



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO EM FÍSICA**

BURACO NEGRO PULSANTE COM ROTAÇÃO

ALMIR DANTAS DE SOUZA

**Campina Grande - PB
2019**

ALMIR DANTAS DE SOUZA

BURACO NEGRO PULSANTE COM ROTAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

**Campina Grande - PB
2019**

S729b

Souza, Almir Dantas de.

Buraco negro pulsante com rotação / Almir Dantas de Souza. –
Campina Grande, 2019.

70 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".

Referências.

1. Teoria da Gravidade Quântica. 2. Buracos Negros. 3. Pulsação e
Rotação. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

CDU 53:524.882(043)

BURACO NEGRO PULSANTE COM ROTAÇÃO

ALMIR DANTAS DE SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

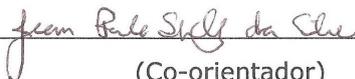
Aprovada em 25/02/2019.

BANCA EXAMINADORA



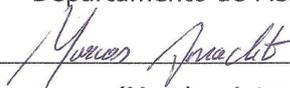
(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



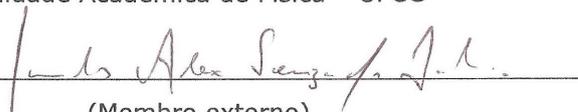
(Co-orientador)

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Departamento de Física - UEPB



(Membro interno)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – CG

À minha Família.

“God used beautiful mathematics
in creating the world.”

Paul Dirac.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde, inteligência e por ter me iluminado durante todo meu curso. Sem Ele eu não seria nada.

Ao meu orientador, Dr. Francisco de Assis de Brito, que confiou em mim e me guiou nesse trabalho e no curso.

Ao meu co-orientador, Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, que além de um grande amigo é um professor/profissional exemplar. Valeu pela força e pela super ajuda neste trabalho e na minha carreira acadêmica.

Aos meus pais, Valmir e Luzinete, e aos meus irmãos, Gerravole, Aurivan e Aurimar por desde sempre me incentivarem nos estudos.

À minha mulher, Beatriz, e ao meu tudo, Ralnir, que são meus motivos para sempre seguir adiante sem desistir.

Aos meus avós, por sempre me incentivarem aos estudos e aos meus familiares, de um modo geral, por todo incentivo e por sempre torcerem por mim. Muito obrigado!

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Física da UFCG, que contribuíram de forma direta ou indiretamente nessa formação acadêmica.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, a partir do qual pude completar em período hábil todo o meu curso.

Enfim, a todos que contribuíram para mais essa minha conquista.

RESUMO

Desde que soluções da Teoria da Relatividade Geral (TRG) foram obtidas, pesquisadores perceberam que tais resultados traziam consigo um novo tipo de física: a de buracos negros. Pelo teorema de Hawking-Penrose e suas generalizações é demonstrado que no centro desses objetos há a formação de uma singularidade, uma região do espaço-tempo em que a Física perde o sentido. Para que este entre outros problemas sejam contornados, deve-se usar teorias mais fundamentais, tais com a Teoria de Mundos Branas ou Gravidade Quântica de Laços. Porém, utilizando-se dessa abordagem se promove uma nova dinâmica para os buracos negros, que é a da pulsação e com ela, conseqüentemente, surgem novos efeitos no campo gravitacional. Aqui, analisa-se, a partir de um modelo de mundo brana, um buraco negro que além de possuir a dinâmica radial de pulsação, possui momento angular. Para se obter essa solução se utilizou o algoritmo de Newman-Janis na métrica estática proposta por Gao *et al.* (2018). Como resultado, obtivemos o elemento de linha exterior ao fluido perfeito que pulsa e gira, simultaneamente. As análises feitas a partir dessa nova solução nos conduzem a novos aspectos dos buracos negros, tais como o achatamento do horizonte de eventos e a variação da velocidade angular em função da latitude e, como esperado, no limite em que o efeito dado pela teoria de branas estudado é desprezível, retomamos os casos da TRG: Kerr e Schwarzschild.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria da Gravidade Quântica. Buracos negros. Pulsação e rotação.

ABSTRACT

Since solutions of the General Relativity Theory (TRG) were obtained, researchers realized that such results brought with it a new type of physics: black holes. From the Hawking-Penrose theorem and its generalizations it is demonstrated that in the center of these objects there is the formation of a singularity, a region of space-time in which physics loses its meaning. For this to be solved among other problems, one must use more fundamental theories, such as the loop quantum gravity and braneworld models. However, using this approach promotes a new dynamics for black holes, which is that of the pulsation and with it, consequently, new effects appear in the gravitational field. Here, we analyse, from a model of the braneworld, a black hole that besides having the radial dynamics of pulsation, has an angular momentum. To obtain this solution we used the Newman-Janis algorithm in the static metric proposed by Gao *et al.* (2018). As a result, we get the outer line element to the perfect fluid that pulsates and rotates, simultaneously. Analyses made of this new solution lead us to new aspects of black holes, such as flattening of the event horizon and variation of angular velocity as a function of latitude and, as expected, in the limit in which the effect given by the studied brane's theory is negligible, we return to the cases of TRG: Kerr and Schwarzschild.

KEY-WORDS: Theory of Quantum Gravity. Black holes. Pulse and rotation.

Conteúdo

Introdução	10
1 Buraco Negro Pulsante	13
1.1 Esfera fluida pulsante em coordenadas comóveis	14
1.2 Observador no infinito espacial	21
2 Algoritmo de Newman-Janis (ANJ)	26
2.1 Forma geral do ANJ	27
2.2 Obtendo a métrica de Kerr via ANJ	32
3 Obtendo a solução de Gao com Rotação	40
3.1 Aplicando o ANJ	41
3.1.1 Sobre a velocidade angular do BNPR	45
3.1.2 Superfícies de <i>red-shift</i> infinito do BNPR	46
3.1.3 Horizontes de evento do BNPR	54
Conclusões	64
Referências	66

Introdução

A Teoria Relatividade Geral (TRG) propõem que a força da gravidade é um efeito de curvatura do espaço-tempo, sendo essa provocada pela presença de matéria-energia contida nesse [1, 2, 3]. Sendo assim, dependendo de como estão distribuídos esses elementos no cosmo, o campo gravitacional possuirá características/formas/geodésicas específicas, que nos leva/ajuda a entender como os fenômenos, decorrentes dele, se dão [1, 4]. Por causa disso é que desde o surgimento da TRG, em 1915, os pesquisadores propõem resultados às equações de campo de Einstein-Hilbert. Essas soluções são de grande importância para a compreensão tanto da dinâmica do campo gravitacional como da evolução do Universo, mutuamente ligadas.

Um exemplo dessas soluções foi dado um ano depois que a Relatividade Geral foi proposta. O astrônomo e físico alemão Karl Schwarzschild propôs a primeira solução exata das equações de campo da TRG, conhecida atualmente como métrica de Schwarzschild. Mas o principal ator dessa equação se apresenta quando a analisamos para dois valores bem específicos, $r = 0$ e $r = 2M$. O primeiro é interpretado como uma singularidade, um ponto a qual a curvatura do espaço-tempo é tão alta que as leis clássicas da natureza falham [5]. O segundo resultado é analisado como o raio de um horizonte de eventos ou Buraco Negro¹ (BN) [2, 6, 7, 8]. Além dessa solução, outras subsequentes fomentam a mesma conclusão. É o caso dos resultados obtidos por Reissner-Nordström (1918), Kerr (1963) e Kerr-Newman (1965) [4].

Por mais natural que seja obter uma solução tipo buraco negro pela TRG,

¹Uma coisa que precisa ficar clara é que o buraco negro não é a singularidade em si, mas o volume do espaço-tempo cercado pelo horizonte de eventos [7] que, conseqüentemente, envolve-a.

além de haver bons fatos que evidenciam (indiretamente) a existência dos mesmos [9, 10, 11, 12, 13, 14], não é bem vista nem bem aceita pela comunidade científica a ideia de que no centro dos buracos negros ocasione uma singularidade, pois, como já comentamos, no local/região onde essa é formada o espaço-tempo perde o sentido físico. E na verdade, não há a necessidade da ocorrência de um ponto extremo desse tipo para que surja um BN, pois a principal característica desse objeto é ter uma velocidade de escape igual ou superior a da luz² [7, 15, 16].

Por esse fator é que nos últimos anos vêm sendo usadas novas teorias com um caráter mais fundamental ao qual tenta generalizar a TRG e resolver problemas decorrentes dessa última. Acredita-se que esses impasses são removidos caso a teoria usada seja de gravidade quântica (TQG) [18]. Porém atualmente ainda não temos uma única TQG aceita por todos ou totalmente válida, mas as duas principais concorrentes a esse papel são a teoria de cordas e a Gravidade Quântica de Laços (LQG) [19, 20, 21].

Guiado por essa nova perspectiva, Changjun Gao *et al.* [19] analisaram o trabalho sobre o colapso gravitacional clássico de uma esfera de fluido perfeito (poeira) estudado por [22] e o ampliaram (para outros tipos de matéria) e o corrigiram de acordo com os princípios dos modelos de *Braneworld*. Com esse aprimoramento eles demonstraram que no colapso de uma esfera fluida a singularidade é removida da solução, permitindo, assim, que uma expansão ocorra e seja contida pelo efeito gravitacional, sendo que o fluido posteriormente recale, caracterizando com isso uma pulsação.

Recentes evidências sugerem que essas estruturas realmente existem [14]. Entender as novas características que surgem com esse novo objeto é fundamental para uma interpretação correta dos fenômenos gravitacionais. É por isso, que neste trabalho nós ampliamos/generalizamos o modelo de Gao *et al.*, pois adicionamos a ele um efeito a mais, o da rotação. Para tal, executamos o algoritmo de Newman-Janis na métrica estática de [19] e auferimos um elemento de linha que denominamos de Buraco Negro

²Por isso, não é possível obter informações do interior do horizonte, já que essas não conseguem escapar de dentro [9, 17].

Pulsante com Rotação (BNPR). Percebemos que a solução para o caso da poeira - a única que pode ser considerada BN - nos fornece uma série de novos aspectos para esses objetos, como o “achatamento” dos horizontes de eventos e a variação da velocidade angular desse em função da latitude. Como esperado, tudo volta ao “normal” quando considerado desprezível o efeito característico advindo do modelo de branas.

Mas para chegarmos a esses resultados, precisamos levar em conta a seguinte sequência lógica: o primeiro capítulo ficou destinado a revisão do procedimento descrito por [19] para a obtenção da métrica estática (exterior) do buraco negro pulsante; no capítulo seguinte a forma generalizada do algoritmo de Newman-Janis é apresentada sendo esse a ferramenta matemática que nos possibilita o cálculo do elemento de linha com rotação. Ainda nessa parte, iremos mostrar como o algoritmo é executado e obteremos a métrica de Kerr a partir da de Schwarzschild e faremos algumas análises do espaço-tempo; Por fim, no último capítulo, usaremos as informações auferidas nos tópicos anteriores para a obtenção de nossa solução.

Aqui adotamos o sistema de unidades a qual $G = c = \hbar = k_B = 1$ e a assinatura da métrica como sendo $(+, -, -, -)$.

Capítulo 1

Buraco Negro Pulsante

Em 1784, o astrônomo inglês John Goodricke descobriu que a estrela chamada de δ por Bayer, perto da Cabeça de Cepheus, mostrou com certo grau de regularidade variações em sua luminosidade. Desde então, foram descobertas várias outras estrelas com esse caráter luminoso, a qual atualmente são denominadas de Cefeidas [23].

A explicação teórica desse fenômeno e também o primeiro elemento de uma teoria de pulsação veio com o físico alemão August Ritter, em 1879. Ele propôs a seguinte expressão:

$$\sigma^2 = (3\gamma - 4) \frac{g}{R} = (3\gamma - 4) \frac{4\pi}{3} \rho, \quad (1.1)$$

onde γ é o raio do calor específico, g a aceleração da gravidade na superfície, R é o raio da estrela, e ρ é a densidade [23].

Com esta equação foi possível entender e obter uma representação, notavelmente boa, dos períodos de oscilação luminosa observados. Porém, com o advento da TRG nós passamos a ter uma perspectiva diferente do espaço-tempo e com isso mudamos também a análise sobre o mesmo. É por isso que foram necessários novos modelos mais rebuscados para a descrição desse fenômeno. É o caso da solução descrita por Oppenheimer e Snyder (1939). Essa descreve o colapso gravitacional a partir da TRG de uma estrela no momento em que todas as fontes de energia termonucleares são esgotadas, fazendo com que a estrela muito pesada entre em colapso. A menos que a fissão devida à rotação, a radiação de massa, ou a dissipação de massa por radiação, reduza a massa da estrela à ordem da do

Sol, essa contração continuará indefinidamente [22].

Todavia, como comentado anteriormente, a TRG nos proporciona soluções que admitem singularidade e por isso devemos substituí-la por uma teoria mais refinada. É com esse desígnio que neste capítulo faremos uma breve revisão sobre o trabalho de Changjun Gao *et al.* para entendermos como se dá a correção da explicação dada por Oppenheimer e Snyder (1939) a partir dos modelos de LQG e/ou Braneworld, nos conduzindo assim ao elemento de linha de nosso interesse.

1.1 Esfera fluida pulsante em coordenadas comóveis

O modelo padrão, também conhecido como modelo do *Big Bang*, é baseado em um pressuposto, conhecido como o princípio cosmológico, que afirma que o Universo é homogêneo e isotrópico [3, 24, 25]. Dito de outra forma, tal princípio estabelece que o Universo é o mesmo em todas as direções, a partir de cada ponto do espaço, e que nele não existem pontos privilegiados. Em suma, o que isto quer dizer é que o modelo ao qual se aplica ao Universo como molde teórico e que leva em conta o princípio cosmológico é descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (a qual descreve a evolução de um fluido perfeito), sendo dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2, \quad (1.2)$$

em que t é o tempo físico, $a(t)$ é um fator de escala acoplado à métrica para corrigir a escala do espaço e dl^2 representa o elemento de linha num espaço tridimensional de curvatura constante, que é consequência da aplicação do princípio cosmológico.

Nas coordenadas esféricas, o elemento dl^2 é escrito como [24, 3, 26]:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.3)$$

onde a constante κ define a geometria do espaço-tempo em questão. De fato, no caso em que $\kappa = 1$, a geometria é esférica e o Universo é fechado; quando $\kappa = -1$, a geometria é

hiperbólica e o Universo é aberto; por fim, na situação em que $\kappa = 0$, a geometria é plana e o Universo também é aberto.

Usando (1.3), a métrica (1.2) toma a seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right). \quad (1.4)$$

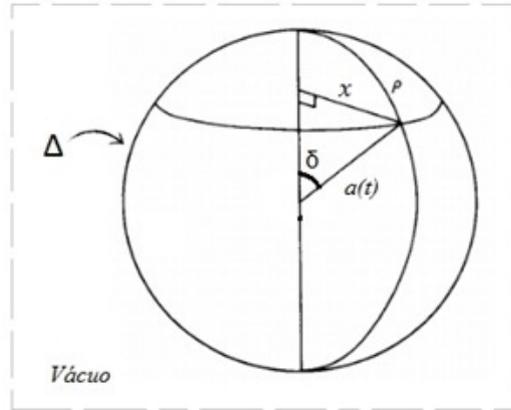
Para se chegar a essa conclusão usamos o referencial ao qual se define que o observador se move junto com a expansão ou contração do fluido, ou seja, para o observador a matéria fica em repouso em relação a ele, e com isso a distância s_{AB} entre dois pontos A e B é constante [27]. A homogeneidade de matéria implica que as linhas de fluxo de um fluido são constantes ao longo das trajetórias (r, θ, φ) . É por isso, que essas coordenadas são chamadas de comóveis.

A partir da análise da figura 1, podemos perceber que a relação entre o sistema de coordenadas a qual (1.4) é descrita (como comóvel) e o sistema físico, é dada pela relação [27, 28]:

$$x = r \cdot a(t), \quad \text{sendo que} \quad r = \text{sen}\delta, \quad (1.5)$$

onde x é a coordenada física, r é a coordenada comóvel.

Figura 1: esfera tridimensional que apresenta a relação entre as coordenadas comóveis e as coordenadas físicas.



Desenvolvido pelo autor.

Na figura acima, ρ é o raio próprio. Perceba que quando x aumenta (ou diminua), a superfície Δ da esfera segue esse crescimento (ou decrescimento), mas δ e, conseqüentemente, r ficam constantes.

Na expressão (1.4), o único termo desconhecido é o fator de escala $a(t)$. Obviamente, admitindo que a TRG é a teoria que descreve a evolução do campo gravitacional, este fator deve obedecer às equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} . \quad (1.6)$$

Onde k é a constante de Einstein.

As componentes covariantes não nulas da métrica de FLRW são:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -a^2/(1 - \kappa r^2), \quad g_{22} = -r^2 a^2 \quad \text{e} \quad g_{33} = -a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta . \quad (1.7)$$

Levando isto em conta, vemos que as componentes não-nulas do tensor de Ricci são [3, 6, 24]:

$$R_{00} = -3\ddot{a}/a , \quad (1.8)$$

$$R_{11} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa)/(1 - \kappa r^2) , \quad (1.9)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) , \quad (1.10)$$

$$R_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) . \quad (1.11)$$

E, conseqüentemente, que o escalar de Ricci é

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \Rightarrow R = -6(a\ddot{a} + \dot{a} + \kappa)/a^2 . \quad (1.12)$$

O tensor energia-momento de um fluido perfeito é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} , \quad (1.13)$$

onde ρ , p e u^μ são, respectivamente, a densidade, a pressão e a quadrivelocidade da matéria¹.

Para observadores comóveis, ou seja, que se movimentam junto com o fluido, temos que $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Daí, temos que as componentes não-nulas do tensor energia-momento são dadas por:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{11} = pa^2/(1 - \kappa r^2), \quad T_{22} = pr^2a^2 \quad \text{e} \quad T_{33} = pa^2r^2 \text{sen}^2\theta. \quad (1.14)$$

Fazendo $\mu = \nu = 0$ e $\mu = \nu = 1$ nas equações de Einstein, e usando os resultados apresentados, obtemos:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 - \kappa, \quad (1.15)$$

e

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2} \left(8\pi a p + \dot{a}H + \frac{\kappa}{a} \right), \quad (1.16)$$

que são as equações de Friedmann, sendo $\dot{a} = da/dt$ e $\ddot{a} = d^2a/dt^2$.

Estas equações, eq.(1.15) e eq.(1.16), determinam a evolução temporal de $a(t)$ e, conseqüentemente, a dinâmica do fluido. Em outras palavras, Podemos dizer que a expressão (1.15) representa a velocidade radial da expansão ou contração do fluido e a seguinte, (1.16), a aceleração.

Os tipos de matéria-energia e densidades que são mais comumentes usadas na literatura são as da poeira, da radiação e da matéria dura, respectivamente, descritas por:

$$\rho = \frac{\rho_p}{a^3}, \quad \rho = \frac{\rho_r}{a^4} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{\rho_m}{a^6}, \quad (1.17)$$

onde ρ_p , ρ_r e ρ_m são constantes. Estas densidades podem ainda serem escritas numa única equação geral, dada por:

$$\rho = \frac{\rho_f}{a^{f+2}}, \quad \text{com} \quad f = 1, 2, 4. \quad (1.18)$$

¹Na equação (1.13), para que o princípio cosmológico seja satisfeito, as quantidades ρ e p devem depender apenas de t .

Assumindo que a esfera fluida está inicialmente em repouso em $t = 0$ e tenha raio inicial a_0 , temos:

$$\dot{a}(0) = 0, \quad (1.19)$$

assim sendo, teremos:

$$\kappa = \frac{8\pi \rho_f}{3 a_0^f}. \quad (1.20)$$

Então a eq.(1.15) pode ser escrita como sendo:

$$\dot{a} = -\sqrt{\kappa \left[\left(\frac{a_0}{a} \right)^f - 1 \right]}. \quad (1.21)$$

A solução desta expressão pode ser dada em termo da função hipergeométrica seguinte:

$$t = -\frac{ia}{\sqrt{\kappa}} \cdot \text{hypergeom} \left(\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{f} \right], \left[1 - \frac{1}{f} \right], \frac{a_0^f}{a^f} \right) + \text{const.}, \quad (1.22)$$

sendo i a unidade imaginária.

Fazendo a análise de (1.22), percebemos que, se $f = 1$, para que a esfera se contraia de $a = a_0$ para $a = 0$, deve levar um tempo muito grande, ou seja, a partir do momento em que a poeira começar a colapsar esse efeito nunca mais cessará, e quando $a = 0$ for atingido o estado clássico da esfera fluida nesse momento terá densidade e curvatura infinitas e uma singularidade será formada: este é o resultado bem conhecido de Oppenheimer e Snyder (1939) para o colapso da poeira. A singularidade mostra-se também em situações mais gerais pelo teorema da singularidade de Hawking e Penrose e suas generalizações [19].

Por outro lado, a solução (1.22) revela que, no caso clássico, quando $f = 2$, a esfera fluida colapsa do raio inicial finito a_0 para um estado em que o “raio de desaparecimento” (raio crítico clássico) $a = 0$ em um tempo próprio finito da ordem de [19]:

$$t \sim \frac{a_0}{\sqrt{\kappa}} \quad (1.23)$$

Da mesma forma, quando em (1.22) assumimos $f = 4$ o colapso possui um tempo finito, porém complexo. Isto, apenas indica que esse processo, dado pela atração gravitacional, para esse tipo de matéria, não é atingido naturalmente. Isto implica dizer, por exemplo, que planetas não viram BN apenas por efeito da gravidade.

Sendo assim, vemos que existe um problema para o caso de $f = 1$, pois temos uma divergência que pode ser característica de uma inconsistência dada pela TRG. Essas singularidades, que sinalizam a quebra da teoria da gravidade de Einstein, devem ser removidas em uma teoria da gravidade mais fundamental, como a LQG ou a teoria de cordas [19]. Por isso, a expressão (1.15) para descrever um colapso de uma esfera fluida deve sofrer uma alteração devido aos modelos de brana e/ou LQG. Sendo, agora, substituída por [19, 29]:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} a^2 \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{cr}} \right), \quad (1.24)$$

com ρ_{cr} sendo a densidade crítica e tomada como da ordem da densidade de energia de Planck ρ_{pl} . Nesta expressão, tomamos $\kappa = 0$. Caso ele seja não nulo, teremos:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} a^2 \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{cr}} \right) - \kappa, \quad (1.25)$$

para modelos de mundos brana, e:

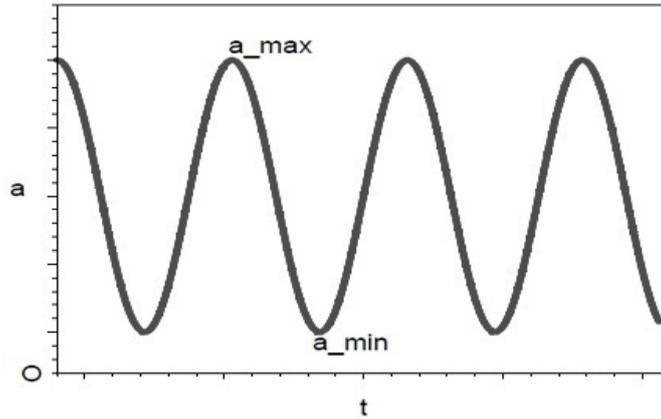
$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} a^2 (\rho - \rho_1) \left(\frac{\rho_2}{\rho_{cr}} - \frac{\rho}{\rho_{cr}} \right), \quad (1.26)$$

para modelos de LQG, sendo $\rho_1 = -\kappa\chi\rho_{cr}$ e $\rho_2 = \rho_{cr}(1 - \kappa\chi)$.

A partir disto, é fácil concluir que se temos $\kappa \neq 0$ as equações acima possuem formas diferentes e com isso promovem resultados distintos, mas como as evidências mostram que a geometria do espaço deve ser plana e como LQG e Braneworld para esse valor de κ produzem a mesma correção, bastaríamos utilizar a eq.(1.24) para a adequada correção. Porém Changjun Gao *et al.* propuseram o emprego de (1.25) para a correção da TRG. Além disso, resultados recentes de [30], nos mostram que a expressão (1.25) não necessita de um espaço-tempo com uma dimensão temporal extra para sua validade, como é proposto por [31].

A figura 2, apresenta a curva que descreve a evolução do raio da esfera fluida, com $\rho = \rho_f/a^{f+2}$. O raio da esfera fluida oscila entre um máximo a_{max} . e um mínimo a_{min} sendo que a singularidade do caso clássico em $a = 0$ nunca é formada. A razão para esse comportamento pode ser entendida da seguinte maneira. De acordo com a equação modificada (1.25), a densidade de energia aumenta continuamente à medida que a esfera se contrai, enquanto o termo κ no lado direito desta equação pode ser desprezado. À medida que a densidade se aproxima da densidade crítica, o colapso para e, a partir de então, a esfera começa a se expandir. Quando atinge o raio máximo, a expansão cessa e a esfera começa a colapsar novamente [19].

Figura 2: evolução do fator de escala $[a(t)]$ no tempo.



Retirado de: Changjun Gao, 2018.

Podemos, ainda, analisar a formação ou não de singularidade pelo escalar de Kretschmann, sendo que esse nos fornece a quantidade de curvatura do espaço-tempo em questão. Ele é definido como [1, 2, 17, 32]:

$$\mathcal{K} = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1.27)$$

que calculado para (1.4), implica em:

$$\mathcal{K} = \frac{12\kappa^2}{a^4}, \quad (1.28)$$

que não diverge, pois $a(t) > 0$, com a correção já discutida aqui.

Como o cenário descrito é de um observado comóvel, percebe-se que a singularidade não é formada e disto surgem as seguintes questões: a) fora da esfera fluida existe um horizonte de buraco negro ou não? b) as soluções exteriores são estáticas? Para responder a estas perguntas, é necessário considerar a situação em que o observador se localiza no infinito espacial (ou longe o suficiente da superfície da esfera fluida). Essa análise será feita no próximo tópico.

1.2 Observador no infinito espacial

Para que possamos responder se a métrica dada por (1.4) com a correção dada por (1.25) gera um horizonte de buraco negro, devemos estender o espaço-tempo através da superfície Δ da esfera fluida ao infinito espacial.

Para tal, como visto anteriormente, devemos fazer a seguinte mudança nas coordenadas de (1.4) [19]:

$$r \equiv \frac{x}{a(t)}. \quad (1.29)$$

Com esta mudança, o elemento de linha de FLRW será:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{x^2 H^2}{1 - \kappa r^2}\right) dt^2 + \frac{2xH}{1 - \kappa r^2} dt dx - (1 - \kappa r^2)^{-1} dx^2 - x^2 d\Omega^2, \quad (1.30)$$

sendo que $H = \dot{a}/a$, ou seja, o parâmetro de Hubble e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

Na perspectiva de eliminarmos os termos cruzados da eq.(1.30) devemos substituir o tempo comóvel t por uma nova coordenada². Para que nossa mudança seja consistente, devemos entender de maneira geral como isso deve acontecer, em outras palavras, necessitamos compreender quais condições essa transformação deve satisfazer.

Então, a forma geral de uma métrica que possui um termo “cruzado ($x-t$)” é dada por [6]:

$$ds^2 = A(t, x)dt^2 + B(t, x)dx^2 + 2C(t, x)dt dx + D(t, x)d\Omega^2, \quad (1.31)$$

²Aqui vamos escolher uma mudança diferente da proposto por Gao, Youjun, Shen e Faraoni (2018). Porém, chegaremos a mesma conclusão, apenas sendo que nossa solução possuirá um caráter particular em relação a dos autores já citados.

onde $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$ e $D(t, x)$ são funções arbitrárias de t e x .

Sabemos também que as equações de Einstein são invariantes por transformações de coordenadas. Por esta razão, podemos escolher um sistema que simplifique a expressão (1.31) e a torne um pouco mais semelhante a (1.30). Então, é conveniente tomar as novas coordenadas t' e x' , de modo que $t' = t$ e $x'^2 = -D(t, x)$. Fazendo esta substituição na equação (1.31) e retirando a linha, obtemos:

$$ds^2 = A(t, x)dt^2 + B(t, x)dx^2 + 2C(t, x)dtdx - x^2d\Omega^2. \quad (1.32)$$

Mas queremos eliminar o termo cruzado. Para tanto, consideremos uma nova coordenada temporal t' , tal que, $t' = t'(t, x)$. Assim, sendo $m(t', x)$ uma função arbitrária de t' e x , temos:

$$m(t', x)(dt')^2 = m(t', x) \left[\left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right)^2 dx^2 + 2 \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 dt^2 \right]. \quad (1.33)$$

Escolhamos, arbitrariamente, que a função $m(t', x)$ satisfaz as seguintes equações [6, 32]:

$$m(t', x)(dt')^2 = A(t, x), \quad (1.34)$$

e

$$m(t', x) \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) = C(t, x), \quad (1.35)$$

ou seja, que t' seja solução da equação diferencial seguinte:

$$A(t, x) \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right) - C(t, x) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.36)$$

Então, nossa escolha deverá satisfazer a condição (1.36) para que ela seja adequada. Daí, comparando as expressões (1.32) com (1.30) e levando em consideração as condições acima descritas, concluímos que nossa escolha poderá ser:

$$dt' = \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) dt - \frac{\partial t'}{\partial x} dx \Rightarrow dt' = dt - F dx. \quad (1.37)$$

com

$$F = -\frac{g_{01}}{g_{00}} = -\frac{xH}{1 - \kappa r^2 - x^2 H^2}. \quad (1.38)$$

Com estes resultados a equação (1.30) torna-se:

$$ds^2 = \left[\frac{1}{1 - \kappa r^2} (1 - \kappa r^2 - x^2 H^2) \right] dt'^2 - (1 - \kappa r^2 - x^2 H^2)^{-1} dx^2 - x^2 d\Omega^2 \quad (1.39)$$

Definindo uma quantidade Q , tal que:

$$Q^2 = \frac{1}{1 - \kappa r^2}. \quad (1.40)$$

Isso implica que:

$$ds^2 = Q^2 (1 - \kappa r^2 - x^2 H^2) dt'^2 - (1 - \kappa r^2 - x^2 H^2)^{-1} dx^2 - x^2 d\Omega^2. \quad (1.41)$$

Substituindo (1.18) em (1.25), e depois substituindo o valor encontrado na eq.(1.41), além de algumas manipulações algébricas, teremos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= Q^2 \left[1 - \frac{8\pi \rho_f r^{f+2}}{3 x^f} \left(1 - \frac{\rho_f r^{f+2}}{\rho_{cr} x^{f+2}} \right) \right] dt'^2 - x^2 d\Omega^2 + \\ &- \left[1 - \frac{8\pi \rho_f r^{f+2}}{3 x^f} \left(1 - \frac{\rho_f r^{f+2}}{\rho_{cr} x^{f+2}} \right) \right]^{-1} dx^2. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Aqui os componentes métricos devem ser entendidos como funções de t' e x obtidos pela resolução das equações (1.29), (1.37) e (1.40). Esta métrica é contínua com a geometria interior (FLRW), ao qual pode se estender ao infinito espacial, contanto que condições de junção adequadas sejam satisfeitas na superfície Δ da esfera [19].

Para entender completamente o comportamento da esfera fluida corrigida quanticamente, deve-se determinar também a estrutura do espaço-tempo fora da esfera. Mas ao fazer isso surgem as perguntas: o que é essa geometria exterior? É o espaço-tempo de Schwarzschild? A resposta é não, pelo seguinte motivo. Na superfície Δ as geometrias exterior e interior devem corresponder-se continuamente. De acordo com as condições de junção de Israel, se a partida não puder ser alcançada, então há uma camada de material na superfície Δ da esfera. A relação entre o salto do tensor energia-tensão na superfície

e sua geometria intrínseca é regulada por equações de campo (na relatividade geral, o salto do tensor de Einstein é proporcional ao salto do tensor energia-tensão de acordo com as equações de Einstein). No nosso caso, no entanto, nenhuma camada de material está presente em Δ e as condições mínimas de junção exigidas em qualquer teoria da gravidade, que é a combinação contínua de 3-métricas induzidas e curvaturas extrínsecas, são impostas [19]. Nota-se que pontos semelhantes são esclarecidos em termos gerais por [33]³.

A seguir, obteremos o espaço-tempo exterior usando o “truque de superfície”⁴. Verifica-se que a geometria exterior corresponde continuamente a geometria FLRW interior na superfície da esfera do fluido [19].

Na superfície da esfera, temos que $r = r_0$ (lembrando que r é uma coordenada comóvel e r_0 é uma constante). Daí, a equação (1.42) ficará assim:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2M_f}{x^f} \left(1 - \frac{l^{f+2}}{x^{f+2}} \right) \right] d\tau^2 - \left[1 - \frac{2M_f}{x^f} \left(1 - \frac{l^{f+2}}{x^{f+2}} \right) \right]^{-1} dx^2 - x^2 d\Omega^2, \quad (1.43)$$

onde temos que:

$$M_f \equiv \frac{4\pi}{3} \rho_f r_0^{f+2} \quad \text{e} \quad l^{f+2} \equiv \frac{\rho_f r_0^{f+2}}{\rho_{cr.}}. \quad (1.44)$$

Aqui redefinimos o tempo t' , para:

$$\tau = \int Q(t', r_0) dt'. \quad (1.45)$$

A partir da eq.(1.43), podemos perceber que quando $f = 1$ (que descreve o caso da poeira sem pressão), temos que M_1 é a energia fluida que é cercada pela esfera. Os l -termos presentes no elemento de linha (1.43), são gerados pela correção dada pelos modelos de Mundos Brana e/ou LQG (caso $\kappa = 0$). Note também que quando $f = 1$ e $l \ll x$ essa expressão se reduz a métrica de Schwarzschild. O mais importante para nós neste trabalho, é que a expressão (1.43) descreve uma família de espaços-tempos estáticos

³Para uma análise mais detalhada do que foi dito aqui, ver [19] e suas citações.

⁴Este método é descrito no Apêndice A da referência [19] para espaços-tempos gerais estáticas e esféricamente simétricos)

e esfericamente simétricos (de 2-parâmetros, M_f e l) [19] além de ser quadridimensional. Por esse motivo, é que ela nos interessa, pois, como veremos adiante, estas características constituem os elementos chave para a aplicação do algoritmo de Newman-Janis.

A interpretação física que se pode dar a eq.(1.43), é que esta representa a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos no espaço-tempo exterior devido ao efeito do campo gravitacional do objeto, sendo esse último um fluido perfeito sem carga elétrica com distribuição esférica que possui uma dinâmica radial de pulsação (colapso e expansão), sendo que a expressão em questão possui a correção dada pelo modelo de Braneworlds/LQG.

A equação dos horizontes aparentes⁵, quando existem, é:

$$1 - \frac{2M_f}{x^f} \left(1 - \frac{l^{f+2}}{x^{f+2}} \right) = 0, \quad (1.46)$$

ou

$$1 - \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_f r_0^{f+2}}{x^f} \left(1 - \frac{\rho_f r_0^{f+2}}{\rho_{cr} x^{f+2}} \right) = 0. \quad (1.47)$$

Em geral, esta equação têm duas soluções positivas, o que significa que existem dois horizontes aparentes com raios x_+ e x_- . x_+ denota o horizonte aparente exterior e uma superfície de *redshift* infinito, enquanto x_- denota um horizonte aparente interior e também uma outra superfície de *redshift* infinito⁶.

Nosso próximo passo (no tópico seguinte) será apresentar o algoritmo de Newman-Janis de forma geral, e depois, como exemplo, executá-lo na métrica de Schwarzschild para obtermos a de Kerr, que consiste numa métrica com rotação.

⁵Nos capítulos seguintes faremos a argumentação adequada para explicar o porquê desta escolha nos proporcionar os horizontes de eventos.

⁶Para ver mais detalhes além de outros comentários sobre esta solução, ver [19].

Capítulo 2

Algoritmo de Newman-Janis (ANJ)

As equações da gravitação dadas pela TRG (eq.(1.6)), possuem de um lado a informação geométrica do espaço-tempo e do outro como se dá a distribuição de matéria-energia nesse ambiente. Com elas, podemos calcular o elemento de linha de um arranjo físico-material qualquer. Porém nem sempre os procedimentos algébricos condizentes aos ingredientes que são oferecidos às equações de campo einstenianas são triviais e, às vezes, não é possível obter soluções analíticas exatas. Um exemplo, de um desses procedimentos matemáticos de difícil execução via equação de Einstein-Hilbert, é o cálculo da métrica de Kerr.

Nessa, levamos em conta a rotação do objeto ao qual se estuda em uma métrica geral, além dos outros elementos, e dela retiramos o tensor métrico que é utilizado em (1.6) para auferir as equações de movimento [15]. Esse procedimento pode parecer simples, mas resolver diretamente as equações de vácuo da TRG, acaba por ser um processo bastante longo e geralmente difícil [2].

Por essa razão, a utilização do algoritmo de Newman-Janis (ao qual produz mais facilmente uma métrica com rotação sem que seja preciso resolver diretamente as equações de Einstein-Hilbert) é mais indicada. Mas para tal, deve-se inicialmente ter uma métrica “primária” ao qual ela deva ser estática, esféricamente simétrica e quadridimensional. Essa servirá de base para a construção da métrica com rotação [34].

Neste capítulo, abordaremos a forma mais geral do ANJ e o utilizaremos, como exemplo, na métrica de Schwarzschild para obtermos a de Kerr.

2.1 Forma geral do ANJ

Descreveremos, agora, como gerar uma métrica com rotação a partir de uma estática pelo método utilizado por Newman-Janis na obtenção do elemento de linha de Kerr-Newman. A nossa perspectiva consiste em executarmos $4 + 1$ passos algébricos¹, sendo esse último apenas uma simplificação da métrica obtida ao fim do quarto passo² [34, 35, 36, 37, 38, 39]. Vejamos:

Dada a métrica estática (quadridimensional) na forma:

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.1)$$

1º Faz-se a seguinte mudança na coordenada temporal:

$$dt = du + e^{\lambda(r)-\phi(r)} dr. \quad (2.2)$$

Esta escolha se dá quando consideramos uma classe de geodésicas radiais nulas, definidas exigindo que $ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ e utilizando do princípio variacional de Euler-Lagrange [2].

Como resultado da substituição de (2.2) em (2.1), teremos uma métrica nas coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein, ou seja:

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 + 2e^{\lambda(r)+\phi(r)} dudr - r^2 d\Omega^2. \quad (2.3)$$

2º Expressar a forma contravariante do tensor métrico correspondente ao elemento de linha (2.3), ou seja:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\phi(r)-\lambda(r)} & 0 & 0 \\ \cdot & -e^{-2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -1/r & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1/r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Isto é feito para que o tensor métrico acima possa ser escrito em termos de seus vetores de tetrada nula. Essa nova base é composta por quatro campos vetoriais

¹Em algumas literaturas vemos que o ANJ é descrito em três ou quatro ou até em mais passos ou apenas num único processo, porém isso não é importante desde que os procedimentos descritos estejam corretamente apresentados e conduzam ao mesmo resultado final.

²Esse passo já nos fornece o elemento de linha com os fatores que indicam a rotação.

independentes e_i^a , onde i serve para rotular os vetores. Então, trabalhando em um ponto, definimos uma matriz de escalares g_{ij} , chamada de *frame metric*, dada por:

$$g_{ij} = g_{ab}e_i^a e_j^b, \quad \text{sendo que} \quad g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k. \quad (2.5)$$

Se escolhermos:

$$(e_0^a, e_1^a, e_2^a, e_3^a) = (l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a), \quad (2.6)$$

podemos escrever:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu, \quad (2.7)$$

onde \bar{m}^μ é o complexo conjugado de m^μ .

Os vetores nulos da base tetrada, descrito na forma avançada de Eddington-Finkelstein, para a eq.(2.3), são:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.8)$$

$$n^\mu = e^{-\lambda(r)-\phi(r)}\delta_0^\mu - \frac{1}{2}e^{-2\lambda(r)}\delta_1^\mu \quad (2.9)$$

e

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta}\delta_3^\mu \right). \quad (2.10)$$

Para tais vetores serem tetradas nulas, eles devem obedecer as relações de ortonormalidade:

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = 0, \quad l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1, \quad l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0. \quad (2.11)$$

3º Estender as coordenadas x^ρ para um novo sistema de coordenadas complexas \tilde{x}^ρ , e, simultaneamente, fazer com que os vetores da base tetrada fiquem sujeitos a uma transformação do tipo³:

$$Z_\sigma^\mu \rightarrow \tilde{Z}_\sigma^\mu(\tilde{x}^\rho, \bar{\tilde{x}}^\rho). \quad (2.12)$$

³Aqui condensamos os quatro vetores da base tetrada nesta forma por simplicidade, sendo que o índice covariante serve para rotulá-los. Ou seja, temos $Z_\sigma^\mu = (Z_0^\mu, Z_1^\mu, Z_2^\mu, Z_3^\mu) = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$.

Mas que satisfaçam a seguinte condição:

$$\tilde{Z}_\sigma^\mu(\tilde{x}^\rho, \tilde{\bar{x}}^\rho)|_{\tilde{x}^\rho = \tilde{\bar{x}}^\rho} = Z_\sigma^\mu(x^\rho). \quad (2.13)$$

Ou seja, a escolha que complexifica as coordenadas deve ser de tal maneira que quando tornarmos essas reais novamente, deveremos obter a forma original das mesmas sem nenhuma alteração. Assim, podemos escrever:

$$\tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.14)$$

$$\tilde{n}^\mu = \left(e^{-\lambda(\tilde{r}, \tilde{\bar{r}}, \tilde{\theta}, \tilde{\bar{\theta}}) - \phi(\tilde{r}, \tilde{\bar{r}}, \tilde{\theta}, \tilde{\bar{\theta}})} \right) \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(e^{-2\lambda(\tilde{r}, \tilde{\bar{r}}, \tilde{\theta}, \tilde{\bar{\theta}})} \right) \delta_1^\mu, \quad (2.15)$$

$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\tilde{r}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\tilde{\theta}} \delta_3^\mu \right) \quad (2.16)$$

e

$$\tilde{\bar{m}}^\mu = \frac{1}{\tilde{\bar{r}}} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\tilde{\bar{\theta}}} \delta_3^\mu \right). \quad (2.17)$$

4° Fazer uma escolha analítica para as coordenada complexificadas, que aqui utilizaremos a mesma que foi escolhida por [39] e [34]:

$$\tilde{x}^\rho = x^\rho + i\alpha(\delta_0^\rho - \delta_1^\rho)\cos\theta \quad \text{com } \rho = 0, 1, 2, 3. \quad (2.18)$$

ou seja,

$$\tilde{u} = u + i\alpha\cos\tilde{\theta}, \quad \tilde{r} = r - i\alpha\cos\tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = \theta \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi} = \varphi. \quad (2.19)$$

Calculamos, agora, a transformação dos tensores \tilde{Z}_σ^μ em Z_σ^μ , utilizando (2.18) ou (2.19), com a expressão:

$$Z_\sigma^\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{Z}_\sigma^\mu. \quad (2.20)$$

Com isso, teremos:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.21)$$

$$n^\mu = e^{-\lambda(r,\theta)-\phi(r,\theta)} \delta_0^\mu - \frac{1}{2} e^{-2\lambda(r,\theta)} \delta_1^\mu, \quad (2.22)$$

$$m^\mu = \frac{r - i\alpha \cos\theta}{\sqrt{2}\Sigma} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu + i\alpha(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) \sin\theta \right) \quad (2.23)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{r + i\alpha \cos\theta}{\sqrt{2}\Sigma} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu - i\alpha(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) \sin\theta \right), \quad (2.24)$$

onde $\Sigma = r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta$. Com isso, podemos calcular as componentes do tensor métrico contravariante, dado pela expressão (2.7) usando os vetores de tetrada nula (2.21), (2.22), (2.23) e (2.24):

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^2 \sin^2\theta}{\Sigma} & e^{-\phi(r,\theta)-\lambda(r,\theta)} + \frac{\alpha^2 \sin^2\theta}{\Sigma} & 0 & -\alpha/\Sigma \\ \cdot & -e^{-2\lambda(r,\theta)} - \frac{\alpha^2 \sin^2\theta}{\Sigma} & 0 & \alpha/\Sigma \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\Sigma \sin^2\theta} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

E sendo a forma covariante desta matriz dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(r,\theta)} & e^{\phi(r,\theta)+\lambda(r,\theta)} & 0 & \alpha \sin^2\theta e^{\phi(r,\theta)} [e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\phi(r,\theta)}] \\ \cdot & 0 & 0 & -\alpha \sin^2\theta [e^{\phi(r,\theta)+\lambda(r,\theta)}] \\ \cdot & \cdot & -\Sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\sin^2\theta \left[\Sigma + \frac{\alpha^2 \sin^2\theta e^{\phi(r,\theta)}}{(2e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\phi(r,\theta)})^{-1}} \right] \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

como o tensor métrico é simétrico, o “ \cdot ” é usado para indicar que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Esta métrica se preserva ainda nas coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein, já que as coordenadas em que ela está descrita nos fornece geodésicas radiais nulas (em linhas retas) [2].

Quando utilizarmos (2.26) para escrever o elemento de linha na forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.27)$$

estaremos de posse da expressão que nos fornece o resultado geral do algoritmo de Newman-Janis (ANJ) para qualquer métrica que seja simetricamente esférica e estática⁴.

⁴Essa característica se dá pela ausência inicialmente de termos cruzados na métrica e as componentes não serem funções explícitas do tempo, ou seja, para usarmos o ANJ o elemento de linha em questão deverá possuir a mesma forma analítica de (2.1)

Contudo, a forma a que a métrica (2.27) se apresenta com o emprego de (2.26), embora relativamente simples, não possui uma aparência adequada para se trabalhar (com o manuseio algébrico e interpretações físicas advindas da mesma). Por isso, para eliminar esse problema pode-se fazer uma transformação de calibre para que a única componente fora da diagonal seja $g_{\varphi t}$ [36, 37]. Para tal, precisamos processeguir com a execução do quinto e último passo do ANJ.

5º Escrever a nova métrica nas coordenadas Boyer-Lindquist, por meio de uma transformação da forma $du = dt + g(r)dr$ e $d\varphi = d\psi + h(r)dr$, onde as funções $g(r)$ e $h(r)$ serão dadas por:

$$g(r) = -\frac{e^{\lambda(r,\theta)} [\Sigma + \alpha^2 \text{sen}^2\theta (e^{\lambda(r,\theta)+\phi(r,\theta)})]}{e^{\phi(r,\theta)} [\Sigma + \alpha^2 \text{sen}^2\theta e^{2\lambda(r,\theta)}]} \quad (2.28)$$

e

$$h(r) = -\frac{\alpha e^{2\lambda(r,\theta)}}{\Sigma + \alpha^2 \text{sen}^2\theta e^{2\lambda(r,\theta)}}. \quad (2.29)$$

Após algumas manipulações algébricas verifica-se que nestas coordenadas, (t, r, θ, ψ) , o tensor métrico dado por (2.26), torna-se:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(r,\theta)} & 0 & 0 & \alpha \text{sen}^2\theta e^{\phi(r,\theta)} [e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\phi(r,\theta)}] \\ \cdot & \frac{\Sigma}{[\Sigma e^{-2\lambda(r,\theta)} + \alpha^2 \text{sen}^2\theta]} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -\Sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\text{sen}^2\theta \left[\Sigma + \frac{\alpha^2 \text{sen}^2\theta e^{\phi(r,\theta)}}{(2e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\phi(r,\theta)})^{-1}} \right] \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Este tensor métrico, nos fornece o elemento de linha ao qual o corpo esférico que produz o campo gravitacional está em movimento de rotação. Salientamos que esta representa uma família completa de métricas que podem ser obtidas executando o ANJ em qualquer métrica quadridimensional simetricamente esférica e estática, sendo essa descrita em coordenadas do tipo Boyer-Lindquist [35].

Nossa próxima etapa, como exercício, consistirá em executarmos o ANJ no elemento de linha de Schwarzschild para obtermos o de Kerr e entendermos de fato a obtenção de uma solução com rotação a partir de uma métrica estática. Além de que faremos as análises das propriedades, características e consequências dessa nova solução.

2.2 Obtendo a métrica de Kerr via ANJ

Como comentado na seção anterior, a solução de Kerr originalmente não foi desenvolvida aplicando o ANJ na métrica de Schwarzschild, mas sim resolvendo diretamente as equações de Einstein-Hilbert para um corpo esférico girante [15, 40, 41, 42]. Aqui, vamos explorar esse algoritmo na métrica estática de Schwarzschild e chegar na mesma conclusão de Kerr.

Para tal, comecemos apresentando o elemento de linha base⁵, dado por [1, 2, 6, 25]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{x}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{2M}{x}\right)^{-1} dx^2 - x^2 d\Omega^2. \quad (2.31)$$

Com isto, temos que:

$$e^{2\phi(x)} = \left(1 - \frac{2M}{x}\right), \quad e \quad e^{2\lambda(x)} = e^{-2\phi(x)}. \quad (2.32)$$

Então, a mudança para a coordenada temporal será:

$$d\tau = du + dx. \quad (2.33)$$

Com isto, o elemento de linha (2.31) se torna:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{x}\right) du^2 + 2dudx - x^2 d\Omega^2 \quad (2.34)$$

e dele podemos retirar:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\left(1 - \frac{2M}{x}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(x^2 \text{sen}^2\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Utilizando as expressões (2.8), (2.9) e (2.10), temos que os vetores nulos da base tetrada, para o espaço-tempo de Schwarzschild, descrito nas coordenadas de Eddington-Finkelstein, são [39]:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.36)$$

⁵Aqui definimos $t \equiv \tau$ e $r \equiv x$, para que a métrica (2.31) fique semelhante a de Gao (eq.1.43).

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{x} \right) \delta_1^\mu, \quad (2.37)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2x}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) \quad (2.38)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2x}} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (2.39)$$

Lembrando que \bar{m} é o complexo conjugado de m .

Usando, agora, o que é descrito no passo terceiro do ANJ, teremos:

$$\tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.40)$$

$$\tilde{n}^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - M \left(\frac{1}{\tilde{x}} + \frac{1}{\bar{\tilde{x}}} \right) \right] \delta_1^\mu, \quad (2.41)$$

$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{x}}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \tilde{\delta}_3^\mu \right) \quad (2.42)$$

e

$$\bar{\tilde{m}}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{x}}} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \tilde{\delta}_3^\mu \right). \quad (2.43)$$

Em sequência, o 4º passo nos fornece:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (2.44)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2Mx}{\Sigma} \right] \delta_1^\mu, \quad (2.45)$$

$$m^\mu = \frac{x - i\alpha\cos\theta}{\sqrt{2\Sigma}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu + i\alpha(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu)\text{sen}\theta \right) \quad (2.46)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{x + i\alpha\cos\theta}{\sqrt{2\Sigma}} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu - i\alpha(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu)\text{sen}\theta \right). \quad (2.47)$$

Com estes resultados e utilizando (2.7), teremos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & \frac{x^2 + \alpha^2}{\Sigma} & 0 & -\frac{\alpha}{\Sigma} \\ \cdot & -\Xi/\Sigma & 0 & \frac{\alpha}{\Sigma} \\ \cdot & \cdot & -1/\Sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1/(\Sigma \text{sen}^2 \theta) \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Lembrando que $\Sigma = x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta$. Temos ainda que $\Xi = x^2 + \alpha^2 - 2Mx$.

Usando o *Maple* para calcular a inversa, teremos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left[1 - \frac{2Mx}{\Sigma}\right] & 1 & 0 & \frac{2Mx \alpha \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} \\ \cdot & 0 & 0 & -\alpha \text{sen}^2 \theta \\ \cdot & \cdot & -\Sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\text{sen}^2 \theta}{\Sigma} [\Xi \alpha^2 \text{sen}^2 \theta - (\alpha^2 + x^2)^2] \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Esta métrica ainda pode ser reescrita com apenas o termo g_{03} fora da diagonal, utilizando as coordenadas de Boyer-Lindquist (que consiste em nosso 5º e último passo).

Para tal, temos para o caso de Kerr que:

$$du = d\tau + \frac{2Mx + \Xi}{\Xi} dx, \quad \text{e} \quad d\varphi = d\psi + \frac{\alpha}{\Xi} dx. \quad (2.50)$$

Com estas mudanças em (2.49), teremos que a métrica de Kerr nessas coordenadas, será [1, 2]:

$$ds^2 = \frac{\Xi}{\Sigma} (d\tau - \alpha \text{sen}^2 \theta d\psi)^2 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{\Sigma} [(x^2 + \alpha^2) d\psi - \alpha d\tau]^2 - \frac{\Sigma}{\Xi} dx^2 - \Sigma d\theta^2. \quad (2.51)$$

Perceba que quando substituirmos $\alpha = 0$ em (2.51), retomamos a métrica original (2.31). Veja também que os coeficientes dessa métrica são independentes de τ e ψ , e conseqüentemente a solução é estacionária e axialmente simétrica [2, 40]. Porém surgem as perguntas: a) O que caracteriza a rotação na expressão (2.51)? b) Quais os horizontes dessa nova solução? Vamos começar respondendo ao primeiro questionamento.

O primeiro argumento que indica o giro do corpo em (2.51), surge quando a comparamos com o elemento de linha de Lense-Thirring, para o campo gravitacional exterior de uma esfera girante com densidade constante no limite de campo fraco. Nota-se que α está relacionado com a velocidade angular e $(M\alpha)$ com o momento angular [40].

Uma outra forma de analisarmos essa quantidade é determinada em [40], que se procede da seguinte maneira. Dada a métrica de Kerr-Schild:

$$ds^2 = dt^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 - \left(\frac{2M\sigma^3}{\sigma^4 + \alpha^2 Z^2} \right) \times \left[dt + \frac{Z}{\sigma} dZ + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \alpha^2} (XdX + YdY) - \frac{\alpha}{\sigma^2 + \alpha^2} (XdY - YdX) \right]^2, \quad (2.52)$$

onde σ é uma constante, faz-se a expansão em série de potência de R^{-1} (onde $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, é a distância euclidiana), obtendo:

$$ds^2 = dt^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 - \left(\frac{2M}{R} \right) (dt + dR)^2 + \frac{4Ma}{R^3} (XdY - YdX)(dt + dR) + O(R^{-3}). \quad (2.53)$$

Agora, fazendo uma transformação infinitesimal de coordenadas do tipo $X^\mu \mapsto X^\mu + \Gamma^\mu$, implica que $ds^2 \rightarrow ds^2 + 2d\Gamma_\mu dX^\mu$. Impondo que:

$$\Gamma_\mu dX^\mu = \frac{\alpha M}{R^2} (XdY - YdX) \Rightarrow 2d\Gamma_\mu dX^\mu = 4M \frac{4\alpha M}{R^3} (XdY - YdX) dR,$$

então a aproximação (2.53), ficará:

$$ds^2 = dt^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 - \left(\frac{2M}{R} \right) (dt + dR)^2 + \frac{4Ma}{R^3} (XdY - YdX) dt + O(R^{-3}). \quad (2.54)$$

Os termos principais na aproximação linear para o campo gravitacional em torno de um corpo em rotação descrito por Kerr (1960) ou Papapetrou (1974)⁶ com a contribuição do vetor momento angular, \vec{J} , são dados por:

$$4R^{-3} \epsilon_{ijk} J^i X^j dX^k dt. \quad (2.55)$$

Quando comparamos esta expressão com o penúltimo termo de (2.54), percebemos que:

$$\vec{J} = (0, 0, M\alpha). \quad (2.56)$$

⁶Citados por [40].

Caso se queira a velocidade angular do objeto, teremos que tomar certo cuidado para obtê-la, pois a sua definição convencional terá que ser ligeiramente modificada antes que possamos aplicá-la a algo tão abstrato quanto a uma métrica do espaço-tempo [32]. Vamos considerar o destino de um fóton que é emitido na direção $\hat{\psi}$ em algum raio x do buraco negro de Kerr. No instante em que é emitido, seu momento não têm componentes na direção \hat{x} e $\hat{\theta}$ e, portanto, a condição de que a trajetória seja nula é [2, 32]:

$$ds^2 = g_{00}d\tau^2 + g_{03}(d\tau d\psi + d\psi d\tau) + g_{33}d\psi^2 = 0. \quad (2.57)$$

Resolvendo esta expressão, teremos [32]:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)^2 - \frac{g_{00}}{g_{33}}}. \quad (2.58)$$

Se avaliarmos (2.58) para $g_{00} = 0$ ⁷, as duas soluções serão [32]:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\alpha}{2M^2 + \alpha^2}. \quad (2.59)$$

A solução não-nula de (2.59) é interpretada como o fóton se movendo ao redor do BN na mesma direção da rotação desse. Já a solução nula de (2.59) podemos interpretá-la como o fóton está direcionado contra a rotação do BN ($\vec{v} = -v\hat{\psi}$) e não se move de maneira alguma neste sistema de coordenadas. De maneira abstrata, o que ocorre nesse lugar é que o espaço-tempo flui na velocidade da luz [43]. Este último caso é um exemplo de um fenômeno conhecido como o “arrastamento de quadros inerciais” [32].

Para o contexto de partículas massivas, que devem se mover mais lentamente que os fótons, são necessariamente arrastadas junto com a rotação do buraco negro quando estão dentro da superfície do limite estacionário. Esse arrastamento continua à medida que ela se aproxima do horizonte de eventos externo em x_+ . Nessa perspectiva, podemos definir a velocidade angular do próprio horizonte de eventos, ω_H , como sendo a velocidade angular mínima de uma partícula no horizonte. Diretamente de (2.58), descobrimos que

⁷Como veremos adiante, essa escolha nos remete às superfícies de limite estacionário ou também conhecidas por superfícies de *red-shift* infinito.

para o caso de Kerr [32, 44]:

$$\omega_H = \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)_{x=x_+} = \frac{\alpha}{(x_+)^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha}{2Mx_+}. \quad (2.60)$$

Agora, para responder a pergunta “b”, temos que analisar as hipersuperfícies⁸ dada pelo campo vetorial de *Killing*⁹.

Sendo ζ^μ um vetor de Killing (de uma métrica qualquer¹⁰), temos que [2, 4, 15, 32, 44, 45]:

- Se $\zeta_\mu \zeta^\mu < 0$, a hipersuperfície é tipo-espaço, e pode ser cruzada por objetos físicos somente em uma direção;
- Se $\zeta_\mu \zeta^\mu > 0$, a hipersuperfície é tipo-tempo, e pode ser cruzada em ambas as direções;
- Se $\zeta_\mu \zeta^\mu = 0$, a hipersuperfície é nula, e somente pode ser atravessada em uma única direção.

As hipersuperfícies nulas separam as regiões tipo-tempo da tipo-espaço. É por essa razão que essas estruturas são chamadas de horizontes. Note que um objeto só pode cruzá-la em uma única direção: para “dentro”, no caso de buracos negros.

No caso do espaço-tempo de Kerr, o vetor de Killing é dado por [2, 32, 44, 46, 47]:

$$K^\mu = \delta_0^\mu + \omega_H \delta_3^\mu \quad (2.61)$$

Lembrando que ω_H é a velocidade angular do horizonte. Disto, e usando (2.49), (2.60) e o fato de que no horizonte $x = x_+$, concluimos que:

$$K_\mu K^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = g_{00} + 2\omega_H g_{03} + \omega_H^2 g_{33} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Xi\Sigma}{\Psi} - \frac{\Psi}{\Sigma} \text{sen}^2\theta \left(\omega_H - \frac{2M\alpha x}{\Psi} \right)^2 = 0. \quad (2.62)$$

⁸Essas estruturas são formadas pelo campo de Killing.

⁹Campos de Killing são os geradores infinitesimais de isometrias (preservam a métrica), ou seja, os fluxos gerados por campos de Killing são isometrias contínuas da variedade, sendo essa última uma generalização da ideia de superfície.

¹⁰Lembrando que a assinatura da métrica levada em conta aqui é (+, -, -, -).

Onde temos que $\Psi = (x^2 + \alpha^2) - \Xi\alpha^2\text{sen}^2\theta$.

Diretamente de (2.62), concluímos que $\Sigma \neq 0$ e $\Psi \neq 0$. Isso nos mostra que (2.62) será satisfeita quando $\Xi = x^2 - 2Mx + \alpha^2 = 0$, já que $\omega_H = \frac{2M\alpha x}{\Psi} = \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$. Daí, retiramos que¹¹:

$$x_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \alpha^2}. \quad (2.63)$$

Note que a existência do raio do horizonte de eventos, e do próprio buraco negro, é limitada pelo seu momento angular, já que esse último é dado por (2.56). Então, $\alpha^2 \leq M^2$ é a condição para que o BN exista [2, 7, 32].

Agora, se tomarmos [2, 32]:

$$g_{00} = 0. \quad (2.64)$$

Como soluções teremos as superfícies de *red-shift* infinito, que são estruturas externas ou que coincidem com os horizontes, além de possuírem as características já discutidas pela análise das soluções (2.59).

Logo, (2.64) para o caso de Kerr nos conduz a¹²:

$$x_{S_{\pm}} = M \pm \sqrt{M^2 - \alpha^2\text{cos}^2\theta}, \quad (2.65)$$

onde S serve para rotular a superfície de *red-shift* infinito.

A solução (2.63) é regular em três regiões [2, 40]: $x_+ < x < \infty$; $x_- < x < x_+$; $0 < x < x_-$. Perceba que x_+ está inteiramente dentro de S_+ e entre os volumes que são delimitados por estes valores temos uma região ao qual chamamos de **ergoesfera**. O espaço-tempo na ergoesfera flui mais rápido que a velocidade da luz (c), mas o componente radial interno da velocidade do fluxo é menor que c [43]. As superfícies que a compõe são do tipo-tempo apenas para valores de $0 < \theta < \pi$, pois para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, ou seja,

¹¹A solução positiva representa o horizonte de eventos real. É aquele que é possível ser observado, literalmente. Já o resultado negativo é apenas um horizonte não físico, ou seja, uma solução puramente matemática.

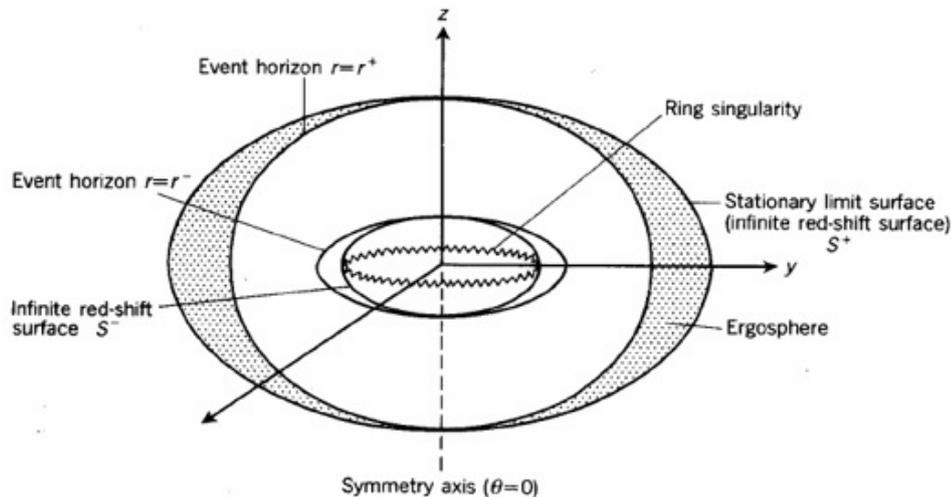
¹²Da mesma forma que para os horizontes, a solução positiva nos fornece uma superfície real, enquanto a negativa é apenas um resultado matemático, sendo que este último advém da resolução do polinômio a partir de 2.64.

nos polos, essas coincidem com o horizonte de eventos, que é a região em que o espaço-tempo flui na direção radial para dentro na velocidade c . Assim, raios de luz viajando em qualquer direção nesse local não podem escapar para o mundo exterior¹³ [43].

Em S_+ , o cone de luz inclina-se na direção de $\hat{\psi}$, crescendo de tal forma que os fótons e as partículas são forçados a orbitar a fonte na direção de sua rotação. É por causa disto que a superfície de *red-shift* infinito é também denominada superfície de limite estacionário [2, 32].

Observe a figura 3 e note o quão complexo é o espaço-tempo de Kerr.

Figura 3: representação do espaço-tempo de Kerr.



Retirado de D'Inverno, 1992.

Esta imagem é dada por um corte transversal central do buraco negro de Kerr.

¹³Isso faz com que o BN seja efetivamente negro.

Capítulo 3

Obtendo a solução de Gao com Rotação

A TRG tem sido uma das mais brilhantes e complexas teorias que surgiram no século passado. Ela é utilizada para descrever como o espaço-tempo, devido a inserção de um corpo no mesmo, é curvado. Daí, como antes descrito, entende-se que o campo gravitacional é o efeito dessa curvatura.

Com essa visão, foi possível explicar vários fenômenos que a gravitação newtoniana não era capaz. Também surgiu um novo campo na ciência, a cosmologia relativística, regida pela TRG. Mas as soluções que essa teoria proporciona admitem singularidade e outros problemas que devem ser removidos, caso se queira uma explicação correta e completa dos fenômenos gravitacionais.

Todavia quando utilizamos uma teoria mais rebuscada para descrever os fenômenos físicos, naturalmente aparecem novos efeitos e elementos dos quais não se obtinham ou não eram explicados pela teoria anterior, e, com isso, as soluções que eram válidas devem ser ajustadas ou obtidas no contexto da nova perspectiva, para dar a correta explicação dos fenômenos em questão. Por causa disto, como já discutimos, é que [19] obtiveram a solução que corrige a de [22] no contexto de mundos brana, além de atualmente existirem indícios, como já falamos, que indicam a existência desse objeto.

Agora, nosso intuito é ampliar essa solução aplicando-a rotação. Vamos analisá-la para entender os novos fenômenos que, possivelmente, surgiram. É esperado que as

soluções obtidas admitam dois horizontes e duas superfícies do limite estacionário, já que o espaço-tempo em questão será de um objeto que gira. Porém, os resultados, de modo geral, poderam não serem iguais aos da TRG, já que além de girar o objeto pulsa, simultaneamente. Como consequência nosso resultado será a expressão que generaliza a solução de Kerr.

3.1 Aplicando o ANJ

Nesta seção, vamos efetuar o algoritmo de Newman-Janis na métrica (1.43), para obtermos o elemento de linha do espaço-tempo exterior ao fluido perfeito que pulsa e gira ao mesmo tempo. Basta seguirmos os passos descritos no capítulo anterior.

Sendo assim, primeiramente, comparando (1.43) com (2.1), concluímos que:

$$e^{-2\lambda(x)} = e^{2\phi(x)} = 1 - \frac{2M_f}{x^f} \left(1 - \frac{l^{f+2}}{x^{f+2}} \right). \quad (3.1)$$

Fazendo a primeira mudança de variável, $d\tau = du + e^{\lambda(x)-\phi(x)}dx$, obtemos:

$$ds^2 = e^{2\phi(x)}du^2 + 2dudx - x^2d\Omega^2. \quad (3.2)$$

Que é a métrica de Gao *et al.* na forma de Eddington-Finkelstein. Desta, concluímos que:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{2M_f}{x^f} \left(1 - \frac{l^{f+2}}{x^{f+2}} \right) \right] & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Usando o *software Maple* para calcular a matriz inversa desta, teremos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - \left[1 - \frac{2M_f}{x^f} \left(1 - \frac{l^{f+2}}{x^{f+2}} \right) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(x^2 \text{sen}^2\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Com o uso de (2.8), (2.9) e (2.10), teremos que os vetores de tetradas nulas, para o espaço-tempo de Gao, serão¹:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (3.5)$$

¹Para garantir que a escolha foi adequada, verificamos a ortonormalidade entre estes vetores dada pelas expressões (2.11).

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2M_f}{x^f} \left(1 - \frac{l^{f+2}}{x^{f+2}} \right) \right] \delta_1^\mu, \quad (3.6)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}x} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) \quad (3.7)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}x} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (3.8)$$

Faremos, agora, a mudança dada pelo 3º passo, que nos leva a:

$$\tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (3.9)$$

$$\tilde{n}^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - M_f \left(\frac{1}{\tilde{x}^f} + \frac{1}{\tilde{x}^f} \right) + 2M_f l^{f+2} \frac{1}{\tilde{x}^{f+1} \tilde{x}^{f+1}} \right] \delta_1^\mu, \quad (3.10)$$

$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{x}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) \quad (3.11)$$

e

$$\tilde{\bar{m}}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{x}} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (3.12)$$

A partir do 4º passo, teremos:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (3.13)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - M_f \left(\frac{(x - i\alpha \cos\theta)^f + (x + i\alpha \cos\theta)^f}{\Sigma^f} \right) + \frac{2M_f l^{f+2}}{\Sigma^{f+1}} \right] \delta_1^\mu, \quad (3.14)$$

$$m^\mu = \frac{x - i\alpha \cos\theta}{\sqrt{2}\Sigma} \left(\delta_2^\mu + i\alpha \text{sen}\theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) \quad (3.15)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{x + i\alpha \cos\theta}{\sqrt{2}\Sigma} \left(\delta_2^\mu - i\alpha \text{sen}\theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (3.16)$$

Onde, mais uma vez, $\Sigma = x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta$ e α está relacionado com o momento angular pela expressão (2.56). Calculando as componentes do tensor métrico a partir de (2.7), sendo utilizado (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16), chegamos a:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 1 + \frac{\alpha^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 0 & -\frac{\alpha}{\Sigma} \\ \cdot & -1 + \beta - \frac{\alpha^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 0 & \frac{\alpha}{\Sigma} \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Sendo:

$$\beta = M_f \left(\frac{(x - i\alpha \cos \theta)^f + (x + i\alpha \cos \theta)^f}{\Sigma^f} \right) - 2M_f l^{f+2} \frac{1}{\Sigma^{f+1}}. \quad (3.18)$$

Observe que β é real para qualquer um dos valores de f . De fato,

- Se $f = 1$, então $(x - i\alpha \cos \theta) + (x + i\alpha \cos \theta) = 2x \in \Re$
- Se $f = 2$, então $(x - i\alpha \cos \theta)^2 + (x + i\alpha \cos \theta)^2 = 2(x^2 - \alpha^2 \cos^2 \theta) \in \Re$
- Se $f = 4$, então $(x - i\alpha \cos \theta)^4 + (x + i\alpha \cos \theta)^4 = 2(x^4 + \alpha^4 \cos^4 \theta - 6x^2 \alpha^2 \cos^2 \theta) \in \Re$

Para simplificar a expressão (3.18), tomaremos:

$$P_f = (x - i\alpha \cos \theta)^f + (x + i\alpha \cos \theta)^f. \quad (3.19)$$

Sendo assim, podemos reescrever (3.18), como sendo:

$$\beta = M_f \left(\frac{P_f}{\Sigma^f} \right) - 2M_f l^{f+2} \frac{1}{\Sigma^{f+1}}. \quad (3.20)$$

Usando o *Software Maple* para calcular a inversa da matriz (3.17), teremos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \beta & 1 & 0 & \alpha \beta \text{sen}^2 \theta \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha \text{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \alpha \beta \text{sen}^2 \theta & -\alpha \text{sen}^2 \theta & 0 & -(\alpha^2 \beta \text{sen}^2 \theta + \alpha^2 \text{sen}^2 \theta + \Sigma) \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Como foi dito anteriormente, esta métrica ainda se conserva nas coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein e já contém os componentes que caracterizam a rotação. Mas caso queiramos simplificá-la ainda mais, prossigamos com o último passo.

O quinto procedimento consiste em escrevermos a nova métrica nas seguintes coordenadas:

$$du = d\tau - \left(\frac{x^2 + \alpha^2}{x^2 + \alpha^2 - \beta\Sigma} \right) dx \quad \text{e} \quad d\varphi = d\psi - \left(\frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2 - \beta\Sigma} \right) dx. \quad (3.22)$$

Com tudo isto (e algumas manipulações algébricas), concluímos que o tensor métrico nas coordenadas de Boyer-Lindquist, será:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \beta & 0 & 0 & \alpha\beta\text{sen}^2\theta \\ 0 & -\Sigma/\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \alpha\beta\text{sen}^2\theta & 0 & 0 & -\Lambda\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

sendo,

$$\Theta = x^2 + \alpha^2 - \beta\Sigma \quad \text{e} \quad \Lambda = x^2 + (1 + \beta\text{sen}^2\theta)\alpha^2. \quad (3.24)$$

Escrevendo o elemento de linha, teremos:

$$ds^2 = (1 - \beta)d\tau^2 + 2\alpha\beta\text{sen}^2\theta d\tau d\psi - \left(\frac{\Sigma}{\Theta} \right) dx^2 - \Sigma d\theta^2 - \Lambda\text{sen}^2\theta d\psi^2. \quad (3.25)$$

A esta expressão daremos o nome de buraco negro pulsante com rotação (BNPR).

Observe que há apenas um termo “cruzado” ($g_{\psi\tau} = g_{\tau\psi}$) em (3.25). Este, indica que o elemento de linha descreve o espaço-tempo de um objeto com um momento angular, sendo que o giro “varre” ψ . Ainda em (3.25), temos em β os elementos que caracterizam a pulsação (que é o parâmetro l , decorrente da correção dada pelo modelo de brana) e também a rotação (o ângulo θ , advindo da execução do ANJ). Sendo assim, percebe-se que esta expressão reproduz a distância infinitesimal entre dois pontos do espaço-tempo exterior de uma distribuição material esférica composta por um fluido perfeito ao qual pulsa e gira, simultaneamente.

Note que quando $\alpha = 0$, $f = 1$ e $l \ll x$, temos que $\beta \rightarrow 2M/x$, ou seja, retomamos o caso de Schwarzschild. Se $\alpha \neq 0$, $f = 1$ e $l \ll x$, temos que $\beta \rightarrow 2Mx/\Sigma$, que implica o caso de Kerr. Se $\alpha = 0$, $f = 1$ e l não muito menor que x , retomamos o caso de Gao. Se $\alpha \neq 0$, $f = 1$ e l não muito menor que x , tem-se uma métrica com algumas características

analíticas semelhantes ao caso de Kerr, mas que nos fornece uma explicação a mais, já que a distância do observador ao objeto não será desprezada. Para outras combinações a métrica tem uma forma própria, devido a correção gravito-quântica do modelo utilizado e também pela aplicação para outros tipos de matéria. Vale esclarecer que essas outras combinações não são soluções de vácuo das equações de campo de Einstein, e com isso os horizontes auferidos com esses valores não serão buracos negros, possivelmente, podem ser soluções de Buracos de Minhocas ou pontes Einstein-Rosen.

Vale esclarecer que no caso clássico, da TRG, não é possível obter uma solução a qual um buraco negro pulse, muito menos que faça isso e, simultaneamente, gire. Isso porque nessa teoria não há um limite para a densidade de matéria-energia, ou seja, a contração da matéria pode ocorrer indefinidamente, como é mostrado pelo resultado de [22].

No caso da teoria de branas, se uma esfera fluida colapsar e não ocorrer uma dinâmica de pulsação, a matéria será comprimida até um limite máximo finito. Nessa circunstância o parâmetro $l(r_0)$ poderá ser considerado muito menor que o horizonte, sendo que o objeto estudado terá as características do caso de Kerr (se $\alpha \neq 0$) ou de Schwarzschild (se $\alpha = 0$). Em outras palavras, ocorre o equilíbrio radial dinâmico.

3.1.1 Sobre a velocidade angular do BNPR

Vamos, agora, analisar a velocidade angular das estruturas que compõem o BNPR. Para tal, problematizaremos da mesma forma que foi feito para o caso de Kerr.

Então, consideraremos o destino de um fóton que é emitido na direção $\hat{\psi}$ em alguma distância radial x do espaço-tempo exterior ao BNPR. No instante em que é emitido, seu momento não têm componentes na direção \hat{x} e $\hat{\theta}$ e, portanto, a condição de que a trajetória seja nula será dada por (2.57), que quando a resolvemos, teremos as soluções dadas por (2.58), que avaliada para a superfície S_+ , ou seja, $g_{00} = 0$, teremos as soluções:

$$\left(\frac{d\psi_1}{d\tau}\right)_{x=x_{s_{\pm}}} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{d\psi_2}{d\tau}\right)_{x=x_{s_{\pm}}} = \frac{2\alpha}{\tilde{\Sigma}_{s_{\pm}} + 2\alpha^2}, \quad (3.26)$$

onde $\tilde{\Sigma}_{s_{\pm}} = (x_{s_{\pm}})^2 - \alpha^2 \cos^2 \theta$.

Como vimos anteriormente, podemos definir a velocidade angular do próprio horizonte de eventos. Utilizando (3.25) para (2.58)², teremos de forma geral³:

$$\Omega = \frac{\alpha \beta \operatorname{sen} \theta \pm \sqrt{\Theta}}{\Lambda \operatorname{sen} \theta}, \quad (3.27)$$

que para o horizonte de evento (onde $\Theta = 0$)⁴, teremos:

$$\Omega_H = \frac{\alpha \beta_+}{\Lambda_+} = \frac{\alpha}{x_+^2 + \alpha^2}, \quad (3.28)$$

onde β_+ e Λ_+ são os valores destas funções no horizonte externo. Esta expressão nos fornece a velocidade angular do horizonte de eventos externo do BNPR. Note que ela tem a mesma forma analítica da de Kerr, ou seja, da eq.(2.60), porém não nos conduz ao mesmo valor (caso levemos em conta a pulsação) já que o raio do horizonte do BNPR é diferente do caso citado.

Note que as soluções (3.26) e (3.28) possuem no denominador uma função dependente de θ , já que $x_+ = x_+(\theta)$ ⁵. Então, com uma análise cuidadosa percebemos que para $\theta = 0$ as expressões nos dão um valor maior que para $\theta = \pi/2$. Em outras palavras, a velocidade angular do horizonte e da superfície S_+ do BNPR é variável com o azimute e tem seu valor máximo nos polos e mínimo no equador.

3.1.2 Superfícies de *red-shift* infinito do BNPR

Analisaremos, agora, a forma e o comportamento das hipersuperfícies produzidas pelo BNPR. Começemos pelas superfícies de *red-shift* infinito. Como vimos, essas são auferidas fazendo:

$$g_{00} = 0 \Rightarrow 1 - \beta = 0 \Rightarrow 1 - \frac{M_f P_f}{\Sigma^f} + \frac{2M_f t^{f+2}}{\Sigma^{f+1}} = 0 \Rightarrow$$

²No horizonte do BNPR $g_{00} \neq 0$.

³Esta solução ainda não está particularizada para o horizonte do BNPR, servindo esta para qualquer ponto do espaço-tempo.

⁴Demonstraremos isto mais adiante

⁵Isto só irá ficar claro na seção (3.1.3), onde mostraremos que o raio do horizonte do BNPR varia com o ângulo θ .

$$(x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)^{f+1} - M_f(x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)P_f + 2M_f l^{f+2} = 0 \quad (3.29)$$

Para que possamos calcular as soluções desta equação, devemos particularizá-la para os valores de f . Perceba que: para $f = 1$, (3.29) terá quatro soluções; para $f = 2$, (3.29) terá seis soluções; se $f = 4$, (3.29) terá dez soluções. Para todos os três casos de f as soluções são extremamente extensas, e por esse motivo apenas vamos expor as soluções explícitas para $f = 1, 2$.

Sendo assim, quando $f = 1$ em (3.29), teremos as quatro seguintes soluções (gerais)⁶:

$$x_{S_{1,2}} = \frac{M_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B} \pm \frac{1}{2} \left[2M_1^2 \left(1 + \frac{M_1}{\sqrt{B}} \right) - \frac{8}{3}\alpha^2 \cos^2 \theta - N - \frac{C}{N3\sqrt[3]{2}} \right]^{1/2} \quad (3.30)$$

e

$$x_{S_{3,4}} = \frac{M_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{B} \pm \frac{1}{2} \left[2M_1^2 \left(1 - \frac{M_1}{\sqrt{B}} \right) - \frac{8}{3}\alpha^2 \cos^2 \theta - N - \frac{C}{N3\sqrt[3]{2}} \right]^{1/2} \quad (3.31)$$

onde temos que:

$$\begin{aligned} N = & \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \{ -128\alpha^6 \cos^6 \theta + 144M_1^2 \alpha^4 \cos^4 \theta - 144K \alpha^2 \cos^2 \theta + 108KM_1^2 + [(16\alpha^6 \cos^6 \theta \\ & + 36M_1^2 \alpha^4 \cos^4 \theta - 144\alpha^2 (\alpha^4 \cos^4 \theta + K) \cos^2 \theta + 108M_1^2 (\alpha^4 \cos^4 \theta + K)^2 \\ & - 4(16\alpha^4 \cos^4 \theta - 12M_1^2 \alpha^2 \cos^2 \theta + 12K)^3]^{1/2} \}^{1/3}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$B = M_1^2 - \frac{4}{3}\alpha^2 \cos^2 \theta + N + \frac{C}{N3\sqrt[3]{2}} \quad (3.33)$$

e

$$C = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} (16\alpha^4 \cos^4 \theta - 12M_1^2 \alpha^2 \cos^2 \theta + 12K), \quad (3.34)$$

sendo que $K = 2M_1 l^3$.

O parâmetro l não pode assumir em circunstância física nenhuma - caso queiramos que a esfera fluida pulse sem colapsar numa singularidade⁷ - um valor igual ou menor que

⁶Aqui usamos o *Wolfram Alfa Online* para gerar estas soluções.

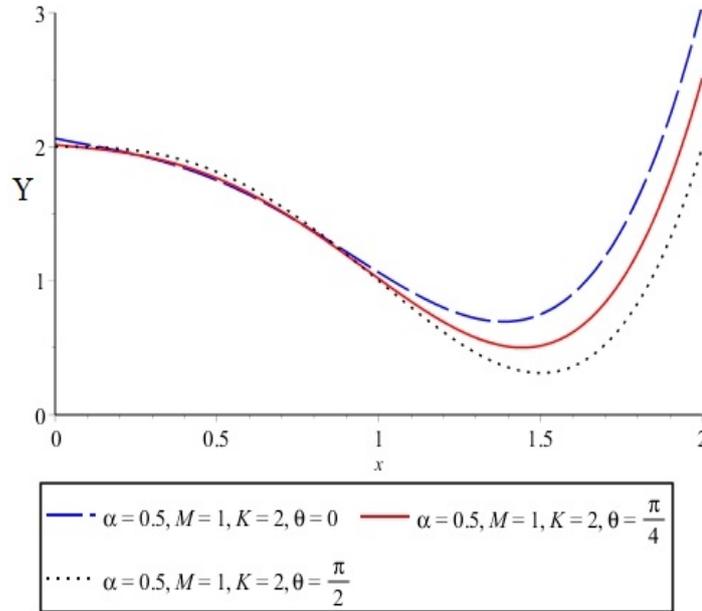
⁷Para termos o caso em que $l = l(r_0) = 0$, deveremos impor que o raio da esfera seja nulo e nesse caso haveria a formação de uma singularidade, que queremos evitar.

zero. Então, vamos analisar o comportamento de (3.29) assumindo outros valores além de zero. Sendo assim, podemos escrever:

$$Y = (x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)^{f+1} - M_f (x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta) P_f + 2M_f l^{f+2}, \quad (3.35)$$

para três casos de $K > 0$. Daí, teremos os *plots* que estão descritos pelas figuras (3.1), (3.2) e (3.3):

Figura 3.1: *plot* de (3.35) para $f = 1$ e $K = 2$.

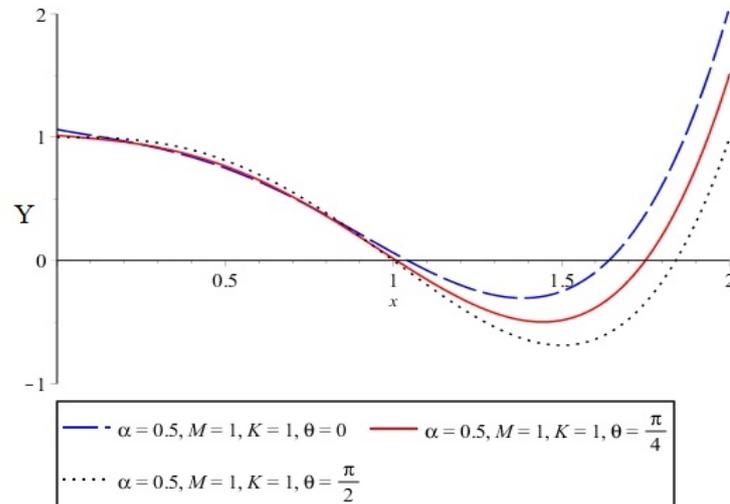


Note que, para os valores oferecidos, não há a formação de superfícies de *red-shift* infinito, já que nenhuma curva “toca” o eixo da abscissa - não há a formação de um BN nestas condições.

De maneira geral, para o caso de $f = 1$ a superfície do limite estacionário interna, quando existe, diminui de tamanho enquanto a externa, também quando existe, aumenta conforme o decréscimo de $K = K(l(r_0))$, ou seja, com a diminuição do raio da esfera fluida.

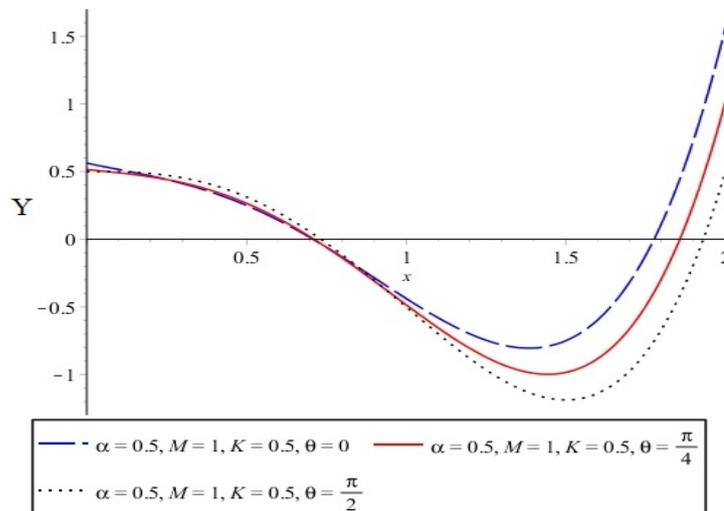
Vamos, agora, analisar o caso, a partir de (3.35), para $f = 2$. Vale esclarecer que como as soluções para $f = 2, 4$ não satisfazem as equações de vácuo de Einstein (sem a correção de branas) e no caso de $f = 4$ não ter superfícies fechadas, como mostraremos

Figura 3.2: *plot* de (3.35) para $f = 1$ e $K = 1$.



Observe que existem duas superfícies de *red-shift* infinito, já que as curvas tocam o eixo x em dois pontos distintos.

Figura 3.3: *plot* de (3.35) para $f = 1$ e $K = 0,5$.



Veja que há também duas superfícies em questão. Em resumo, as três situações mostradas pelos gráficos anteriores nos revelam que com a evolução dinâmica da esfera fluida (pulsando e girando), as superfícies de *red-shift* infinito podem existir ou não, isso vai depender da dinâmica (pulsando e girando) da esfera fluida.

adiante, buracos negros não são formados e, com isso, essas estruturas não são superfícies do limite estacionário propriamente ditas. São apenas aparentes⁸.

Daí, teremos as seguintes soluções^{9 10}:

$$x_{S_{1,2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{6W}} \left(-48M_1\alpha^2 \cos^2\theta - 6W\alpha^2 \cos^2\theta + 16M_1^2 + 4M_1W + W^2 \right)^{1/2}, \quad (3.36)$$

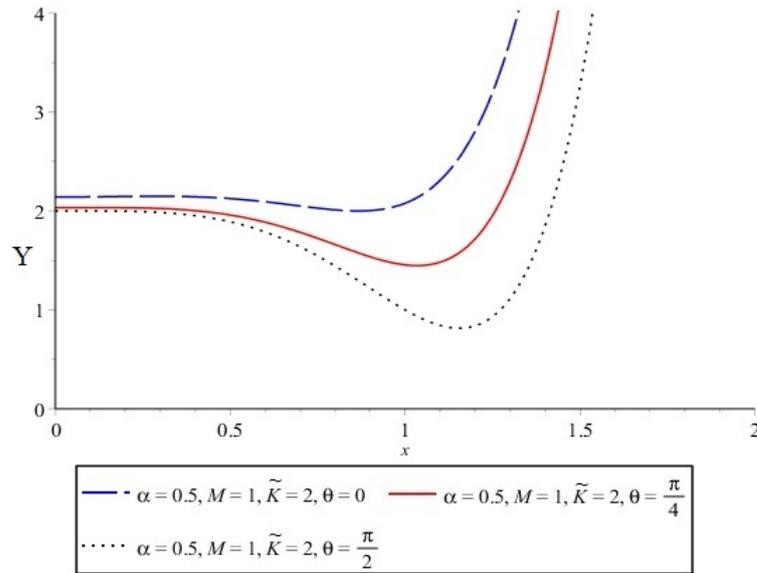
e $x_{S_{3,4,5,6}} \in \mathbb{C}$, ou seja, estas últimas não-convém. Onde temos que:

$$\begin{aligned} W = & \left[-108\tilde{K} - 288M_2^2\alpha^2 \cos^2\theta + 64M_2^3 + 12(768M_2^3\alpha^6 \cos^6\theta \right. \\ & \left. - 192M_2^4\alpha^4 \cos^4\theta + 81\tilde{K}^2 + 432\tilde{K}M_2^2\alpha^2 \cos^2\theta - 96\tilde{K}M_2^3) \right]^{1/2}]^{1/3}, \quad (3.37) \end{aligned}$$

sendo $\tilde{K} = 2M_2l^4$.

Da mesma forma que K , o parâmetro $\tilde{K} > 0$. Daí, teremos os *plots* que estão descritos pelas figuras (3.4), (3.5) e (3.6):

Figura 3.4: *plot* de (3.35) para $f = 2$ e $\tilde{K} = 2$.

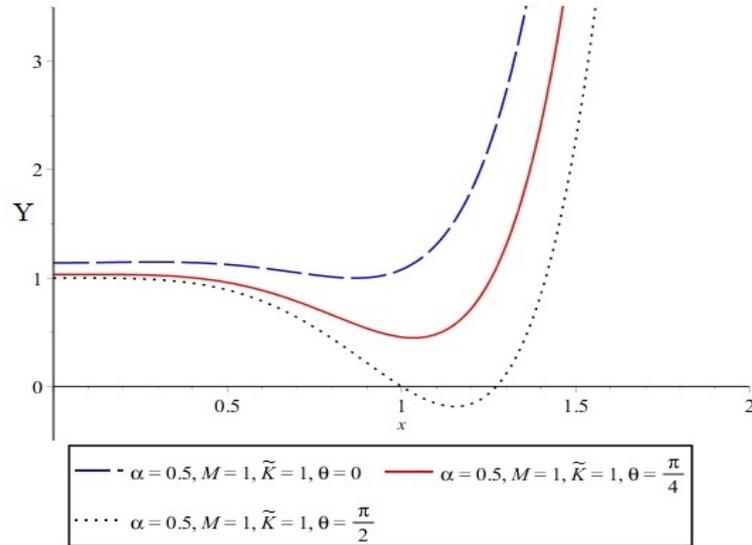


⁸Aqui, a palavra aparentes é utilizada para indicar que essas superfícies poderão ter algumas características idênticas as superfícies S , mas não serão fisicamente essas estruturas, já que não envolvem buracos negros.

⁹Soluções obtidas pelo *Maple*

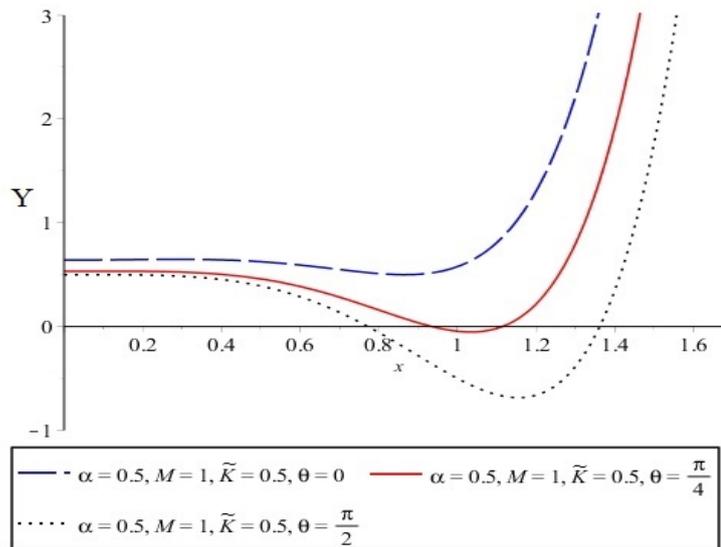
¹⁰Os índices servem para rotular cada solução.

Figura 3.5: *plot* de (3.35) para $f = 2$ e $\tilde{K} = 1$.



Aqui, vemos que há a formação de duas superfícies, porém para um determinado valor angular.

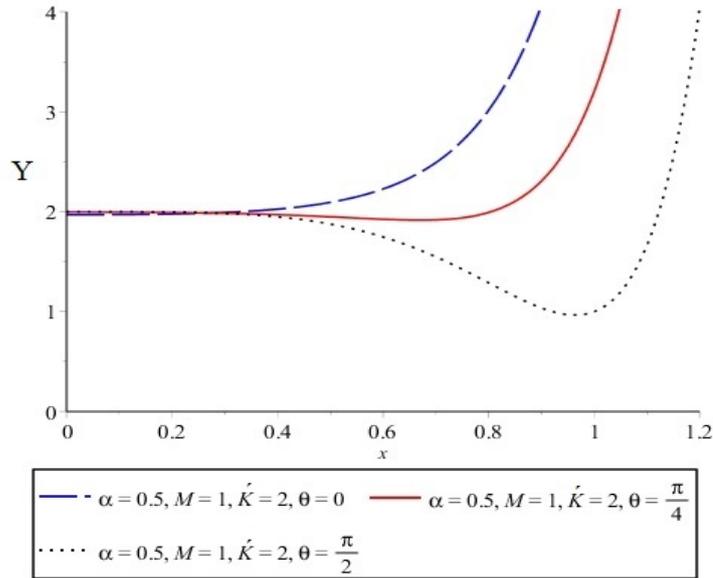
Figura 3.6: *plot* de (3.35) para $f = 2$ e $\tilde{K} = 0,5$.



Da mesma forma que para $f = 1$, conforme a dinâmica do BNPR e o ângulo do observador, as superfícies de *red-shift* infinito podem existir ou não.

Por fim, analisemos o caso, a partir de (3.35), para $f = 4$. Como já dito anteriormente, apenas vamos analisar qualitativamente as soluções. Sendo assim, observe os gráficos seguintes. Para $\dot{K} = 2M_4l^6 = 2$, teremos os *plots* que estão descritos pelas figuras (3.7), (3.8) e (3.9):

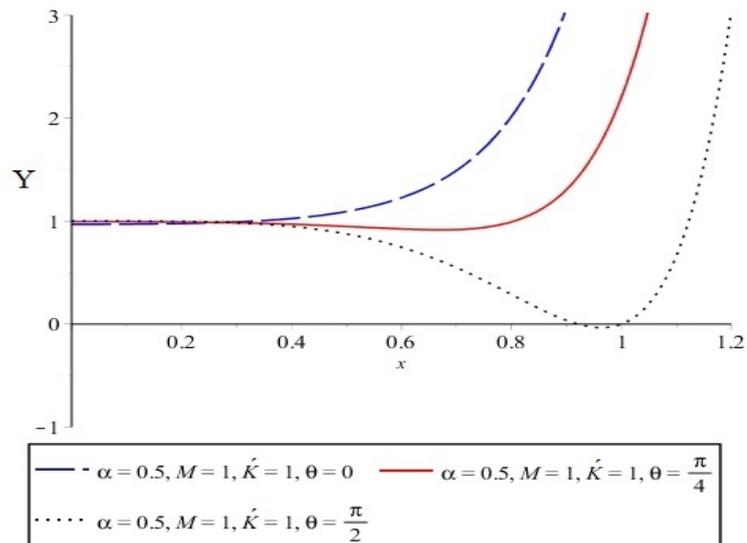
Figura 3.7: *plot* de (3.35) para $f = 4$ e $\dot{K} = 2$.



Note que não existem superfícies S para nenhum valor de θ .

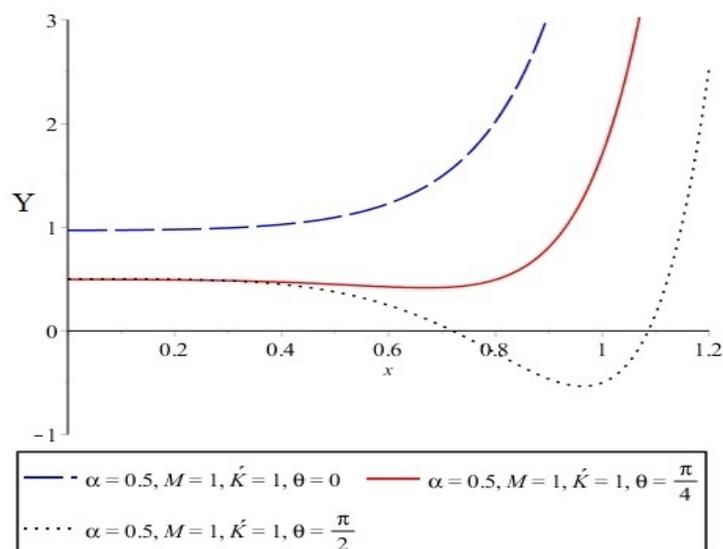
Com isso concluímos que as superfícies de *red-shift* infinito, podem existir ou não. Isso irá depender de como a evolução do BNPR se dá. Percebe-se que com o decréscimo do parâmetro $l(r_0)$ a superfície S_- diminui de tamanho enquanto a S_+ fica maior.

Figura 3.8: *plot* de (3.35) para $f = 4$ e $\acute{K} = 1$.



Aqui, surgem duas superfícies para valores próximos de $\pi/2$. Veja que essas superfícies não são fechadas, já que dependendo do ângulo não a observamos.

Figura 3.9: *plot* de (3.35) para $f = 4$ e $\acute{K} = 0,5$.



Perceba que aqui também há a formação de duas superfícies aparentes para valores entorno de $\theta = \pi/2$. Porém as superfícies continuam abertas, já que as curvas azul ($\theta = 0$) e vermelha ($\theta = \pi/4$) não tocam a abscissa.

3.1.3 Horizontes de evento do BNPR

Agora, vejamos como são os horizontes dessa nova solução. Para tal precisamos analisar o produto interno nulo entre os vetores de *Killing*. Sendo assim, tais vetores para o BNPR¹¹ são dados por¹²:

$$\chi^\mu = \delta_0^\mu + \Omega_H \delta_3^\mu, \quad (3.38)$$

Onde Ω_H é a velocidade angular do horizonte (externo).

Usando a condição que no horizonte $\chi^\mu \chi_\mu = 0$, Então, teremos:

$$\begin{aligned} \chi^\mu \chi_\mu &= g_{00} + 2\Omega_H g_{03} + \Omega_H^2 g_{33} = 0 \Rightarrow \\ \chi^\mu \chi_\mu &= \frac{\Theta}{\Lambda} - \Lambda \text{sen}^2 \theta \left(\Omega_H - \frac{\alpha\beta}{\Lambda} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Diretamente de (3.39), levando em conta (3.28), ou seja, $\Omega_H = \frac{\alpha\beta}{\Lambda}$, ficamos apenas com:

$$\begin{aligned} \Theta = 0 &\Rightarrow x^2 + \alpha^2 - \beta\Sigma = 0 \Rightarrow \\ x^2 + \alpha^2 - \left[M_f \frac{P_f}{\Sigma^f} - \frac{2M_f l^{f+2}}{\Sigma^{f+1}} \right] \Sigma &= 0 \Rightarrow \\ (x^2 + \alpha^2)\Sigma^f - M_f \Sigma P_f + 2M_f l^{f+2} &= 0 \Rightarrow \\ (x^2 + \alpha^2)(x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)^f - M_f (x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta) P_f + 2M_f l^{f+2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Da mesma forma que fizemos o cálculo para as superfícies de *red-shift* infinito, devemos particularizar a expressão (3.40) para os valores de f para obtermos as soluções.

Conseqüentemente, note que: para $f = 1$, (3.40) terá quatro soluções; para $f = 2$,

¹¹Podem ser calculados usando um *software* matemático, ou algebricamente utilizando-se das regras e expressões descritas em, por exemplo, [1] e/ou [32] e/ou [44].

¹²Já que o BNPR possui uma dinâmica rotacional o espaço-tempo exterior é do tipo estacionário. E num espaço assintoticamente plano estacionário aximétrico, existe um único vetor de *Killing* translacional de tempo ζ^μ que é tipo-tempo próximo ao infinito com $\zeta^\mu \zeta_\mu = 1$, e um único vetor de *Killing* rotacional v^μ cujas órbitas são curvas fechadas com comprimento de parâmetro 2π [46]. A superposição desses dois constitui o vetor de interesse.

(3.40) terá seis soluções; se $f = 4$, (3.40) terá dez soluções. De modo quase esperado, nem todas as soluções serão válidas fisicamente.

Fazendo o cálculo das soluções para todos os três casos de f , chegamos a soluções extremamente extensas, e, mais uma vez, por esse motivo apenas vamos expor as soluções explícitas de $f = 1, 2$.

Sendo assim, quando $f = 1$ em (3.40), teremos as quatro seguintes soluções (gerais)^{13 14}:

$$x_{1,2,3,4} = \frac{M_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{E_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{A}_0 - \frac{B_0}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{C_0}{3B_0} - \frac{D_0}{4\sqrt{E_0}}}, \quad (3.41)$$

onde temos que:

$$A_0 = M_1^2 - \alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta), \quad (3.42)$$

$$\tilde{A}_0 = 2M_1^2 - \alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta), \quad (3.43)$$

$$B_0 = \{108M_1^2 \alpha^4 \cos^4 \theta - 36M_1^2 \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta) + 2(\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)^3 + 108M_1^2 (\alpha^4 \cos^2 \theta + K) - 72(\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)(\alpha^4 \cos^2 \theta + K) + \sqrt{\tilde{B}_0}\}^{1/3}, \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0 &= [108M_1^2 \alpha^4 \cos^4 \theta - 36M_1^2 \alpha^2 \cos^2 \theta (\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta) + 2(\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)^3 + \\ &+ 108M_1^2 (\alpha^4 \cos^2 \theta + K) - 72(\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)(\alpha^4 \cos^2 \theta + K)]^2 + \\ &- 4(\alpha^4 \cos^4 \theta + 14\alpha^4 \cos^2 \theta + \alpha^4 - 12M_1^2 \alpha^2 \cos^2 \theta + 12K)^3, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$C_0 = \sqrt[3]{2}(\alpha^4 \cos^4 \theta + 14\alpha^4 \cos^2 \theta + \alpha^4 - 12M_1^2 \alpha^2 \cos^2 \theta + 12K), \quad (3.46)$$

$$D_0 = 8M_1^3 + 16M_1 \alpha^2 \cos^2 \theta - 8(\alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)M_1 \quad (3.47)$$

e

$$E_0 = A_0 + \frac{B_0}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{C_0}{3B_0}. \quad (3.48)$$

¹³Aqui, também usamos o *software Wolfram Alfa Online* para gerar estas soluções.

¹⁴Vale esclarecer que o raio do horizonte de eventos exterior é descrito pela solução (3.41), assumindo as combinações positivas.

Vamos, agora, analisar o caso, a partir de (3.52), para $f = 2$. Lembrando que os resultados, tanto de $f = 2$ quanto de $f = 4$, não serão horizontes de BN, já que, mais uma vez, não satisfazem as equações de vácuo de Einstein (sem a correção de branas). Em outras palavras, as combinações para $f = 2, 4$ não se reduzem às soluções de vácuo das equações de campo de Einstein, mesmo que não levemos em conta a correção do modelo de branas utilizado. Por isso, são apenas estruturas aparentes. Daí, teremos as seguintes soluções¹⁵:

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{6A_1}} (4\alpha^4 \cos^4 \theta - 8\alpha^4 \cos^2 \theta - 32M_2 \alpha^2 \cos^2 \theta - 4A_1 \alpha^2 \cos^2 \theta + 4\alpha^4 \\
 &\quad - 16M_2 \alpha^2 - 2A_1 \alpha^2 + 16M_2^2 + 4M_2 A_1 + A_1^2)^{1/2}, \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

e $x_{3,4,5,6} \in \mathbb{C}$, ou seja, não-convém. Onde temos que:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= [8\alpha^6 \cos^6 \theta - 24\alpha^6 \cos^4 \theta - 96M_2 \cos^4 \theta \alpha^4 + 24\cos^2 \theta \alpha^6 + 48M_2 \cos^2 \theta \alpha^4 + \\
 &\quad + 108\tilde{K} - 192M_2^2 \cos^2 \theta \alpha^2 - 8\alpha^6 + 48M_2 \alpha^4 - 96M_2^2 \alpha^2 + 64M_2^3 + \\
 &\quad + 12\sqrt{B_1}]^{1/3} \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -144M_2 \cos^4 \theta \alpha^4 \tilde{K} + 72M_2 \cos^2 \theta \alpha^4 \tilde{K} - 288\tilde{K} M_2^2 \cos^2 \theta \alpha^2 + 81\tilde{K}^2 + \\
 &\quad - 12\tilde{K} \alpha^6 + 96\tilde{K} M_2^3 + 36\cos^2 \theta \alpha^6 \tilde{K} + 72\tilde{K} M_2 \alpha^4 - 144\tilde{K} M_2^2 \alpha^2 + \\
 &\quad - 48\alpha^8 \cos^4 \theta M_2^2 + 192\alpha^6 \cos^4 \theta M_2^3 - 192\alpha^4 \cos^4 \theta M_2^4 - 48\alpha^8 \cos^8 \theta M_2^2 + \\
 &\quad + 96\alpha^8 \cos^6 \theta M_2^2 + 576\alpha^6 \cos^6 \theta M_2^3 + 12\alpha^6 \cos^6 \theta \tilde{K} - 36\alpha^6 \cos^4 \theta \tilde{K}. \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

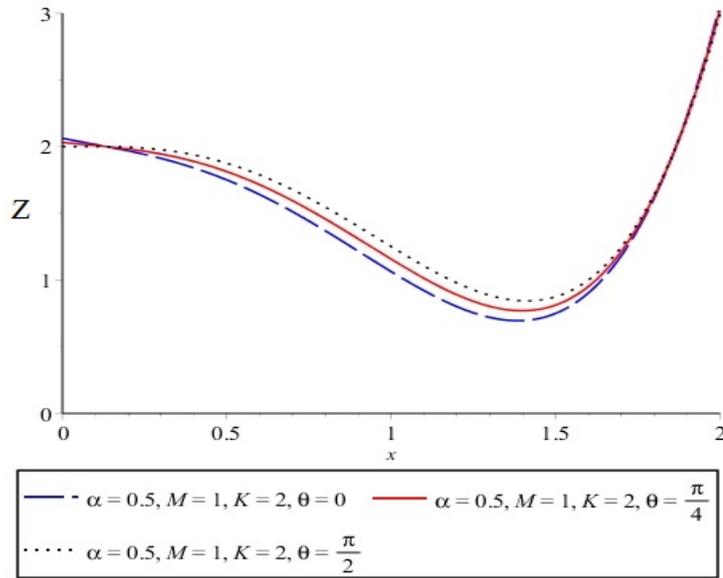
Para que possamos analisar melhor as soluções dada por (3.40), vamos estudar a função:

$$Z = (x^2 + \alpha^2)(x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta)^f - M_f (x^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta) P_f + 2M_f l^{f+2}. \tag{3.52}$$

Observe os *plots* que estão dispostos pelas figuras (3.10), (3.11) e (3.12):

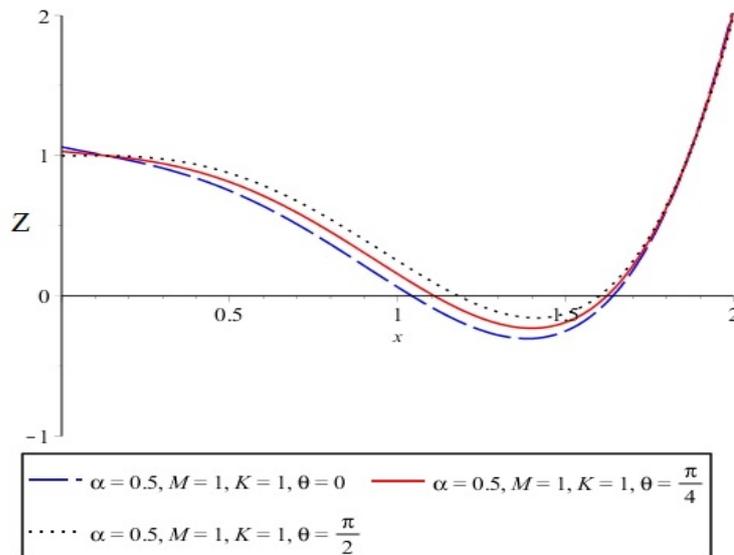
¹⁵Soluções obtidas pelo *Maple*.

Figura 3.10: *plot* de (3.52) para $f = 1$ e $K = 2$.

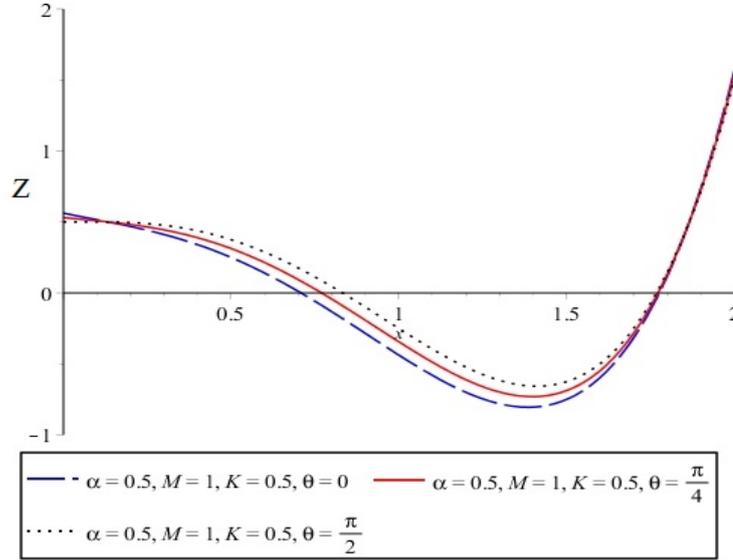


Perceba que da mesma forma que as superfícies de *red-shift* infinito, para esses valores não há a formação de horizontes de eventos.

Figura 3.11: *plot* de (3.52) para $f = 1$ e $K = 1$.



Veja que neste caso surgem dois horizontes de eventos, já que as curvas tocam o eixo da abscissa em dois pontos.

Figura 3.12: *plot* de (3.52) para $f = 1$ e $K = 0,5$.


Perceba que o horizonte externo tem sua área aumentada com o decréscimo de $l(r_0)$ enquanto o interno diminui.

Para os casos de $K = 1$ e $K = 0,5$ com $f = 1$, há a formação de dois horizontes: interior e exterior. O interior é conhecido por Horizonte de Cauchy¹⁶ e o exterior é o físico (o que pode ser “observado”). Da mesma forma que as superfícies S , temos que com o decréscimo de l o horizonte interno fica menor enquanto o externo fica maior.

Agora, os *plots* de (3.52) para $f = 2$. Neste caso, teremos um fenômeno diferente dos demais casos, pois o raio dos horizontes diminui com o decréscimo de $\tilde{K}(l(r_0))$. Além disso, o caso em questão nos dá apenas um horizonte (aparente) físico. Nota-se que o raio do horizonte é menor quanto menor for o valor de \tilde{K} . Para tal, observe os *plots* que estão dispostos pelas figuras (3.13), (3.14) e (3.15):

¹⁶Um horizonte de Cauchy é uma região de contorno tipo-luz que pertence ao domínio de validade de um problema de Cauchy. Um lado do horizonte contém geodésicas tipo-espaço fechadas e o outro lado contém geodésicas tipo-tempo também fechadas [44]. Esse horizonte não tem uma utilidade ou relevância física, já que o horizonte que caracteriza um BN além de ser o que é utilizado para auferir medidas desse objeto é o horizonte exterior. O interno é puramente matemático.

Figura 3.13: *plot* de (3.52) para $f = 2$ e $K = 2$.

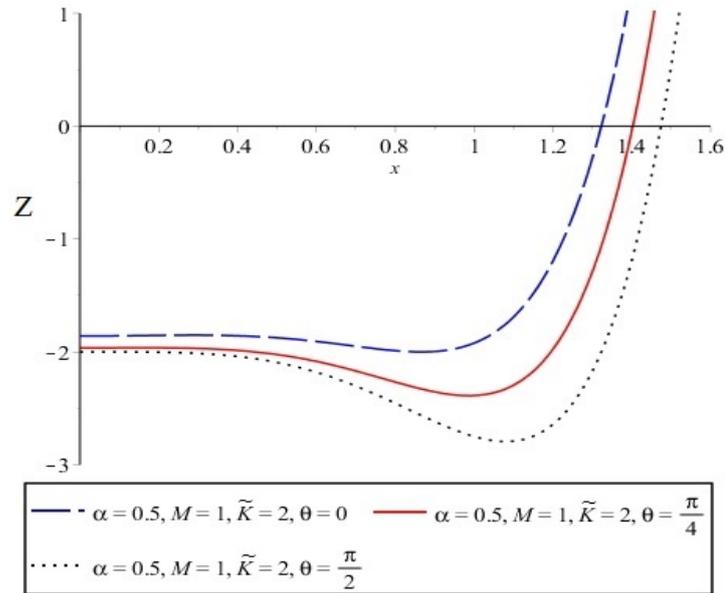


Figura 3.14: *plot* de (3.52) para $f = 2$ e $K = 1$.

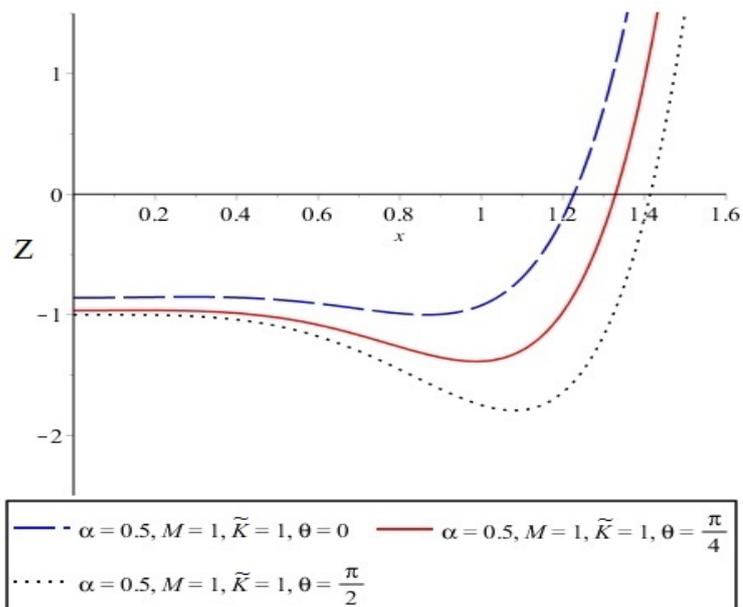
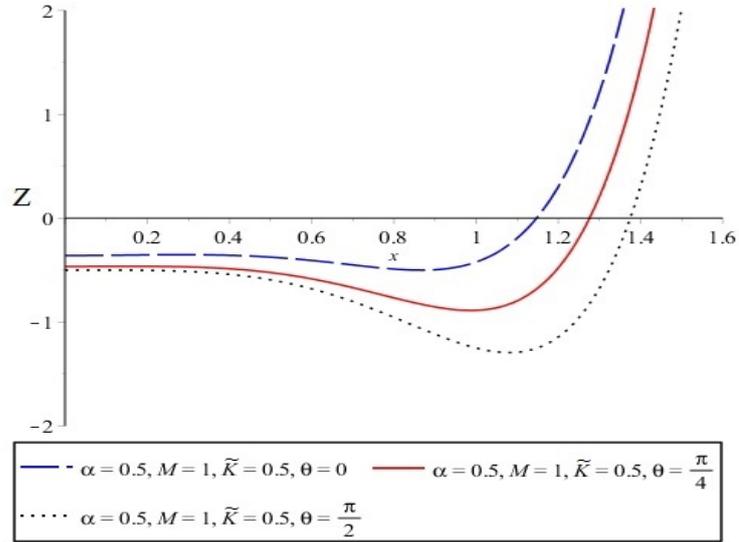
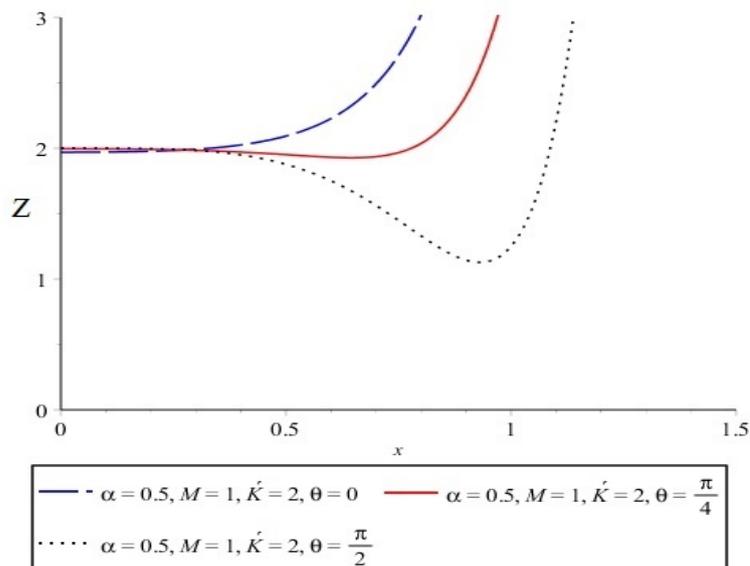


Figura 3.15: *plot* de (3.52) para $f = 2$ e $K = 0,5$.



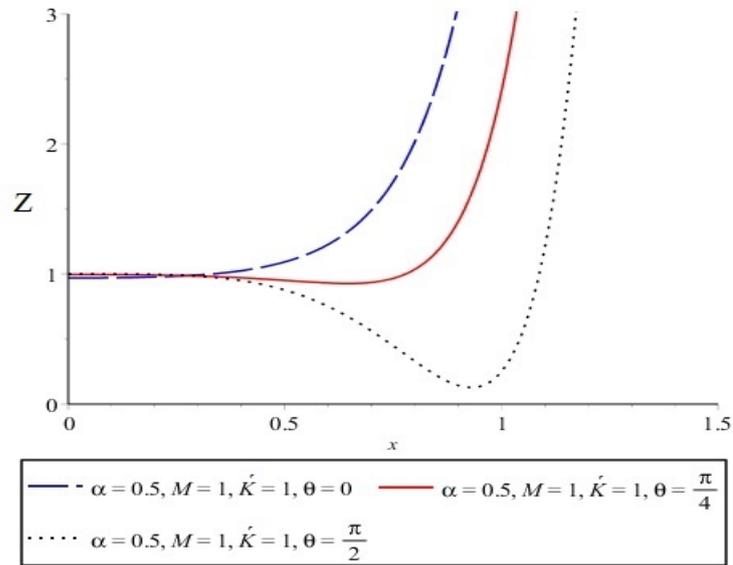
Por fim, analisemos o caso, a partir de (3.52), para $f = 4$. Como já dito anteriormente, apenas vamos analisar qualitativamente as soluções. Então, observemos os *plots* que estão dispostos pelas figuras (3.16), (3.17) e (3.18):

Figura 3.16: *plot* de (3.52) para $f = 4$ e $K = 2$.



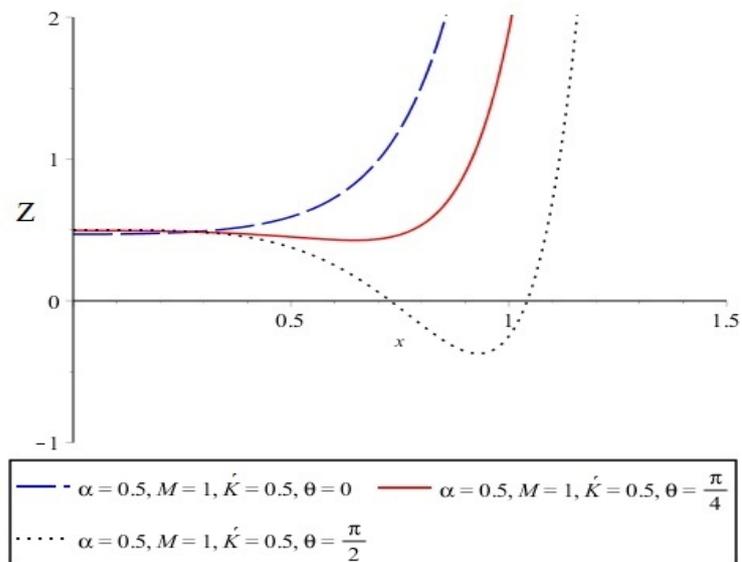
Veja que neste caso não surge horizontes de eventos (aparentes).

Figura 3.17: *plot* de (3.52) para $f = 4$ e $K = 1$.



Aqui também não há a formação de horizontes de eventos.

Figura 3.18: *plot* de (3.52) para $f = 4$ e $K = 0,5$.

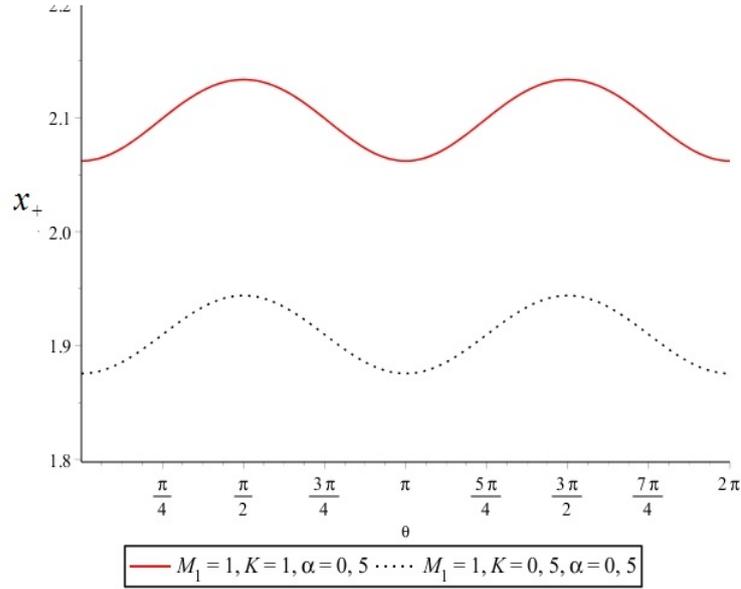


Diferentemente dos casos anteriores, aqui, há a formação de horizontes de eventos que só são percebidos próximos ao equador do BNPR.

Note que como (3.41) é a única solução que representa um buraco negro e que

essa depende do ângulo azimutal θ , então a forma tridimensional do horizonte não será uma esfera regular (como nos casos dos BNs obtidos pela TRG). Ele terá, de maneira geral, uma forma oblata (achatada). Para percebermos isto, basta analisarmos o *plot* da variação de x_+ em relação ao ângulo θ , dado pela figura (3.19).

Figura 3.19: *plot* do raio do horizonte exterior de eq.(3.41) em função do ângulo azimutal.



Para valores de $K > 1$, se levado em conta os valores de massa e momento que fixamos, o BNPR não existe, pois nessas condições não há a formação de horizontes, já que a solução dada pela eq.(3.41) se torna complexa, para tal configuração.

Este efeito, de “achatamento” do horizonte, só é possível por causa da dinâmica da esfera fluida que é pulsar e girar simultaneamente. Evidentemente, não é possível obter uma solução deste tipo com a TRG.

Sobre a condição de existência do BNPR a partir de seu momento não é a mesma do caso de Kerr, evidentemente, pois os termos dados pela correção do modelo de branas que utilizamos faz com que o caso de $\alpha = M$ não seja o valor limitante. O que se percebe é:

$$B_0 \neq 0, \quad E_0 > 0, \quad \tilde{A}_0 - \frac{B_0}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{C_0}{3B_0} - \frac{D_0}{4\sqrt{E_0}} \geq 0 \quad \text{e} \quad \tilde{B}_0 \geq 0. \quad (3.53)$$

Estas são as condições para a existência dos horizontes do BNPR e, óbvio, dele próprio. Veja que não mais temos uma única condição como no caso de Kerr, já que os termos advindos da correção (que têm dependência com o parâmetro da pulsação e com o ângulo azimutal) estão contidos nestas expressões.

Conclusões

Com o surgimento da TRG como uma teoria relativística da gravitação, surgiram inúmeras indagações sobre aspectos físicos de corpos celestes, que nos conduzem a interpretações que extrapolam as próprias leis da Física. Uma dessas interrogações surgiu por volta de 1916, com Schwarzschild. Sua equação, além de nos fornecer a curvatura do espaço-tempo devido a um corpo simetricamente esférico estático e sem carga elétrica no vácuo também dispõe que a matéria ao se concentrar e atingir um valor crítico de densidade, esse objeto fará com que o espaço-tempo no seu centro não seja mais regido pela Física que conhecemos e isso coloca a Relatividade Geral “contra a parede”. Por causa disso, teorias alternativas com um caráter mais fundamental advindas para a melhoria e generalização dessa última foram e ainda são propostas.

Dessa forma, Changjun Gao *et al.* (2018) propuseram a correção do modelo de Oppenheimer e Snyder de 1939, com uma das teorias de gravitação quântica mais aceitas atualmente, que é a de *Braneworlds* (teoria de Cordas). Com esse aprimoramento eles demonstraram que no colapso de uma esfera composta de um fluido perfeito a singularidade é removida da solução e assim permitindo que o processo de expansão seja retomado, sendo que a gravidade atuante fará com que esse crescimento seja cessado, e então o fluido volta a se comprimir, assim, caracterizando uma pulsação.

Na perspectiva de ampliar o trabalho de Gao *et al.*, nós utilizamos, neste trabalho, o algoritmo de Newman-Janis para aplicarmos rotação ao elemento de linha estático por eles proposto, e com isso obtivemos a expressão (3.25) ao qual demos o nome de BNPR, sendo que essa representa a distância infinitesimal entre dois pontos no espaço-tempo exterior devido o efeito do campo gravitacional gerado por um fluido perfeito com simetria

esférica, sem carga elétrica, com rotação e pulsação estando esse no vácuo.

Logo após, constatamos que a velocidade angular do horizonte de eventos varia com a latitude, diferenciando-se assim do caso de Kerr. Em seguida, chegamos à conclusão que o formato estrutural do horizonte não era de uma esfera regular, mas sim possuía uma forma oblata. Porém é notado que quando certas condições específicas são impostas, retornamos às equações obtidas pela TRG, se a matéria em questão for a poeira.

Referências

- [1] CARMELI, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.
- [2] D'INVERNO, Ray. **Introducing Einstein's Relativity**. Editora: Clarendon Press. New York, 1992. 383 p.
- [3] LIEBSCHER, Dierck-Ekkehard. **Cosmology**. Editora: Springer, 2005. 294 p.
- [4] MISNER, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John Archibald. **Gravitation**. Editora: W. H. Freeman and Company. San Francisco, 1973. 1279 p.
- [5] SUSSKIND, Lenard; Lindesay, James. **An introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe**. Editora: World Scientific, 2005. 183 p.
- [6] CARROLL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity**. Santa Bárbara: University of California, 1997. Revista: arXiv:gr-qc/9712019.v3. 238 p.
- [7] HAWLEY, John F.; Holcomb, Katherine A. **Foundations of Modern Cosmology**. 2^a ed. Editora: Oxford University Press. New York, 2005. 554 p.
- [8] TOWNSEND, Dr. P.K. **Black Holes: Lecture notes**. Revista: arXiv: gr-qc/9707012. 4 Jul. 1997.
- [9] BEGELMAN, M.; Rees, M. **Gravity's Fatal Attraction: Black Holes in the Universe**. 2^a ed. Editora: Cambridge University Press, 2010. 312 p.

- [10] BEGELMAN, M. C. **Evidence for Black Holes**. Revista: Science. v. 300. 20 Jun. 2003. p. 1898-1903.
- [11] GODDI, C. *et al.*. **BlackHoleCam: fundamental physics of the Galactic center**. Revista: Int. J. Mod. Phys. D26 (2016), n°.02, 1730001.
- [12] HEES, A. *et al.*. **Testing General Relativity with Stellar Orbits around the Supermassive Black Hole in Our Galactic Center**. Revista: Phys. Rev. Lett. 118(21):211101. [doi: 10.1103 PhysRevLett.118.211101.] 26 May 2017.
- [13] NARAYAN, Ramesh; McClintock, Jeffrey E. **Observational Evidence for Black Holes**. Revista: ArXiv: 1312.6698v2. 20 Jul. 2014.
- [14] J. S. Sanders *et al.* **A very deep Chandra view of metals, sloshing and feedback in the Centaurus cluster of galaxies**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Volume 457, Issue 1. 21 March 2016. Pages 82-109.
- [15] HEINICKE, Christian; Hehl, Friedrich W. **Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation: an introduction**. Revista: Int. J. Mod. Phys. D. v. 24, n° 2. 2015. 78 p.
- [16] RAINE, D.; Thomas, E. **Black Holes: An Introduction**. 2ª ed. Editora: Imperial College Press. London, 2010. 198 p.
- [17] SCHUTZ, Bernard F. **A First Course in General Relativity**. 2ª ed. Editora: Cambridge University Press. New York, 2009. 393 p.
- [18] MALAFARINA, Daniele. **Classical Collapse to Black Holes and Quantum Bounces: A Review**. Revista: Universe, 2017. v. 3, 42 p. [doi:10.3390/universe3020048].
- [19] GAO, Changjun; Lu, Youjun; Shen, You-Gen; Faraoni, Valerio. **Pulsation of black holes**. Revista: Gen. Relativ. Gravit. 4 Jan. 2018.

- [20] ESPOSITO, Giampiero. **An introduction to quantum gravity**. Revista: ArXiv: 1108.3269v1. 16 Aug. 2011.
- [21] ROVELLI, Carlo. **Quantum Gravity**. Editora: DRAFT, 2003. 329 p.
- [22] OPPENHEIMER, J. R.; Snyder, H. **On Continued Gravitational Contraction**. Revista: Phys. Rev. D. v. 56. p. 455-459. 10 Jul. 1939.
- [23] ROSSELAND, Svein. **The pulsation theory of variable stars**. Editora: Dover Publications, inc. New York, 1947. p. 152.
- [24] ISLAN, J. N. **An introduction to mathematical cosmology**. Cambridge university press, 1992.
- [25] WEINBERG, Steven. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1972. 657 p.
- [26] MELIA, Fulvio. **Proper Size of the Visible Universe in FRW Metrics with Constant Spacetime Curvature**. Revista: Class. Quant. Grav. 25 June 2013. v. 30, n° 15.
- [27] SOUZA, Ronaldo Eustáquio de. **Introdução á Cosmologia**. Editora: EDUSP. São Paulo, 2004. 328 p.
- [28] LAWDEN, Derek F. **Introduction to tensor calculus, relativity and cosmology**. 3ª ed. Editora: John Wiley & Sons, Ltd. New York, 1982. 205 p.
- [29] KINNEY, William H.; Brown, Katherine Freese Matthew G. **The Phantom Bounce: A New Oscillating Cosmology**. Revista: J. Cosm. Astro. Phys. v. 2008. 3 March 2008.
- [30] SILVA, Carlos Alex S.; **Loop quantum cosmology on a brane via holography**. Revista: arXiv:1707.07586v2 [gr-qc]. 7 Mar. 2019.

- [31] M. Seikel; M. Camenzind. **Braneworlds with timelike extra-dimension** Phys. Rev. D 79, 083531 (2009). [arXiv:astro-ph/0811.4629].
- [32] CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Editora: Addison Wesley. University of Chicago, 2004. 513 p.
- [33] BARCELÓ, Carlos; Carballo-Rubio, Rúbil; Garay, Luis J. **Gravitational echoes from macroscopic quantum gravity effects**. Revista: ArXiv: J. High Energ. Phys. (2017) 2017: 54. [[https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2017\)054](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2017)054)].
- [34] NEWMAN, E. T.; Adamo, Tim. **The Kerr-Newman metric: A Review**. Revista: ArXiv:1410.6626v2. 14 Nov. 2016.
- [35] DRAKE, S. P.; Szekeres, Peter. **Uniqueness of the Newman-Janis Algorithm in Generating the Kerr-Newman Metric**. Revista: Gen. Rel. Grav. v. 32. n° 3. 2000.
- [36] DRAKE, S. P.; Turolla, R. **The application of the Newman-Janis algorithm in obtaining interior solutions of the Kerr metric**. Revista: Class. Quant. Grav. v. 14 (1997), p. 1883-1897.
- [37] ERBIN, Harold. **Janis-Newman algorithm: simplifications and gauge field transformation**. Revista: Gen.Rel.Grav. 11 Feb. 2015.
- [38] ERBIN, Harold. **Janis-Newman algorithm: generating rotating and NUT charged black holes**. Revista: Universe, 2017 v. 3(1), n° 19.
- [39] JANIS, A. I.; Newman, E. T. **Note on the Kerr Spinning-Particle Metric**. Revista: J. Math. Phys. 1965. v. 6. n° 6. p. 915-917.
- [40] KERR, Roy Patrick. **Discovering the Kerr and Kerr-Schild metrics**. Revista: arXiv:0706.1109. 14 Jan. 2008.

- [41] KERR, Roy Patrick. **Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics**. Revista: Phys. Rev. Lett. (1963) v. 11. p. 237-238.
- [42] TEUKOLSKY, Saul A. **The Kerr Metric**. Revista: Class. Quant. Grav. v. 32, n° 12. 1 Jun. 2015.
- [43] HARRISON, Edward Robert. **Cosmology**: The science of the universe. 2^a ed. Editora: Cambridge University Press. New York, 2000. 567 p.
- [44] WALD, Robert M. **General relativity**. Editora: University of Chicago Press, 1984. 473 p.
- [45] NIELSEN, Alex B.; SHOOM, Andrey A. **Conformal Killing horizons and their thermodynamics**. Revista: Class. Quant. Grav. v. 35. n° 11. April 2018. 8 p.
- [46] BARDEEN, J. M.; Carter, B.; Hawking, S. **The Four laws of black hole mechanics**. Commun.Math.Phys. 31. p. 161-170. 1973.
- [47] POISSON, E. **A relativist's Toolkit**: The Mathematics, of Black-Hole Mechanics. London: Cambridge University Press, 2004. 250 p.