendido introduzindo termos de altas derivadas. Modificamos a métrica considerando para um caso não relativístico e assim, investigamos o efeito análogo Aharonov-Bohm nesta proposta. Para o



caso onde admitimos o termo de circulação, a região de frequência onde ocorre a superradiância é reduzida pela influência do termo extra  $(1 + 2\lambda^2)^{3/2}$  gerado pela nova métrica, uma outra influência deste termo é o aumento da seção de absorção. Comparando também os resultados obtidos nas equações (4.41) e (5.42), verificamos que o termo adicional modifica de forma simétrica a seção de choque de espalhamento diferencial, o que pode ser visto na Figura 5.2(a) onde quando admitimos  $\lambda = 0$  a equação (5.43) retorna aos resultados obtidos no capítulo 4.

Como perceptivas de expansão dos conhecimentos e dos resultados desta dissertação. Propomos fazer um estudo de buracos negros acústicos para  $(3 + 1)$ , e verificar o comportamento para altas frequência. Pretendemos também estudar a métrica obtida a partir do modelo abeliano de Higgs para um caso geral, já que para este trabalho foi considerado apenas o caso não relativístico.

# Apêndice A

## Solução que transforma a equação radial

Dado a seguinte equação radial,

$$\frac{d^2 H(r)}{dr^2} + \frac{f(r)^{-1}}{r} \left( \frac{r^2 + D^2}{r^2} \right) \frac{dH(r)}{dr} + f(r)^{-2} \left[ \left( \omega - \frac{C\omega m}{r^2} \right)^2 - f(r) \frac{m^2}{r^2} \right] H(r) = 0, \quad (\text{A.1})$$

admitindo  $H(r) = Z(r)G(r_*)$  como solução temos que encontrar o valor de  $Z(r)$  tal que transforme a equação radial em uma equação tipo de Schrödinger. Derivando  $H(r)$  em função de  $r$ , lembrando da relação entre coordenadas  $\frac{dr_*}{dr} = f(r)^{-1}$ ,

$$\frac{dH(r)}{dr} = \frac{dZ(r)}{dr} G(r_*) + Z(r) f(r)^{-1} \frac{dG(r_*)}{dr_*}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d^2 H(r)}{dr^2} = \frac{d^2 Z(r)}{dr^2} G(r_*) + \left( \frac{2}{f(r)} \frac{dZ(r)}{dr} + Z(r) \frac{df(r)^{-1}}{dr} \right) \frac{dG(r_*)}{dr_*} + \frac{Z(r)}{f(r)^2} \frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2}. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo em (A.1),

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Z(r)}{dr^2} G(r_*) + \left( \frac{2}{f(r)} \frac{dZ(r)}{dr} + Z(r) \frac{df(r)^{-1}}{dr} \right) \frac{dG(r_*)}{dr_*} + \frac{Z(r)}{f(r)^2} \frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} \\ & + \frac{1}{rf(r)} \left( \frac{r^2 + D^2}{r^2} \right) \left( \frac{dZ(r)}{dr} G(r_*) + \frac{Z(r)}{f(r)} \frac{dG(r_*)}{dr_*} \right) + \frac{1}{f(r)^2} \left[ \left( \omega - \frac{C\omega m}{r^2} \right)^2 \right. \\ & \left. - f(r) \frac{m^2}{r^2} \right] G(r_*) = 0, \end{aligned}$$

assim temos,

$$\begin{aligned} \frac{Z(r)}{f(r)^2} \frac{d^2 G(r_*)}{dr_*^2} + \left[ \frac{2}{f(r)} \frac{dZ(r)}{dr} + Z(r) \frac{df(r)^{-1}}{dr} + \frac{Z(r)}{rf(r)^2} \left( \frac{r^2 + D^2}{r^2} \right) \right] \frac{dG(r_*)}{dr_*} + \left\{ \frac{d^2 Z(r)}{dr^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{rf(r)} \left( \frac{r^2 + D^2}{r^2} \right) \frac{dZ(r)}{dr} + \frac{Z(r)}{f(r)^2} \left[ \left( \omega - \frac{C\omega m}{r^2} \right)^2 - f(r) \frac{m^2}{r^2} \right] \right\} G(r_*) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Para obtermos uma equação tipo de Schrödinger nos impomos que os termos que multiplicam  $\frac{dG(r_*)}{dr_*}$  sejam zero, assim temos que,

$$\begin{aligned} \frac{2}{f(r)} \frac{dZ(r)}{dr} + Z(r) \frac{df(r)^{-1}}{dr} + \frac{Z(r)}{rf(r)^2} \left( \frac{r^2 + D^2}{r^2} \right) = 0, \\ \frac{dZ(r)}{dr} + \left[ \frac{f(r)}{2} \frac{df(r)^{-1}}{dr} + \frac{f(r)^{-1}}{2r} \left( \frac{r^2 + D^2}{r^2} \right) \right] Z(r) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Sendo,  $f(r) = \left( 1 - \frac{D^2}{r^2} \right) e$ ,

$$\frac{df(r)^{-1}}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{r^2 - D^2} \right) = \frac{-2rD^2}{(r^2 - D^2)^2}$$

, a equação (A.5) fica,

$$\begin{aligned} \frac{dZ(r)}{dr} + \left[ \frac{r^2 - D^2}{r^2} \left( \frac{-2rD^2}{(r^2 - D^2)^2} \right) + \frac{r^2}{r(r^2 - D^2)} \frac{r^2 + D^2}{r^2} \right] Z(r) = 0 \\ \frac{dZ(r)}{dr} + \left[ \frac{r^2 - D^2}{2r(r^2 - D^2)} \right] Z(r) = 0 \\ \frac{dZ(r)}{dr} = -\frac{1}{2r} Z(r), \end{aligned}$$

com sua derivada segunda,

$$\frac{d^2 Z(r)}{dr^2} = \frac{1}{2r^2} Z(r) - \frac{1}{2r} \frac{dZ(r)}{dr} = \frac{3}{4r^2} Z(r)$$

Facilmente podemos encontrar o valor de  $Z(r)$ ,

$$Z(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Assim temos que  $H(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} G(r_*)$  é solução que transforma a equação radial (A.1) em uma equação tipo de Schrödinger.

# Apêndice B

## Método computacional

Para calcularmos os coeficientes de reflexão e posteriormente a absorção usamos o software Mathematica, com a seguinte abordagem:

- 1 O primeiro passo é estabelecer as condições iniciais, para isso admitimos uma expansão em série no horizonte da forma,

$$H(r) = e^{-i\left(\omega - \frac{mC}{D^2}\right)r_*} \sum_{k=0}^{\infty} y_k (r - r_h)^k, \quad (\text{B.1})$$

onde os coeficientes  $y_k$  podem ser encontrados analiticamente, isso pode ser feito com um pacote de álgebra simbólica no Mathematica e utilizando o método de Frobenius na equação radial;

- 2 Seguindo determinamos numericamente a solução da equação radial com o comando NDSolve (usando um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem) para isso usamos como condição inicial  $H(r_{min})$  e a derivada  $H'(r_{min})$  onde  $r_{min}$  é o valor inicial de  $r$ ;
- 3 Nesta etapa extraímos os coeficiente  $A^{(in)}$  e  $A^{(re)}$  comparando o resultado numérico com as seguintes expansões analíticas

$$H^{(in)}(r) = e^{-i\omega r_*} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{r^k} \quad (\text{B.2})$$

$$H^{(re)}(r) = e^{i\omega r_*} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k^*}{r^k}, \quad (\text{B.3})$$

onde os coeficientes  $z_k$  e  $z_k^*$  podem ser encontrados da mesma forma do item 1. Montamos o seguinte sistema para  $r$  muito distante do raio do horizonte,

$$\begin{cases} A^{(in)} H^{(in)}(r_{max}) + A^{(re)} H^{(re)}(r_{max}) = H(r_{max}) \\ A^{(in)} H'^{(in)}(r_{max}) + A^{(re)} H'^{(re)}(r_{max}) = H'(r_{max}) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

aqui os valores  $H(r_{max})$  e  $H'(r_{max})$  resultam da interação numérica para  $r$  máximo;

- 4 Com os valores de  $A^{(in)}$  e  $A^{(re)}$  calculados, podemos encontrar a reflexão usando a expressão  $|R_{\omega m}|^2 \approx |A^{(re)}|^2 / |A^{(in)}|^2$ . Com esse resultado a absorção é facilmente calculada.

# Referências Bibliográficas

- [1] MICHELL, J. et al. Vii. on the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. by the rev. john michell, bdfrs in a letter to henry cavendish, esq. frs and as. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 74, p. 35–57, 1784.
- [2] SLAYTER, E. M.; SLAYTER, H. S. *Light and electron microscopy*. Cambridge University Press, 1992.
- [3] SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flüssigkeit nach der einsteinschen theorie. In: . c1916.
- [4] FINKELSTEIN, D. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Physical Review*, New York, v. 110, n. 4, p. 965, 1958.
- [5] REISSNER, H. Über die eigengravitation des elektrischen felde nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, v. 355, n. 9, p. 106–120, 1916.
- [6] NORDSTRÖM, G. On the energy of the gravitation field in einstein's theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, v. 20, p. 1238–1245, 1918.
- [7] KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, v. 11, n. 5, p. 237, 1963.
- [8] NEWMAN, E. T.; COUCH, E.; CHINNAPARED, K.; EXTON, A.; PRAKASH, A.; TORRENCE, R. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of mathematical physics*, v. 6, n. 6, p. 918–919, 1965.

- [9] NEWMAN, E. T.; JANIS, A. Note on the kerr spinning-particle metric. *Journal of Mathematical Physics*, New York, v. 6, n. 6, p. 915–917, 1965.
- [10] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [11] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R.; ADYA, V. et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.
- [12] UNRUH, W. G. Experimental black-hole evaporation? *Physical Review Letters*, New York, v. 46, n. 21, p. 1351, 1981.
- [13] VISSER, M. Acoustic black holes: horizons, ergospheres and hawking radiation. *Classical and Quantum Gravity*, v. 15, n. 6, p. 1767, 1998.
- [14] SCHÜTZHOLD, R.; UNRUH, W. G. Gravity wave analogues of black holes. *Physical Review D*, v. 66, n. 4, p. 044019, 2002.
- [15] COSTE, C.; LUND, F.; UMEKI, M. Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the aharonov-bohm effect. i. shallow water. *Physical Review E*, v. 60, n. 4, p. 4908, 1999.
- [16] LEONHARDT, U.; ÖHBERG, P. Optical analog of the iordanskii force in a bose-einstein condensate. *Physical Review A*, Woodbury, v. 67, n. 5, p. 053616, 2003.
- [17] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, New York, v. 115, n. 3, p. 485, 1959.
- [18] BERRY, M.; CHAMBERS, R.; LARGE, M.; UPSTILL, C.; WALMSLEY, J. Wavefront dislocations in the aharonov-bohm effect and its water wave analogue. *European Journal of Physics*, Bristol, v. 1, n. 3, p. 154, 1980.
- [19] TORRES, T.; PATRICK, S.; COUTANT, A.; RICHARTZ, M.; TEDFORD, E. W.; WEINFURTNER, S. Rotational superradiant scattering in a vortex flow. *Nature Physics*, v. 13, n. 9, p. 833, 2017.

- [20] ANACLETO, M.; BRITO, F.; PASSOS, E. Acoustic black holes and universal aspects of area products. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 380, n. 11-12, p. 1105–1109, 2016.
- [21] UNRUH, W. G. Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation. *Physical Review D*, v. 51, n. 6, p. 2827, 1995.
- [22] VISSER, M. Acoustic propagation in fluids: an unexpected example of lorentzian geometry. *arXiv preprint gr-qc/9311028*, 1993.
- [23] BARCELO, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity. *Living reviews in relativity*, v. 14, n. 1, p. 3, 2011.
- [24] IPPEN, A. et al. Lm milne-thomson, theoretical hydrodynamics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 47, n. 5, p. 352–353, 1941.
- [25] LANDAU, L. D.; LIFSHITS, E. M. *Fluid mechanics, by ld landau and em lifshitz*. Pergamon Press, 1959.
- [26] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Cambridge university press, 1932.
- [27] COMER, G. Superfluid analog of the davies-unruh effect. *arXiv preprint gr-qc/0505005*, 2005.
- [28] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 1973. v. 1.
- [29] NACHMAN, A. I. Reconstructions from boundary measurements. *Annals of Mathematics*, v. 128, n. 3, p. 531–576, 1988.
- [30] CHAMBERS, R. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Physical Review Letters*, New York, v. 5, n. 1, p. 3, 1960.
- [31] FORD, L.; VILENKIN, A. A gravitational analogue of the aharonov-bohm effect. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 14, n. 9, p. 2353, 1981.
- [32] CERDA, E.; LUND, F. Interaction of surface waves with vorticity in shallow water. *Physical review letters*, v. 70, n. 25, p. 3896, 1993.



- [33] NESHEV, D.; NEPOMNYASHCHY, A.; KIVSHAR, Y. S. Nonlinear aharonov-bohm scattering by optical vortices. *Physical review letters*, v. 87, n. 4, p. 043901, 2001.
- [34] STONE, M. Iordanskii force and the gravitational aharonov-bohm effect for a moving vortex. *Physical Review B*, v. 61, n. 17, p. 11780, 2000.
- [35] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2005.
- [36] OLARIU, S.; POPESCU, I. I. The quantum effects of electromagnetic fluxes. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v. 57, n. 2, p. 339, 1985.
- [37] RUIJSENAARS, S. The aharonov-bohm effect and scattering theory. *Annals of Physics*, New York, v. 146, n. 1, p. 1–34, 1983.
- [38] ADAMI, R.; TETA, A. On the aharonov–bohm hamiltonian. *Letters in Mathematical Physics*, v. 43, n. 1, p. 43–54, 1998.
- [39] YAFAEV, D. *Mathematical scattering theory: General theory*.
- [40] OLIVEIRA, E. S.; DOLAN, S. R.; CRISPINO, L. C. Absorption of planar waves in a draining bathtub. *Physical Review D*, v. 81, n. 12, p. 124013, 2010.
- [41] HAGEN, C. Aharonov-bohm scattering amplitude. *Physical Review D*, v. 41, n. 6, p. 2015, 1990.
- [42] BERTI, E.; CARDOSO, V.; LEMOS, J. P. Quasinormal modes and classical wave propagation in analogue black holes. *Physical Review D*, v. 70, n. 12, p. 124006, 2004.
- [43] BEKENSTEIN, J. D.; SCHIFFER, M. The many faces of superradiance. *Physical Review D*, v. 58, n. 6, p. 064014, 1998.
- [44] ZEL'DOVICH, I. Amplification of cylindrical electromagnetic waves reflected from a rotating body. *Soviet Physics-JETP*, v. 35, p. 1085–1087, 1972.
- [45] BASAK, S. S. basak and p. majumdar, classical quantum gravity 20, 2929 (2003). *Classical Quantum Gravity*, v. 20, p. 2929, 2003.

- [46] JACOBSON, T. Ta jacobson and ge volovik, phys. rev. d 58, 064021 (1998). *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 064021, 1998.
- [47] LAPIDUS, I. R. Quantum-mechanical scattering in two dimensions. *American Journal of Physics*, New York, v. 50, n. 1, p. 45–47, 1982.
- [48] FETTER, A. L. Scattering of sound by a classical vortex. *Physical Review*, New York, v. 136, n. 6A, p. A1488, 1964.
- [49] JACOBSON, T. Black-hole evaporation and ultrashort distances. *Physical Review D*, v. 44, n. 6, p. 1731, 1991.
- [50] GE, X.-H.; SIN, S.-J. Acoustic black holes for relativistic fluids. *Journal of High Energy Physics*, v. 2010, n. 6, p. 87, 2010.
- [51] GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [52] DOLAN, S. R.; OLIVEIRA, E. S.; CRISPINO, L. C. Aharonov–bohm effect in a draining bathtub vortex. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 701, n. 4, p. 485–489, 2011.
- [53] ANACLETO, M.; BRITO, F.; PASSOS, E. Analogue aharonov-bohm effect in a lorentz-violating background. *Physical Review D*, v. 86, n. 12, p. 125015, 2012.
- [54] ANACLETO, M.; BRITO, F.; PASSOS, E. Noncommutative analogue aharonov-bohm effect and superresonance. *Physical Review D*, v. 87, n. 12, p. 125015, 2013.
- [55] ANACLETO, M.; SALAKO, I.; BRITO, F.; PASSOS, E. Analogue aharonov-bohm effect in neo-newtonian theory. *Physical Review D*, v. 92, n. 12, p. 125010, 2015.