



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

RONALDO MARCELINO FELIX DE ANDRADE

# **Quintessência com Quebra de Simetria de Lorentz**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

Agosto - 2019



RONALDO MARCELINO FELIX DE ANDRADE

## **Quintessência com Quebra de Simetria de Lorentz**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. João Rafael Lucio dos Santos

Campina Grande, Paraíba, Brasil

Agosto - 2019

A553q      Andrade, Ronaldo Marcelino Felix de.  
              Quintessência com quebra de simetria de Lorentz / Ronaldo  
              Marcelino Felix de Andrade. – Campina Grande, 2020.  
              59 f. : il. color.

              Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de  
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.  
              "Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos".  
              Referências.

              1. Cosmologia. 2. Física. 3. Expansão Acelerada. 4. Quintessência.  
5. Parâmetros Cosmológicos. 6. Campos Escalares. 7. Energia Escura.  
8. Quebra de Simetria de Lorentz. I. Santos, João Rafael Lúcio dos.  
II. Título.

CDU 524.8(043)

**ATA DA SESSÃO PÚBLICA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO ALUNO RONALDO MARCELINO FELIX DE ANDRADE, CANDIDATO AO TÍTULO DE MESTRE EM FÍSICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO FÍSICA.**

Aos vinte nove dias do mês de Agosto do ano de dois mil e dezenove, no Auditório Jurgen Precker da Unidade Acadêmica de Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal de Campina Grande, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar Ronaldo Marcelino Felix de Andrade ao Grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor João Rafael Lúcio dos Santos (Orientador) – Doutor em Física, o professor Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos – Doutor em Física e o professor Carlos Alex Souza da Silva – Doutor em Física, sendo o primeiro integrante do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, o segundo integrante do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande e o terceiro integrante do corpo docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor João Rafael Lúcio dos Santos, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato Ronaldo Marcelino Felix de Andrade, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado “**Quintessência com Quebra de Simetria de Lorentz**”. Após discorrer o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o avaliado, legalmente habilitado a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o mesmo faz jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Hélio Pereira de Oliveira, secretário, lavrei a ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora.

Assinaturas

Secretário: Hélio Pereira de Oliveira  
Hélio Pereira de Oliveira

Presidente: João Rafael Lúcio dos Santos  
João Rafael Lúcio dos Santos

Examinador: Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Examinador: Carlos Alex Souza da Silva  
Carlos Alex Souza da Silva

Aluno: Ronaldo Marcelino Felix de Andrade  
Ronaldo Marcelino Felix de Andrade

Coordenador do Programa: João Rafael Lúcio dos Santos  
João Rafael Lúcio dos Santos



# Agradecimentos

- A Deus, nosso criador.
- Aos meus pais, João Felix e Marinete Marcelino, por todo o apoio, não só nos estudos, mas em todas as decisões de minha vida.
- Ao Professor Dr. João Rafael pela excelente orientação, pela paciência e dedicação, que foram elementos fundamentais para a elaboração desta dissertação.
- A todos os familiares, que de maneira direta ou indireta contribuíram de alguma forma na construção deste trabalho.
- A todos os amigos, principalmente os colegas do mestrado, Caroline Veras, Felipe Oliveira, Izabelle Cristina, Joeslei Lopes, Júlio César, Maria Girlandia, Rafaela Laranjeira, Thais Andrade e Romário Santos, pelo compartilhamento de conhecimento nas disciplinas que estudamos juntos e pelos momentos de descontração.
- A todos os professores do mestrado da Unidade Acadêmica de Física da UFCG.
- A todos os funcionários que compõem a Unidade Acadêmica de física, em especial ao Senhor Hélio, por nos manter sempre informados sobre os eventos de nossos interesses e por ser sempre tão prestativo.
- À CAPES, pelo suporte financeiro.



# Resumo

Os campos escalares possuem uma gama de aplicações em diversos contextos, uma delas está na matéria condensada com os defeitos. Estes defeitos aparecem naturalmente através da presença de transições de fase no início do universo. O tipo de defeito, bem como suas propriedades, dependem dos detalhes de cada quebra de simetria. Nesta dissertação utilizaremos uma aplicação dos campos escalares ligada ao cenário cosmológico por meio do estudo da quintessência, que envolve campos escalares acoplados à gravidade com a finalidade de descrever uma fase de expansão cósmica acelerada, se apresentando como uma alternativa promissora no estudo da inflação cósmica e da energia escura. Nosso interesse está em analisar soluções cosmológicas baseadas no formalismo de primeira ordem para encontrar modelos analíticos de 1 campo que descrevam a atual fase de expansão do Universo sem a necessidade de utilizar uma aproximação de *slow-roll*. Os resultados são obtidos por meio de parâmetros cosmológicos analíticos que tornam os resultados aceitáveis em relação aos valores experimentais. Através dos procedimentos mencionados, esperamos compreender o processo de expansão do Universo acelerado, enfatizando o fato de que o parâmetro de quebra de simetria de Lorentz é indispensável para o modelo proposto.

**Palavras-chave:** expansão acelerada, quintessência, parâmetros cosmológicos, campos escalares, energia escura, quebra de simetria de Lorentz.



# Abstract

Scalar fields have a range of applications in various contexts, one of which is in condensed matter with defects. These defects appear naturally through the presence of phase transitions at the beginning of the universe. The type of defect, as well as its properties, depends on the details of each symmetry break. In this dissertation we will use an application of scalar fields linked to the cosmological scenario through the study of quintessence, which involves gravity coupled scalar fields in order to describe a phase of accelerated cosmic expansion, presenting itself as a promising alternative in the study of cosmic inflation. of dark energy. Our interest is in analyzing first order formalism-based cosmological solutions to find 1-field analytical models that describe the current phase of expansion of the universe without the need for a slow-roll approximation. The results are obtained through analytical cosmological parameters that make the results acceptable in relation to the experimental values. Through the mentioned procedures, we hope to understand the process of expansion of the accelerated universe, emphasizing the fact that Lorentz's symmetry breaking parameter is indispensable for the proposed model.

**Keywords:** accelerated expansion, quintessence, cosmological parameters, fields scalars, dark energy, Lorentz symmetry breaking.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico do potencial $\phi^4$ . . . . .	23
Figura 2 – Soluções analítica tipo Kink. (Kink - linha vermelha; anti-kink - linha azul) . . . . .	23
Figura 3 – Potencial $\phi^4$ invertido. . . . .	24
Figura 4 – Solução do tipo lump (solução positiva - linha vermelha; solução negativa - linha azul) . . . . .	25
Figura 5 – Representação da estabilidade da solução estática de um potencial do tipo $\phi^4$ . . . . .	27
Figura 6 – Representação da instabilidade da solução estática de um potencial do tipo $\phi^4$ invertido. . . . .	28
Figura 7 – Parâmetro de Hubble $H(t)$ para $b_1 = 0,81$ , $b_2 = -0,8$ e $b_3 = -3$ . . . . .	43
Figura 8 – Parâmetro da equação de estado $\omega(t)$ para $b_1 = 0,81$ , $b_2 = -0,8$ e $b_3 = -3$ . . . . .	44
Figura 9 – Evolução da razão escalar-tensor para $b_1 = 0,81$ , $b_2 = -0,8$ e $b_3 = -3$ . . . . .	44



# Sumário

	<b>Lista de ilustrações</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>DEFEITOS TOPOLÓGICOS</b> . . . . .	<b>19</b>
2.1	Teoria para um Campo Escalar Real . . . . .	19
2.2	Soluções BPS . . . . .	20
2.3	Carga Topológica . . . . .	21
2.4	Defeitos Topológicos e a Solução do Tipo Kink . . . . .	22
2.5	Soluções do Tipo Lump . . . . .	23
2.6	Estabilidade Linear . . . . .	24
<b>3</b>	<b>MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1	Equação de Campo de Einstein . . . . .	29
3.2	Modelo FLRW . . . . .	30
3.3	Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito . . . . .	32
3.4	Formalismo de Primeira Ordem . . . . .	36
<b>4</b>	<b>QUINTESSÊNCIA COM QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ</b> .	<b>39</b>
4.1	Campo escalar e quebra de Lorentz para descrever Energia Escura .	39
4.2	Aplicação em um exemplo . . . . .	43
4.3	Análise Cosmológica . . . . .	45
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	<b>47</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>49</b>
	Referências . . . . .	59



# 1 Introdução

Einstein, com a sua teoria de gravitação, a Relatividade Geral (RG), propôs o princípio Cosmológico e deu início a cosmologia moderna em 1917. Nesta data ninguém suspeitava que o Universo estaria se expandindo e ainda mais de forma acelerada. Assim, foi perfeitamente natural a busca por um modelo estático. Tal modelo era uma solução das equações de campo de Einstein e seu principal obstáculo dizia respeito à própria natureza da gravidade, pois atuando sozinha causaria o colapso do universo sobre si próprio. Dessa forma, para compensar os efeitos atrativos da gravitação, Einstein introduziu um termo adicional às equações de campo. Ele propôs um termo que teria um sentido oposto ao da gravidade, a constante cosmológica. Tal constante introduz uma força repulsiva a fim de compensar a força puramente atrativa gravitacional e desta maneira obtém um resultado para o universo estático requerido pelas observações da época.

Em 1922 o matemático e meteorologista russo, Alexander Friedmann construiu um universo em expansão partindo das Equações de Campo de Einstein, porém sem utilizar a constante cosmológica. Em 1927, o matemático belga G. Lemaître mostrou que a competição entre a atração gravitacional e a repulsão cosmológica no modelo estático era responsável por uma instabilidade, podendo o universo estar em expansão acelerada. Esta possibilidade acentuou-se consideravelmente, fazendo com que Einstein abandonasse aos poucos a ideia de um universo estático e, conseqüentemente, abandonasse a ideia da constante cosmológica. A descoberta definitiva foi feita por Hubble em 1929, uma expansão linear relacionando redshift à distância, fez com que os modelos de Friedmann fossem estudados e desenvolvidos por vários pesquisadores. Os estudos efetuados por Lemaître constituem atualmente, juntamente com a solução expansionista obtida por Einstein e de Sitter [1], a base matemática de boa parte da cosmologia. Tais soluções foram posteriormente classificadas do ponto de vista da simetria espacial por Robertson e Walker, sendo frequentemente denominadas de modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e tornou-se parte da cultura científica.

Estas descobertas levaram a ideia de um Universo dominado por uma forma de energia com pressão negativa, que o tem acelerado pelos últimos cinco bilhões de anos. A essa forma de energia deram o nome de energia escura. É importante notar que a energia escura é diferente da matéria escura [2], já que esta última exerce atração gravitacional sobre outros corpos. Ela é chamada escura porque não emite radiação eletromagnética, e portanto, não pode ser detectada em nenhuma faixa do espectro eletromagnético. Já a energia escura provoca a repulsão sobre a matéria [3]. Atualmente acredita-se que 73% do Universo atual é constituído de energia escura. Dentro deste contexto, foram propostos vários candidatos para essa energia desconhecida, um deles seria reviver o modelo da

constante cosmológica como possibilidade de explicação para a natureza da energia escura. Infelizmente, tal ideia logo apresentou inconsistências [4] e novos modelos apareceram na literatura, mas até o momento nenhum deles provou ser o modelo definitivo [5].

Na presente Dissertação utilizaremos um modelo chamado de quintessência, que consiste em um modelo cosmológico onde a energia escura é representada por um campo escalar acoplado à gravidade. A organização deste trabalho se dará da seguinte forma: No capítulo 2 faremos uma breve abordagem sobre Teoria para um Campo Escalar Real, mostrando como é obtida a equação de movimento de Euler-Lagrange. Será apresentado também o modelo BPS, onde veremos que é possível obter as soluções para as equações de movimento de segunda ordem partindo de equações de primeira ordem. Em seguida apresentamos a carga topológica, que é a responsável pela existência dos Defeitos Topológicos. Estes defeitos estão geralmente ligados a quebra de simetria do sistema. Na ausência da carga topológica os defeitos são denominados de não-topológicos. Finalizamos o capítulo falando da Estabilidade Linear, onde estudaremos sobre a estabilidade das soluções de equações de movimento.

O capítulo 3 tem como principal objetivo mostrar que o Universo se expande aceleradamente. Para isso, introduziremos a equação de campo de Einstein e em seguida é apresentado o modelo FLRW, que consiste em uma métrica que descreve uma simetria esférica, homogeneia e isotrópica corroborando com o princípio cosmológico. Aplicaremos esta métrica nas equações de campo da gravitação com a finalidade de encontrar o tensor e o escalar de Ricci. Veremos que ao aplicar o tensor e o escalar de Ricci ao tensor energia-momento para um fluido perfeito encontraremos expressões que permitem obter informações sobre a taxa de expansão acelerada do Universo. Finalizaremos o capítulo apresentando o Formalismo de Primeira Ordem que tem por objetivo obter, de forma simplificada, soluções que diminuem a ordem das equações diferenciais de movimento.

Iniciaremos o capítulo 4 apresentando a energia responsável pela expansão acelerada do Universo, a energia escura. Uma energia que parece ter força oposta a força gravitacional, fazendo com que as galáxias estejam sempre se afastando umas das outras. Veremos que quando consideramos um campo escalar atuando como a energia escura teremos o estudo da denominada quintessência. Destacamos também que a equação de estado (uma relação entre pressão e densidade) é um dos parâmetros essenciais na descrição da expansão do universo, quando seu valor aproxima-se de  $-1$ . Para trabalharmos com modelos de quintessência, veremos que atualmente só existe um modelo sobrevivente composto por um único campo. Diante dessa problemática, nossa proposta será utilizar o formalismo de primeira ordem para encontrar soluções generalizadas que descrevam a atual fase do Universo. Para isso, veremos que a quebra de simetria de Lorentz é fundamental nesse processo, pois sem a utilização do termo que representa a quebra de simetria, não obtemos os resultados desejados e aceitáveis.

No capítulo 5 apresentaremos as conclusões e perspectivas para este trabalho.



## 2 Defeitos Topológicos

### 2.1 Teoria para um Campo Escalar Real

Para entendermos o que é um campo escalar partiremos do conceito de grandezas escalares, que podem ser entendidas como aquelas que se caracterizam apenas por um valor numérico e uma unidade de medida. São exemplos dessa grandeza o tempo, a temperatura e o volume. Um campo escalar é uma função  $\phi(p)$  e cada ponto  $p$  do espaço-tempo se relaciona com uma grandeza escalar. A distribuição de temperatura em um mapa é um exemplo de campo escalar, pois cada ponto da atmosfera terrestre se associa a uma grandeza escalar, que neste caso é a temperatura. Esses campos são invariantes sob a transformação de Lorentz, ou seja,  $\phi(p') = \phi(p)$ .

A densidade de lagrangeana para um escalar real é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde  $V(\phi)$  é o potencial do sistema e indica o problema a ser estudado.

A dinâmica de  $\phi$  é descrita pela ação

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x, \quad (2.2)$$

e a equação de movimento (ou equação de Euler-Lagrange) é obtida aplicando o princípio da mínima ação. Vale salientar que estamos utilizando a métrica de Minkowski em um espaço de (1+1) dimensões,  $\phi = \phi(x, t)$ . A Equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.3)$$

ou

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0, \quad (2.4)$$

onde  $\ddot{\phi}$  é a derivada segunda parcial do campo com relação ao tempo e  $\phi''$  é a derivada segunda parcial do campo com relação à posição. Se considerarmos um caso de um campo estático, temos que a derivada de segunda ordem com relação ao tempo é nula, assim a equação anterior torna-se

$$-\phi'' + V_\phi = 0, \quad (2.5)$$

multiplicando, agora, ambos os lados da equação por  $\phi'$  vamos reduzir a ordem da equação utilizando alguns artifícios matemáticos, assim temos

$$\phi' \phi'' = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dV}{dx}, \quad (2.6)$$

isso nos dá

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{dV}{dx}, \quad (2.7)$$

e integrando esta equação, temos

$$\phi' = \pm \sqrt{2V + C}, \quad (2.8)$$

onde  $C$  é uma constante determinada pelas condições de contorno.

## 2.2 Soluções BPS

O método BPS foi proposto por Bogomol'nyi em 1976, mas em 1975 Prasad e Sommerfield já haviam publicado sobre o assunto [6] e [7]. Este método nos permite obter soluções clássicas do tipo parede de domínio, que consiste em escrever os termos da densidade de energia na forma de quadrados perfeitos, minimizando a energia e impondo o cancelamento dos termos quadráticos [8]. Com o método BPS encontramos soluções para as equações de movimento de segunda ordem, partindo de equações de primeira ordem. A construção desse método parte da densidade de energia do sistema, que para campos estáticos é dado por

$$\rho(x) = -\mathcal{L} = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi). \quad (2.9)$$

Se integrarmos essa densidade em toda a dimensão do espaço, obtemos a energia total do sistema,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx, \quad (2.10)$$

completando um quadrado perfeito no integrando, temos:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} (\phi' \mp \sqrt{2V})^2 \pm \sqrt{2V} \phi' \right] dx, \quad (2.11)$$

analisando esta equação, percebemos que a energia do sistema será mínima quando,

$$\phi' = \pm \sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.12)$$

e assim

$$|E_{BPS}| = \int_{-\infty}^{+\infty} (\pm \sqrt{2V} \phi') dx. \quad (2.13)$$

A fim de facilitar a integração da equação (2.13), vamos definir um potencial positivo definido da seguinte maneira

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2(\phi)}{2}, \quad (2.14)$$

onde  $W_\phi$  é derivada da função  $W(\phi)$ , que chamaremos de superpotencial em relação a  $\phi$ . Assim, a equação (2.13) trona-se

$$\begin{aligned} |E_{BPS}| &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sqrt{2V} \phi', \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx W_\phi \phi', \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dW, \\ &= W(\phi_{(x \rightarrow +\infty)}) - W(\phi_{(x \rightarrow -\infty)}), \\ &= \Delta W. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Esse resultado nos leva a perceber que a energia mínima não depende das características locais da solução, mas sim dos seus limites assintóticos, ou seja, o comportamento dos campos nos extremos.

## 2.3 Carga Topológica

Como podemos ver em [9], a forma explícita da corrente topológica é dada por

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi), \quad (2.16)$$

onde  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o pseudo-tensor de Levi-Civita anti-simétrico. Em (1+1) dimensões suas componentes são dadas por:  $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$  e  $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$ . Como essa corrente é conservada, temos que  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Isto implica na existência de uma carga topológica  $Q_T$ :

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\phi}{dx} W dx \right|, \\ &= W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty)), \\ Q_T &= E_{BPS}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

A carga topológica  $Q_T$  caracteriza os defeitos como topológicos quando  $Q_T \neq 0$  e defeitos não topológicos quando  $Q_T = 0$ . Os Kinks e os Lumps são exemplos de soluções topológicas e não topológicas, respectivamente, como veremos a Seguir.

## 2.4 Defeitos Topológicos e a Solução do Tipo Kink

Defeitos topológicos são configurações da matéria baseadas em transições de fase. Estas configurações são geralmente relacionadas a quebra de simetria do sistema, onde cada defeito se torna único devido as suas propriedades de simetria da matéria e da natureza de transição de fase [10]. Este tipo de defeito possui estabilidade garantida através de uma carga topológica. Eles se comportam de forma diferente ao nos afastarmos, em direções opostas, do centro da solução [11].

Vamos analisar, agora, o potencial do modelo  $\phi^4$ , dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2, \tag{2.18}$$

O gráfico desse modelo é representado pela figura 1.

A equação diferencial de primeira ordem referente a este modelo é

$$\phi' = W_\phi = \pm(1 - \phi^2), \tag{2.19}$$

integrando a equação acima, temos

$$\int \frac{d\phi}{(1 - \phi^2)} = \pm \int dx, \tag{2.20}$$

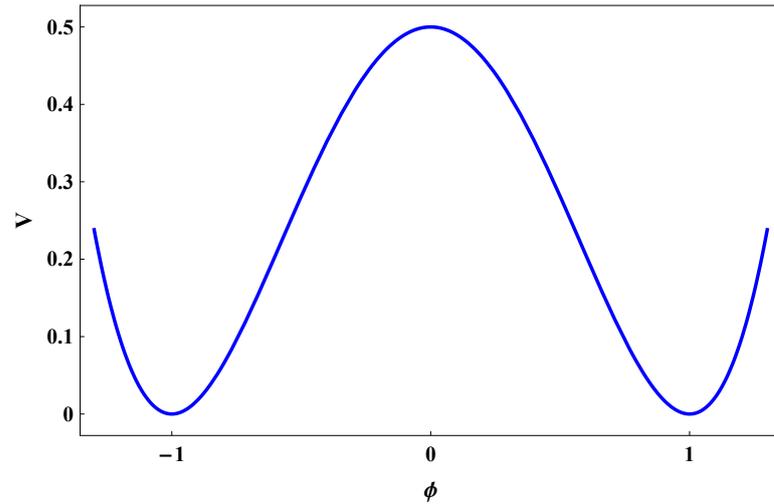


Figura 1 – Gráfico do potencial  $\phi^4$ .

cuja solução é dada por

$$\phi(x) = \pm \tanh(x), \quad (2.21)$$

e seu grafico correspondente pode ser visto na Figura 2.

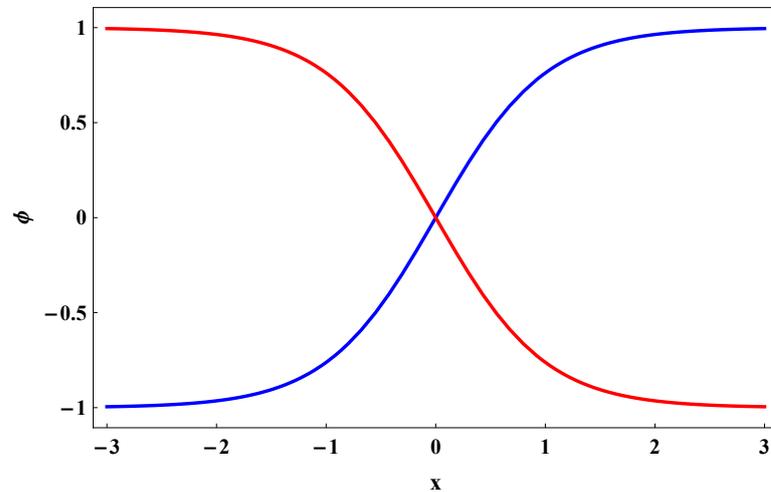


Figura 2 – Soluções analítica tipo Kink. (Kink - linha vermelha; anti-kink - linha azul)

Estas equações mostram como se comportam o Kink (solução positiva) e o anti-Kink (solução negativa).

## 2.5 Soluções do Tipo Lump

Para representar este defeito vamos considerar agora um modelo  $\phi^4$  invertido, dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^4 = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2). \quad (2.22)$$

cujos seu gráfico é exposto na Figura 3.

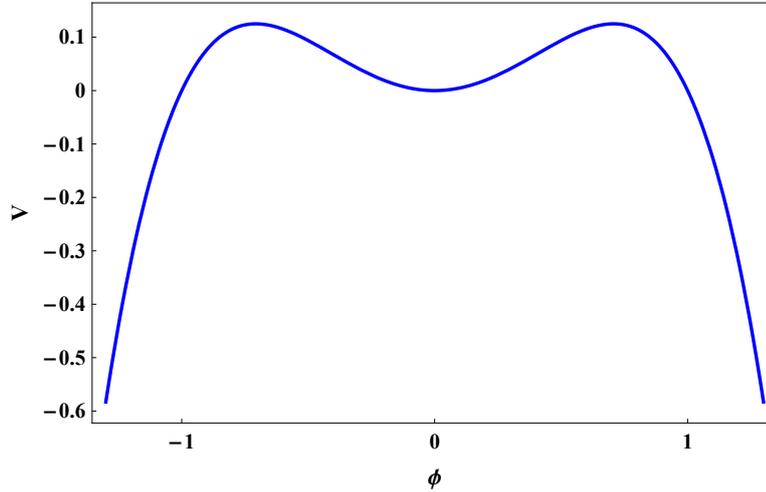


Figura 3 – Potencial  $\phi^4$  invertido.

A equação diferencial de primeira ordem correspondente é

$$\phi' = W_\phi = \pm\phi(1 - \phi^2)^{1/2}, \quad (2.23)$$

que tem solução

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}(x), \quad (2.24)$$

e é representada graficamente de acordo com a Figura 4

Estas soluções têm carga topológica nula, pois  $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$ , assim, são denominadas soluções não - topológicas.

## 2.6 Estabilidade Linear

Como vimos, os Defeitos Topológicos são estruturas estáveis. Nesta seção, estudaremos a estabilidade das soluções das equações de movimento através da chamada Estabilidade Linear [12], considerando pequenas perturbações em torno das soluções. Faremos esse procedimento linearizando as equações de movimento para obter o potencial de estabilidade e os autovalores associados[13][14].

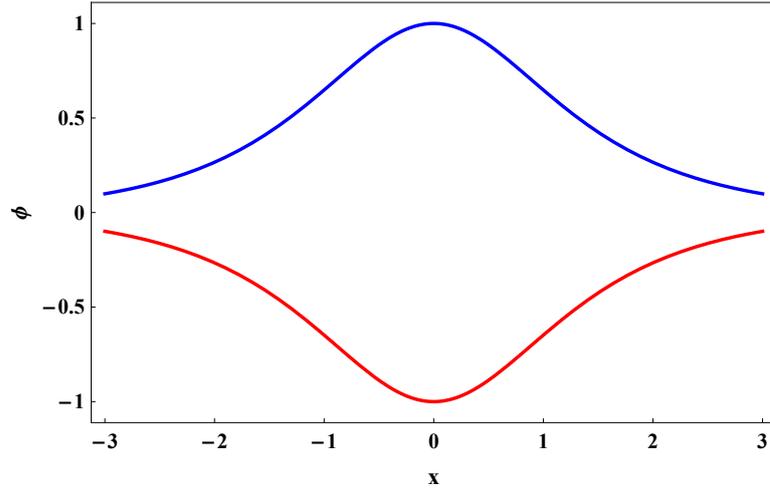


Figura 4 – Solução do tipo lump (solução positiva - linha vermelha; solução negativa - linha azul)

Inicialmente, vamos considerar um campo escalar que possui dependência espacial e temporal, como mostrado abaixo

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.25)$$

onde  $\phi_s(x)$  é a nossa solução estática e  $\eta(x, t)$  é uma pequena perturbação. Substituindo (2.25) em (2.4), temos que

$$\ddot{\eta} - \eta'' - V_{\phi_s \phi_s} \eta = 0, \quad (2.26)$$

como podemos observar,  $\eta$  depende da forma do potencial e da solução estática  $\phi_s$ .

Utilizando o *Ansatz*

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.27)$$

(2.26) torna-se

$$\eta_n'' + U(x)\eta_n = \omega_n^2 \eta_n, \quad (2.28)$$

onde  $U(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s}$ .

A equação (2.28) é uma equação de autovalor do tipo Schrodinger [15] [16], onde  $\omega_n^2$  são os autovalores e  $\eta_n$  os autovetores.

A seguir, resolveremos a equação de autovalores. É importante destacar que dependendo das características do potencial, essa equação de autovalores pode não ser facilmente solúvel. Analisaremos a estabilidade do potencial  $V_{\sin}(\phi)$  com  $a$  inteiro. Como esta família é composta por potenciais positivos definidos, podemos escrever

$$V_{\sin}(\phi_s) = \frac{W_{\phi_s}^2}{2}, \quad (2.29)$$

com  $W_{\phi_s} = dW/d\phi_s$ , conseqüentemente de (2.1) obtemos  $\phi'_s = W_{\phi_s}$ , assim

$$U = W_{\phi_s \phi_s}^2 + W_{\phi_s} W_{\phi_s \phi_s \phi_s}. \quad (2.30)$$

Substituindo esta última equação em (2.28), podemos reescrevê-la em termos dos operadores

$$a^\dagger a = \left( \frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s} \right) \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s} \right), \quad (2.31)$$

como

$$a^\dagger a \eta_n = \omega_n^2 \eta_n. \quad (2.32)$$

Se admitirmos a existência de estados ligados para o modo zero, ou seja para  $\omega_0 = 0$ , temos que

$$a \eta_0 = \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s} \right) \eta_0 = 0, \quad (2.33)$$

e integrando temos

$$\eta_0(x) = A e^{\int W_{\phi_s \phi_s} dx}, \quad (2.34)$$

onde  $A$  é uma constante de integração. Podemos observar que

$$\frac{d \log(W_{\phi_s})}{dx} = \frac{1}{W_{\phi_s}} W_{\phi_s} W_{\phi_s \phi_s} = W_{\phi_s \phi_s}, \quad (2.35)$$

dessa forma, temos

$$\eta_0(x) = A W_{\phi_s} = A \frac{d\phi_s}{dx} = \frac{\text{sech}(x)}{a} \sin \left( \frac{\arccos[\tanh(x)] + m\pi}{a} \right). \quad (2.36)$$

Para soluções do tipo Kink, o menor autovalor encontrado é zero, sendo estáveis por estabilidade linear enquanto que para Lumps, o menor autovalor é menor que zero e por isso são instáveis [13].

**Exemplo 1:** Sendo um potencial do tipo  $\phi^4$ , com  $W_{\phi_s} = 1 - \phi_s^2$ , em que sua solução analítica é dada por  $\phi_s = \tanh^2(x)$ , obtemos que

$$\eta_0 = 1 - \tanh^2(x) = \text{sech}(x), \quad (2.37)$$

para

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2.38)$$

e

$$\eta(x) = \eta_0 \operatorname{sech}(x), \quad (2.39)$$

dessa forma a solução perturbada será  $\phi(x) = \tanh(x) + \eta_0 \operatorname{sech}(x)$ , sendo  $\eta_0 \ll 1$ . A estabilidade da solução estática é caracterizada pelo  $\eta_0$ , que corresponde ao modo-zero da oscilação. Quando o estado  $\eta_0$  for diferente do modo-zero de oscilação, corresponderá a um estado excitado, abrindo espaço para existência de um estado fundamental com auto-valor  $\omega_n^2 < 0$ , ou seja,  $\omega_n \rightarrow i\omega_n$ . Um estado deste tipo nos mostra que

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(i\omega_n t) = \eta_0 \left( \frac{e^{\omega_n t} + e^{-\omega_n t}}{2} \right). \quad (2.40)$$

A equação 2.40 nos informa que para um tempo  $t$  tendendo ao infinito, a perturbação  $\eta(x, t)$  também tenderá ao infinito, desestabilizando a função e implicando na instabilidade de  $\phi_s(x)$ .

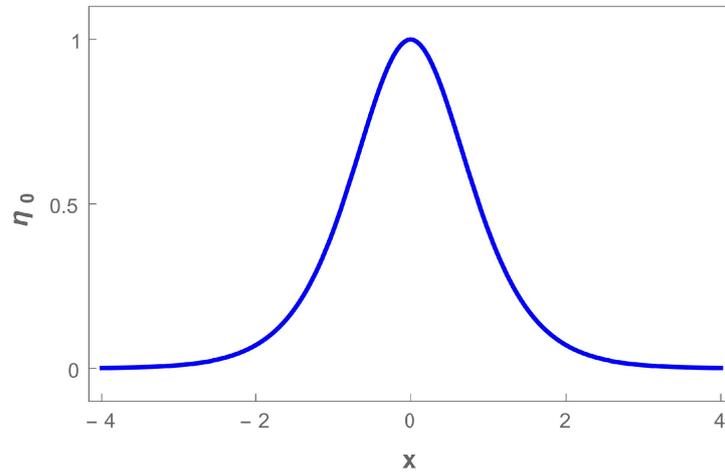


Figura 5 – Representação da estabilidade da solução estática de um potencial do tipo  $\phi^4$ .

**Exemplo 2:** Para um potencial do tipo  $\phi^4$  invertido, onde  $W_{\phi_s} = \phi \sqrt{1 - \phi_s^2}$ , temos al seque  $\phi'_s = -W_{\phi_s}$  e a solução analítica desse potencirá  $\phi_s = \operatorname{sech}(x)$ , consequentemente

$$\eta_0 = W_{\phi_s} = \operatorname{sech}(x) \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(x)}, \quad (2.41)$$

$$\eta_0 = W_{\phi_s} = \operatorname{sech}(x) \tanh(x), \quad (2.42)$$

correspondendo a um primeiro modo de oscilação. desta forma a solução  $\phi_s$  é instável.

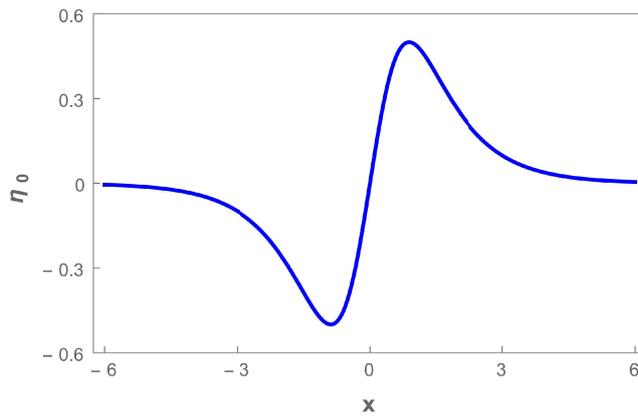


Figura 6 – Representação da instabilidade da solução estática de um potencial do tipo  $\phi_4$  invertido.

## 3 Modelo Padrão da Cosmologia

Há cem anos desconhecíamos a existência de galáxias e acreditávamos que o universo era estático. Em 1922, Alexandre Friedmann demonstrou a partir das equações de campo de Einstein que o Universo sofre uma expansão acelerada. Com esse modelo podemos entender a evolução do universo desde as primeiras frações de segundo até hoje, aproximadamente 14 bilhões de anos depois [17].

### 3.1 Equação de Campo de Einstein

Para introduzir as equações de campo da Relatividade Geral, partiremos da chamada ação de Einstein-Hilbert, que é definida por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{-1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right], \quad (3.1)$$

onde  $R$  é o escalar de Ricci,  $g$  é o determinante do tensor métrico ( $g_{\mu\nu}$ ),  $\phi$  representa o campo escalar e adotaremos  $4\pi G = 1$ .

Variando a ação, temos:

$$\delta S = \int d^4x \left[ \delta \sqrt{-g} \left( \frac{-1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right) + \sqrt{-g} \delta \left( \frac{-1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right) \right], \quad (3.2)$$

e assumiremos que:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

a dedução da identidade acima pode ser encontrada com detalhes no Apêndice B. Podemos escrever então a equação (3.2) da seguinte maneira:

$$\delta S = \int d^4x \left[ -\frac{\sqrt{-g}}{4} \left( -\frac{g_{\mu\nu}}{2} R + 2g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta \left( -\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) \right]. \quad (3.3)$$

Utilizando o escalar de Ricci como sendo:  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . temos que:

$$\frac{-1}{4} \sqrt{-g} \delta R = \frac{-1}{4} \sqrt{-g} [\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}]. \quad (3.4)$$

O variacional da lagrangeana de matéria será escrita da seguinte forma:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

O termo  $\delta R_{\mu\nu}$  da equação (3.4) será nula devido às condições de contorno. Diante disso, substituindo as equações (3.4) e (3.5) na equação (3.3), teremos:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{-1}{4}(R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}R) + \frac{1}{2} \left( 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Pela Teoria da Relatividade geral, temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \psi T_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

onde o lado esquerdo representa a geometria do espaço-tempo e o lado direito é uma relação da matéria com o tensor energia-momento. a constante de proporcionalidade é definida por  $\psi = \frac{8\pi G}{c^4}$  e considerando um sistema de unidades em que  $4\pi G = c = 1$ , temos que  $\psi = 2$ , então:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Substituindo a expressão (3.8) em (3.6), encontramos a seguinte relação:

$$2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = T_{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

No caso de vácuo (ausência de matéria), temos  $T_{\mu\nu} = 0$ , assim:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (3.10)$$

## 3.2 Modelo FLRW

De acordo com o princípio cosmológico, vamos considerar um espaço-tempo quadridimensional homogêneo e isotrópico. Para descrever a geometria do universo com essas características precisamos determinar o elemento de linha que descreve-o. Esse elemento de linha é dado pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), pois as características citadas implicam em uma simetria esférica.

A métrica FLRW é dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.11)$$

sendo  $a = a(t)$  o fator de escala e  $k$  a constante de curvatura, podendo assumir valores -1, 0, 1 para o universo ser hiper-esférico (fechado), plano ou hiperbólico, respectivamente.

Aplicando a métrica FLRW nas equações de campo da gravitação, temos que as componentes não nulas do tensor métrico são dadas por:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1; \\ g_{11} &= \frac{-a^2}{(1 - kr^2)}; \\ g_{22} &= -a^2 r^2; \\ g_{33} &= -a^2 r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Com os tensores métricos, encontramos os valores para os símbolos de Christoffel, o tensor e o escalar de Ricci. As contas mais detalhadas sobre os símbolos de Christoffel não nulos e do tensor de Ricci serão encontradas no Apêndice A.

O tensor de curvatura (tensor de Riemann) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}, \quad (3.12)$$

esse tensor de quarta ordem não depende da métrica. Diante disso, iremos utilizar o tensor de Ricci que é determinado por meio de uma conexão afim. Essa conexão é conhecida também como Símbolos de Christoffel e é descrita da seguinte forma:

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.13)$$

Como o tensor de Ricci é uma forma contraída da equação (3.12), podemos associar o tensor de Ricci com o tensor de curvatura:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (3.14)$$

e as componentes não nulas do tensor de Ricci são:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (3.15)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{11}; \quad (3.16)$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{22}; \quad (3.17)$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{33}. \quad (3.18)$$

As componentes do tensor de Ricci para as coordenadas espaciais obedecem a seguinte equação:

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{ij}. \quad (3.19)$$

O produto do tensor métrico pelo tensor de Ricci é denominado de escalar de Ricci, assim para a métrica FLRW, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\ &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \left[3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)\right], \\ &= -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.3 Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito

Como já foi dito, estamos trabalhando de acordo com o princípio cosmológico, onde o universo é homogêneo e isotrópico. Assim, podemos considerar que todo o universo é permeado por um fluido perfeito. Dessa forma podemos escrever  $T_{\mu\nu}$  em um sistema de coordenadas comóvel, como podemos ver em [18] [19] [20].

A forma do tensor energia-momento para um fluido perfeito pode ser escrita como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia,  $p$  a pressão e  $U$  o quadri-velocidade do fluido.

A representação matricial do tensor energia-momento é dada por:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 p}{(1 - kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 p \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

cujo o traço será:  $T = T^\mu_\mu = \rho - 3p$ .

Utilizando a equação (3.8), temos que a componente temporal  $\mu\nu = 00$  é dada por:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= 2T_{00}, \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

o termo  $\frac{\dot{a}}{a}$  é denominado parâmetro de Hubble e é representado pela letra  $H$ :

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.24)$$

Tal parâmetro nos permite obter informações sobre a taxa de expansão do Universo.

Para as componentes do espaço, temos:

$$R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R = 2T_{ij}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \quad (3.26)$$

essa equação representa a taxa de aceleração, em função da pressão e da densidade. O par de equações, coordenadas temporal e espacial, são conhecidas como as equações de Friedmann.

Relacionado as equações de Friedmann, encontramos a equação da continuidade para um fluido cosmológico:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.27)$$

Os cálculos detalhados de como foram obtidas as Equações (3.23), (3.26) e (3.27) estão no Apêndice C.

Podemos estabelecer uma relação entre a pressão e a densidade, denominada equação de estado:

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad (3.28)$$

onde  $\omega$  é o parâmetro da equação de estado.

como vimos no capítulo 2, a densidade e a pressão do universo podem ser determinadas em termos de uma lagrangeana de campo escalar (2.1):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.29)$$

e substituindo essa equação em (3.9), temos que o tensor energia-momento pode ser escrito como:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right), \quad (3.30)$$

cujas formas explícitas de suas componentes são:

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 - \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right], \quad (3.31)$$

e

$$T_{ii} = 0 + \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right]. \quad (3.32)$$

As equações (3.31) e (3.32) podem ser relacionadas com a equação (3.22) de modo a resultar em:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.33)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.34)$$

Substituindo as equações (3.33) e (3.34) na expressão (3.28), a equação de estado, torna-se:

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (3.35)$$

Também podemos observar que a equação (3.24) torna-se:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.36)$$

Derivando o parâmetro de Hubble ( $H = \frac{\dot{a}}{a}$ ), têm-se que:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (3.26), obteremos:

$$\begin{aligned} \dot{H} + H^2 &= -\frac{1}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi), \\ \dot{H} &= -\frac{1}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi) - \frac{2}{3}\rho_\phi + \frac{k}{a^2}, \\ \dot{H} &= -\rho_\phi - p_\phi + \frac{k}{a^2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (3.39)$$

Assim, temos que o par de equações de Friedmann pode ser reescrito como:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (3.40)$$

e

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (3.41)$$

Dessa forma, podemos escrever o potencial como:

$$V = \frac{3}{2}H^2 + \frac{\dot{H}}{2} + \frac{k}{a^2}. \quad (3.42)$$

A ação dada pela equação (3.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}, \quad (3.43)$$

onde  $\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \mathcal{L}$ .

Aplicando a minimização da ação em relação ao campo:

$$\delta S = \int d^4x \delta \tilde{\mathcal{L}} = 0. \quad (3.44)$$

obteremos a expressão:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (3.45)$$

Como já vimos na equação (2.1), a equação de movimento para o campo escalar terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_\phi &= 0, \\ \ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + V_\phi &= 0, \\ \ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} + V_\phi &= 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

para o caso em  $\phi = \phi(t)$ .

### 3.4 Formalismo de Primeira Ordem

Podemos descrever a energia escura incluindo um campo escalar de fundo no modelo cosmológico padrão, essa abordagem é conhecida como modelo  $\phi - ColdDarkMatter$  ( $\phi - CMD$ ) ou modelos de quintessência. Essa análise é feita através das soluções das equações de movimento e como podemos ver em [21] e [22], podemos obter essas soluções de maneira simplificada, reduzindo a ordem das dessas equações diferenciais de movimento, esse método é conhecido como Formalismo de Primeira ordem e será descrito a seguir. Assumiremos uma geometria plana ( $k = 0$ ), onde as equações de friedmann são escritas da seguinte forma:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right), \quad (3.47)$$

e

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (3.48)$$

Definindo o parâmetro de Hubble como:

$$H \equiv -W(\phi), \quad (3.49)$$

e assim, a equação (3.48) pode ser escrita como:

$$\dot{H} = -W_\phi \dot{\phi},$$

sendo  $W_\phi = \frac{dW}{d\phi} = \dot{\phi}$ .

O potencial da equação(3.42) para  $k = 0$  é dado por:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{3}{2} \left[ H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{3} \right], \\ &= \frac{3}{2} H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \\ V(\phi) &= \frac{3}{2} W^2 - \frac{\dot{W}_\phi^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Agora, partindo dos resultados obtidos, vamos analisar se as equações encontradas obedecem a equação de movimento:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (3.51)$$

Para que esta análise seja feita, vamos definir a derivada segunda do campo escalar,  $\ddot{\phi}$ , e a derivada do potencial,  $V_\phi$ , que estão contidas na equação de movimento:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{d}{dt}(W_\phi), \\ &= W_{\phi\phi} \dot{\phi}, \\ &= W_{\phi\phi} W_\phi, \end{aligned} \quad (3.52)$$

e

$$\begin{aligned} V_\phi &= \frac{dV}{d\phi}, \\ &= \frac{d}{d\phi} \left( \frac{3}{2} W^2 - \frac{\dot{W}_\phi^2}{2} \right), \\ &= 3W W_\phi - W_\phi W_{\phi\phi}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como podemos observar, ao substituirmos (3.49), (3.52), (3.53) em (3.51), concluímos que o formalismo de primeira ordem é coerente com a equação de movimento.



## 4 Quintessência com Quebra de Simetria de Lorentz

Em 1998, a partir de observações de Supernova Tipo Ia (SN Ia), dois grupos de Astrofísicos apontaram para um regime de expansão acelerada do Universo [23, 24]. Esse resultado alterou drasticamente a nossa visão do cosmos, pois, sendo a gravidade uma força atrativa, a expansão deveria ser desacelerada, conforme se acreditou durante muitas décadas. A energia responsável por essa aceleração foi denominada *energia escura*. Esta energia contribui com cerca de 73% para o conteúdo cósmico do Universo. Dessa forma, a *energia escura* é necessária para explicar a atual expansão acelerada e as medidas de densidade de energia total [25]. O adjetivo escuro significa que não emitem ondas eletromagnéticas nem interagem com as partículas conhecidas do modelo padrão da física de partículas.

O candidato mais simples para representar a energia escura é a constante cosmológica [26], quando a equação de estado  $\omega = -1$ . Porém, esta é apenas uma hipótese e por isso é necessário procurar modelos alternativos para explicar a atual expansão acelerada do Universo. O caso em que consideramos a *energia escura* como um campo escalar dinâmico é denominado de quintessência [27–30]. A ideia de *quintessência* – quinto elemento – como um tipo especial de matéria preenchendo o cosmos foi originalmente introduzida pelos gregos. Na cosmologia aristotélica, por exemplo, o universo seria finito, estático e formado por cinco elementos primordiais: água, ar, terra, fogo e quintessência. O quinto elemento seria uma substância diferente das outras; transparente, inalterável e imponderável; uma matéria-prima que formaria a Lua, os planetas (diferentes da Terra), o Sol e as estrelas. A quintessência era um elemento essencial para tornar o modelo cosmológico grego consistente [31].

### 4.1 Campo escalar e quebra de Lorentz para descrever Energia Escura

Para análise de modelos de *quintessência*, a equação de estado  $\omega$ , introduzida em (3.28), é de fundamental importância. A faixa de variação observacional de  $\omega$  deve respeitar os limites,  $-1 \leq \omega \leq 1$ , onde o limite de  $\omega = -1$  descreve uma fase do universo dominada por pressão negativa, caracterizando, dessa forma, a expansão do Universo.

Ao considerarmos um campo escalar de fundo que interage com a gravitação como proposta para explicar a energia escura, nos deparamos com o fato de que modelos

compostos por um único campo estão praticamente descartados após os últimos dados do Dark Energy Survey [32] e do Planck [33]. Segundo estes dados, o único modelo sobrevivente é do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{n^2 \phi^2}{2}. \quad (4.1)$$

A fim de resolver esse problema, partiremos de uma lagrangeana que possui um termo  $\xi$  que representa uma quebra de simetria de Lorentz, como podemos ver em [26], onde os parâmetros cosmológicos foram derivados a partir da aproximação de slow-roll ( $\dot{\phi} \gg \ddot{\phi} \rightarrow 3H\dot{\phi} = \frac{-V_\phi}{1+\xi\beta}$ ). Nossa contribuição é encontrar soluções generalizadas para essa proposta, através do formalismo de primeira ordem. Implementamos o formalismo de primeira ordem, escolhemos o modelo  $\phi^4$  a partir do qual, geramos os parâmetros  $H$  e  $\omega$  e analisamos os parâmetros de pequenas perturbações espectrais [34].

Destacamos dois trabalhos importantes que envolvem cenários cosmológicos com violação de Lorentz na fase inflacionária, as abordagens de Gasperini [35] e de Donnelly e Jacobson [36]. Em sua obra, Gasperini propõe que um mecanismo adicional de produção de inflação poderia ser usado para resolver alguns problemas do cenário inflacionário padrão. Além disso, na referência [36] os autores consideram uma teoria com violação de Lorentz formada por uma teoria de Einstein-éter acoplada a um campo escalar lagrangeano. Lá os autores determinaram parâmetros cosmológicos que são afetados pela violação de Lorentz, mas ainda permitem um fim natural à inflação. Este cenário também pode ser considerado utilizando a energia escura, mostrando que a violação da invariância de Lorentz induz lagrangeanas que são capazes de conduzir a atual aceleração do universo [37, 38].

Iniciamos o procedimento a partir da seguinte lagrangeana com termo de quebra de Lorentz

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} + \xi \kappa_{\mu\nu}) \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi), \quad (4.2)$$

em que a densidade de energia e a pressão relacionadas a essa lagrangeana são, respectivamente

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} (1 - \xi) \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.3)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2} (1 + \xi) \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.4)$$

Podemos escrever (4.2) como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi). \quad (4.5)$$

Vimos no capítulo anterior que, para esta lagrangeana, as Equações de Friedmann são dadas pelas Equações (3.24) e (3.38). Assumindo uma geometria plana ( $k = 0$ ), essas equações são escritas da seguinte forma:

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho_\phi, \quad (4.6)$$

e

$$\dot{H} = -(\rho_\phi + p_\phi). \quad (4.7)$$

Ao substituírmos (4.3) e (4.4) em (4.6) e (4.7), obtemos:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2}(1 - \xi)\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right), \quad (4.8)$$

e

$$\dot{H} = -\dot{\phi}. \quad (4.9)$$

Aplicando o Formalismo de Primeira ordem, temos

$$H = -W(\phi); \quad \dot{H} = -W_\phi \dot{\phi} = -\dot{\phi}^2; \quad \dot{\phi} = W_\phi. \quad (4.10)$$

Dessa forma, podemos escrever o potencial  $V(\phi)$ , como

$$V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}(1 - \xi)W_\phi^2. \quad (4.11)$$

Com isso, temos que a equação de estado  $\omega$  para este modelo é dada por

$$\omega = -1 + \frac{2}{3} \left( \frac{W_\phi}{W} \right)^2. \quad (4.12)$$

A primeira e segunda derivada do potencia (4.11) com relação a  $\phi$  são dadas respectivamente por:

$$V_\phi = 3WW_\phi - (1 - \xi)W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (4.13)$$

e

$$V_{\phi\phi} = 3(W_\phi^2 + WW_{\phi\phi}) - (1 - \xi)W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}. \quad (4.14)$$

Os parâmetros de *slow roll* (*rolagem lenta*) são explicitamente dados por

$$\epsilon = \frac{1}{4} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2, \quad (4.15)$$

e

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{V_{\phi\phi}}{V}. \quad (4.16)$$

Temos ainda que o Índice Espectral Escalar  $n_s$  é dado por

$$n_s = 1 - 6\epsilon - 2\Pi. \quad (4.17)$$

Substituindo (4.15) e (4.16) em (4.17), obtemos:

$$n_s = 1 + \frac{4VV_{\phi\phi} - 3V_\phi^2}{2V^2}. \quad (4.18)$$

Agora vamos substituir (4.11), (4.13) e (4.14) em (4.18) e assim, obter

$$\begin{aligned} n_s &= 1 + (2(-3W_\phi^2(3W - (1 - \xi)W_{\phi\phi})^2 + 2(3W^2 \\ &\quad - (1 - \xi)W_\phi^2)(3W_\phi^2 + W_{\phi\phi}(3W - (1 - \xi)W_{\phi\phi}) \\ &\quad - (1 - \xi)W_\phi W_{\phi\phi\phi}))) / (3W^2 - (1 - \xi)W_\phi^2)^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A razão escalar-tensor  $r$ , é representada pela expressão

$$r = \frac{P_T}{P_\zeta}, \quad (4.20)$$

onde,  $P_T$  e  $P_\zeta$  são dados, respectivamente, por

$$P_T = 16 \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2,$$

e

$$P_\zeta = \frac{H^4}{4\pi^2 \dot{\phi}^2}.$$

Assim, fazendo as devidas substituições, encontramos que

$$r = 16 \left( \frac{W_\phi}{W} \right)^2. \quad (4.21)$$

Os dados experimentais mais atuais para modelos inflacionários do tipo  $R^2$  Starobinsky preveem que o parâmetro  $r$ , equação (4.21), deve estar entre 0,003 e 0,005. Ainda segundo esses dados, o parâmetro  $n_s$ , representado na equação (4.19) deve ser  $0,9665 \pm 0,0038$  [33].

## 4.2 Aplicação em um exemplo

A aplicabilidade do formalismo obtido pode ser trabalhada no seguinte exemplo [39]:

$$W = b_1 \left( \phi - \frac{\phi^3}{3} \right) + b_2, \quad (4.22)$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são constantes reais. Esta forma para  $W$  foi usada em vários trabalhos sobre teoria de campo e cosmologia, como podemos ver em [40] e [41], por exemplo. A equação de primeira ordem para este modelo é dada por

$$\dot{\phi} = b_1(1 - \phi^2), \quad (4.23)$$

e sua solução analítica é

$$\phi(t) = \tanh(b_1 t + b_3). \quad (4.24)$$

Utilizando as equações (4.22) e (4.24), podemos verificar o comportamento dos parâmetros  $H$ ,  $\omega$ ,  $r$  e  $n_s$ . Adotaremos os valores das constantes como  $b_1 = 0,81$ ,  $b_2 = -0,8$  e  $b_3 = -3$ . Assim, o parâmetro  $H$ , visto em (4.10), torna-se

$$H = -b_2 + \frac{1}{3}b_1 \tanh(b_3 + b_1 t) \left( -3 + \tanh(b_3 + b_1 t)^2 \right), \quad (4.25)$$

e seu gráfico correspondente é representado pela Figura 7.

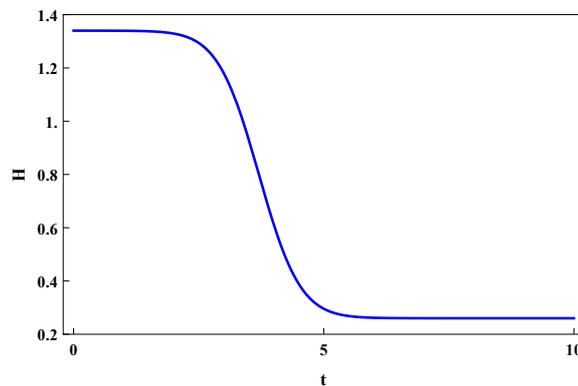


Figura 7 – Parâmetro de Hubble  $H(t)$  para  $b_1 = 0,81$ ,  $b_2 = -0,8$  e  $b_3 = -3$

O parâmetro da equação de estado  $\omega$ , equação (4.12), fica

$$\omega = -1 + \frac{6b_1^2 \operatorname{sech}(b_3 + b_1 t)^4}{(3b_2 + 3b_1 \tanh(b_3 + b_1 t) - b_1 \tanh(b_3 + b_1 t)^3)^2}, \quad (4.26)$$

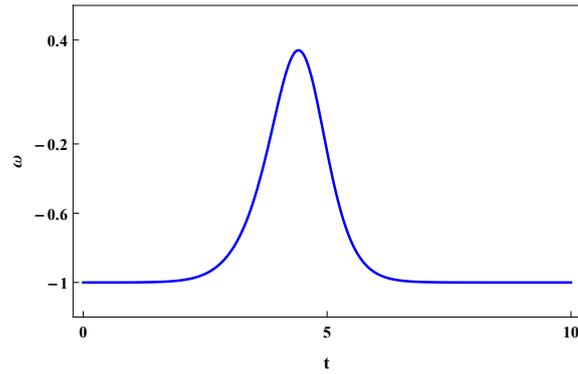


Figura 8 – Parâmetro da equação de estado  $\omega(t)$  para  $b_1 = 0,81$ ,  $b_2 = -0,8$  e  $b_3 = -3$

e sua representação gráfica pode ser vista na Figura 8.

O parâmetro  $r$ , dado pela equação (4.21), torna-se

$$r = \frac{144b_1^2 \operatorname{sech}(b_3 + b_1 t)^4}{(3b_2 + 3b_1 \tanh(b_3 + b_1 t) - b_1 \tanh(b_3 + b_1 t)^3)^2}, \quad (4.27)$$

sendo representado graficamente pela Figura 9.

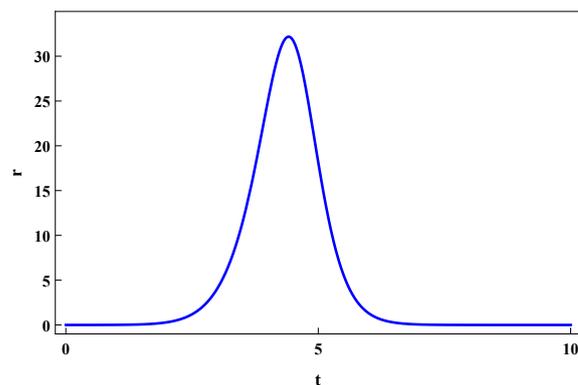


Figura 9 – Evolução da razão escalar-tensor para  $b_1 = 0,81$ ,  $b_2 = -0,8$  e  $b_3 = -3$

Utilizando  $t = 7,85$ , o valor numérico da equação (4.27) é  $r \rightarrow 0,003621$ , estando de acordo com o valor experimental de  $r$ .

O índice espectral  $n_s$  para o exemplo utilizado, torna-se

$$\begin{aligned}
n_s = & 1 + (2(-3b_1^2(-1 + \tanh(b_3 + b_1t))^2(-3b_2 + b_1 \tanh(b_3 + b_1t) \\
& (-5 + 2\xi + \tanh(b_3 + b_1t)^2))^2 + \frac{2}{3}b_1(-6b_2 \tanh(b_3 + b_1t) \\
& + b_1(5 - 2\xi + 6(-3 + \xi) \tanh(b_3 + b_1t)^2 + 5 \tanh(b_3 + b_1t)^4)) \\
& (9b_2^2 - 6b_1b_2 \tanh(b_3 + b_1t)(-3 + \tanh(b_3 + b_1t)^2 \\
& + b_1^2(-3 + 15 \tanh(b_3 + b_1t)^2 - 9 \tanh(b_3 + b_1t)^4 \\
& + \tanh(b_3 + b_1t)^6 + 3\xi(-1 + \tanh(b_3 + b_1t)^2)^2)))/ \\
& (b_1^2(-1 + \xi)(-1 + \tanh(b_3 + b_1t)^2)^2 + 3(b_2 \\
& + b_1(\tanh(b_3 + b_1t) - \frac{1}{3} \tanh(b_3 + b_1t)^3))^2)^2. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

### 4.3 Análise Cosmológica

Na Figura 7, podemos analisar que o parâmetro de Hubble possui duas regiões com valores aproximadamente constantes e maiores que zero. Onde, em tempos remotos um valor “ $H_i$ ” é maior do que  $H$  em tempos futuros “ $H_0$ ”, conseqüentemente, o modelo revela duas eras inflacionárias. Na primeira era houve um rápido processo de expansão (durando até  $t \approx 2$ ) que após cessar evoluiu de forma contínua até a segunda fase inflacionária dominada pela energia escura.

O parâmetro da Equação de estado, figura 8, também descreve duas eras inflacionárias diferentes ( $\omega \approx -1$ ) separadas por uma transição contínua cujo pico é em  $\omega \approx \frac{1}{3}$  (era da radiação). Em  $\omega \approx 0$  temos a representação da era denominada pela matéria.

A evolução da razão escalar-tensor entre as duas eras inflacionárias pode ser vista analisando a Figura 9. Para  $t > 5$ ,  $r$  aproxima-se de zero, corroborando com a descrição da atual fase inflacionária do Universo dominada pela energia escura. Como vimos, em  $t = 7,85$ ,  $r \rightarrow 0,003621$  sendo coerente com os dados do satélite Planck.

Dos parâmetros considerados, o único que depende do termo de quebra  $\xi$  é o  $n_s$ . Fazendo  $\xi = 0,5155$  na equação (4.28), obtemos que  $n_s \rightarrow 0,96652$ , mostrando a compatibilidade com o dado experimental para este parâmetro. Para  $\xi = 0$ , ou seja, na ausência do termo de quebra se simetria, este parâmetro resultaria em  $n_s \rightarrow -25,527$ . Estes resultados mostram a importância do termo que representa a quebra de simetria de Lorentz, pois é através deste termo que conseguimos obter um valor aceitável para o índice espectral  $n_s$ .



## 5 Conclusões e Perspectivas

No capítulo 2, fizemos uma revisão sobre Teorias para um campo escalar real. Vimos que através do método BPS é possível obter soluções para as equações de movimento de segunda ordem a partir de equações de primeira ordem. Com este método, foi mostrado que a energia mínima do sistema não depende das características locais da solução, mas sim do comportamento do campo nos extremos. Em seguida, vimos que a carga topológica  $Q_T$  é responsável por caracterizar os defeitos como topológicos (com  $Q_T \neq 0$ ) ou não topológicos (quando  $Q_T = 0$ ). Foi feita uma breve análise do comportamento de defeitos do tipo Kink (um exemplo de defeito topológico) e Lump (exemplo de defeito não topológico). Finalizamos o referido capítulo falando um pouco sobre a Estabilidade Linear, responsável por estudar a estabilidade das soluções de equações de movimento.

No capítulo 3, discutimos um pouco sobre a Cosmologia Padrão, introduzindo as equações de campo da Relatividade Geral. Em seguida, aplicamos a métrica FLRW nas equações de campo de Einstein com a finalidade de obter as componentes do tensor de Ricci e também o escalar de Ricci. Através destes resultados, juntamente com a inserção do Tensor Energia-Momento, encontramos as Equações de Friedmann, que representam a taxa de expansão acelerada do Universo em função da pressão e da densidade. Concluimos o capítulo introduzindo o Formalismo de Primeira Ordem.

No capítulo 4, estabelecemos o Formalismo de Primeira Ordem para encontrar modelos analíticos de 1 campo, que descrevam a atual fase do Universo, sem a necessidade de utilizar uma aproximação de Slow-roll (Rolagem Lenta). Observamos que a quebra de simetria de Lorentz é de extrema importância para resgatar a abordagem de modelos compostos por 1 campo escalar acoplado com gravidade. Este resultado corrobora com a abordagem vista no trabalho [26] e generaliza os resultados do brilhante trabalho de Ellis, et al [42].

Podemos aplicar este formalismo em sistemas onde há quebra de simetria de Lorentz em termos de altas ordens derivativas [43]. Também podemos construir modelos compostos por mais de 1 campo escalar com termo de quebra de simetria de Lorentz [44]. Outra possibilidade de aplicação dessas técnicas é em cenários com dimensões extras, tais como mundos brana [45]. Por fim, poderíamos, também, aplicar este formalismo em teorias de gravitação generalizada [41].



# Apêndices



# Apêndice A

## Equações de Friedmann

O símbolo de Christoffel é dado por:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} [g_{ki;j} + g_{jk;i} - g_{ij;k}]. \quad (1)$$

Podemos observar que os símbolos de Christoffel não nulos serão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} [g_{01;1} + g_{10;1} - g_{11;0}] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d}{dt} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \right] = \frac{a(t)}{1-kr^2} \dot{a}; \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} [g_{02;2} + g_{20;2} - g_{22;0}] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d}{dt} -a^2 r^2 \right] = r^2 a(t) \dot{a}; \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} [g_{03;3} + g_{30;3} - g_{33;0}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \sin^2 \theta r^2 a(t) \dot{a}; \\ \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} [g_{10;1} + g_{11;0} - g_{01;1}] = \frac{1}{2} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \left[ \frac{d}{dt} \frac{-a^2}{1-kr^2} \right] = \frac{\dot{a}}{a(t)}; \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} [g_{11;1} + g_{11;1} - g_{11;1}] = \frac{-1}{2} \frac{1-kr^2}{a^2} \left[ \frac{d}{dr} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \right] = \frac{kr}{(1-kr^2)}; \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} [g_{12;2} + g_{21;2} - g_{22;1}] = \frac{-1}{2} \frac{(1-kr^2)}{a^2} \left[ \frac{d}{dr} (a^2 r^2) \right] = -r(1-kr^2); \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} [g_{13;3} + g_{31;3} - g_{33;1}] = \frac{1}{2} \frac{(1-kr^2)}{a^2} \left[ \frac{d}{dr} (-a^2 r^2 \sin^2 \theta) \right] = -r \sin^2 \theta (1-kr^2); \\ \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} [g_{20;2} + g_{22;0} - g_{02;2}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2} \left[ \frac{d}{dt} (-a^2 r^2) \right] = \frac{\dot{a}}{a(t)}; \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} [g_{21;2} + g_{22;1} - g_{12;2}] = \frac{-1}{2} (-a^2 r^2) \left[ \frac{d}{dr} a^2 r^2 \right] = \frac{1}{r}; \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} [g_{23;3} + g_{32;3} - g_{33;2}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2} \left[ \frac{d}{d\theta} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} [g_{30;3} + g_{33;0} - g_{03;3}] = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{d}{dt} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{\dot{a}}{a}; \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} [g_{31;3} + g_{33;1} - g_{13;3}] = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{d}{dr} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{1}{r}; \\ \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} [g_{32;3} + g_{33;2} - g_{23;3}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{d}{d\theta} a^2 \sin^2 \theta r^2 \right] = \cot \theta. \end{aligned}$$

Conforme vimos no livro [19], o tensor de Ricci pode ser escrito da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha. \quad (2)$$

Precisamos calcular os tensores de Ricci para cada coordenada da métrica FLRW. Então, para a componente temporal, ou seja,  $R_{00}$ , teremos:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha \\ &\quad - \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{00}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{01}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^2 \Gamma_{02}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^3 \Gamma_{03}^\alpha, \\ &= -\frac{d}{dt} [\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3] - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3, \\ &= -\frac{d}{dt} [\dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1}] - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{-3}{a^2} (\ddot{a}a - \dot{a}^2) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{-3\ddot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (3)$$

Para  $R_{11}$ :

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \partial_1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha \\ &\quad - \Gamma_{1\alpha}^0 \Gamma_{10}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^2 \Gamma_{12}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^3 \Gamma_{13}^\alpha, \\ &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 \\ &\quad + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \\ &\quad - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3, \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)} \right] - \frac{d}{dr} \frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \frac{1}{r} + \frac{kr}{1-kr^2} \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] \\ &\quad - \frac{2\dot{a}}{a} \left[ \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right] - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\ &= \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{2k}{1-kr^2} - \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\ &= \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Para  $R_{22}$ :

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha \\
&\quad - \Gamma_{2\alpha}^0 \Gamma_{20}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^1 \Gamma_{21}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^3 \Gamma_{23}^\alpha, \\
&= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 \\
&\quad + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^1 \\
&\quad - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3, \\
&= \frac{d}{dt}(r^2 a \dot{a}) + \frac{d}{dr}[-r(1 - kr^2)] - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{d}{d\theta}(\cot \theta) \\
&\quad + a \dot{a} r^2 \left(\frac{2\dot{a}}{a}\right) - r(1 - kr^2) \times \left[\frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{1}{r}\right] \\
&\quad - \frac{\dot{a}}{a} r^2 a \dot{a} - \cot^2 \theta + \frac{\dot{a}}{a} a \dot{a} r^2 + \frac{1}{r}[r(1 - kr^2)], \\
&= r^2(a\ddot{a} + \dot{a}^2) - 1 + 3kr^2 + \cos^2 \theta + 2\dot{a}r^2 - kr^2 - 1 \\
&\quad + kr^2 - \dot{a}^2 r^2 - \cot^2 \theta + \dot{a}^2 r^2 + 1 - kr^2, \\
&= r^2(a\ddot{a} + 2k + 2\dot{a}^2). \tag{5}
\end{aligned}$$

Para  $R_{33}$ :

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha \\
&\quad - \Gamma_{3\alpha}^0 \Gamma_{30}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^1 \Gamma_{31}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^2 \Gamma_{32}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^3 \Gamma_{33}^\alpha, \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 \\
&\quad + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 + \\
&\quad \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1, \\
&= \frac{d}{dr}(a \dot{a} \sin^2 \theta r^2) + \frac{d}{dr}[-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] + \frac{d}{d\theta}(-\sin \theta \cos \theta) \\
&\quad + \frac{2\dot{a}}{a}(\sin^2 \theta r^2 a \dot{a}) - \sin^2 \theta r(1 + kr^2) \left[\frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{1}{r}\right] \\
&\quad - (-\sin \theta \cos \theta \cot \theta) - \sin^2 \theta r^2 a \dot{a} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{r} r \sin^2 \theta (1 - kr^2), \\
&= r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2 \theta (1 - 3kr^2) - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\
&\quad + 2\dot{a}r^2 \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta (1 - kr^2) - \sin^2 \theta r^2 \dot{a}^2 + \\
&\quad + \sin^2 \theta (1 - kr^2) + \cos^2 \theta, \\
&= \sin^2 \theta r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2 \theta + 3kr^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\
&\quad - kr^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta, \\
&= \sin^2 \theta r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \tag{6}
\end{aligned}$$



# Apêndice B

## Relatividade Geral

Demonstração:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\delta\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (7)$$

Partindo de uma matriz qualquer:

$$Tr(\log M) = \log(\det M). \quad (8)$$

Aplicando o princípio variacional, teremos:

$$\delta Tr\left(\frac{1}{M}\delta M\right) = \frac{1}{\det M}\delta(\delta M), \quad (9)$$

Assumindo  $Tr(M) = M_{ii}$ , vamos ter:

$$\left(M^{-1}\delta M\right)_{ij} = \sum_k (M_{ik}^{-1}\delta M_{kj}). \quad (10)$$

Reescrevendo a equação (9), obteremos:

$$Tr(M^{-1}\delta M)_{ii} = \sum_k (M_{ik}^{-1}\delta M_{ki}), \quad (11)$$

agora, definimos o seguinte vínculo:

$$Tr(M^{-1}\delta M) = \sum_i \sum_k (M^{-1})_{ik}\delta M_{ki}. \quad (12)$$

Assumindo que  $M = g^{\mu\nu}$ ,  $M^{-1} = g_{\mu\nu}$  e  $\det(M) = g$ , a equação (12) ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} &= g^{-1} \delta g, \\ \delta g &= g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{13}$$

Permitindo que a variação de  $\sqrt{-g}$  será escrita da seguinte maneira:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}},\tag{14}$$

podemos então obter uma expressão relacionando as equações (13) e (14) de modo a ficar:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.\tag{15}$$

# Apêndice C

## Tensor Energia-Momento

Utilizando a equação (3.8), temos que a componente temporal  $\mu\nu = 00$  é dada por:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= 2T_{00}, \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}\left[-6\left(\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}\right)\right] &= 2\rho, \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\ddot{a}a}{a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} &= 2\rho, \\ -\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}a}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \end{aligned}$$

E assim, chegamos a equação (3.23):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}.$$

Analisando, agora, as Equações (3.19) e (3.25), temos que:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{2k}{a^2}\right)g_{ii} + 3\left(\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}\right)g_{ii} &= -2pg_{ii}, \\ \frac{-a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 - 2k + 3a\ddot{a} + 3\dot{a}^2 + 3k}{a^2} &= -2p, \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} &= -2p, \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= -2p, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{3p}{3} - \frac{1}{3}\rho, \end{aligned}$$

Dessa forma, chegamos a Equação (3.26):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(3p + \rho).$$

Derivando a Equação (3.24), teremos:

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \\
2H\dot{H} &= \frac{2}{3}\dot{\rho} + 2ka^{-3}\dot{a}, \\
H\dot{H} &= \frac{\dot{\rho}}{3} + \frac{k}{a^2}H, \\
\dot{H} &= \frac{\dot{\rho}}{3H} + \frac{k}{a^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Como já vimos,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ . Derivando esta expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\dot{a}}{a}, \\
\dot{H} &= \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= \dot{H} + H^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Ao substituírmos (16), (3.24) e (3.26) em (17), teremos:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}(3p + \rho) &= \frac{\dot{\rho}}{3H} + \frac{k}{a^2} + \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \\
p + \frac{\rho}{3} + \frac{\dot{\rho}}{3H} + \frac{2}{3}\rho &= 0, \\
\frac{\dot{\rho}}{3H} + p + \rho &= 0, \\
\dot{\rho} + 3H(p + \rho) &= 0.
\end{aligned}$$

E assim mostramos como chegar a equação (3.27).

# Referências

- 1 O'RAIFEARTAIGH, C. et al. Einstein's 1917 static model of the universe: a centennial review. *The European Physical Journal H*, Springer, v. 42, n. 3, p. 431–474, 2017. Citado na página 15.
- 2 FONSECA, A. F. da. *Um Ensaio sobre Matéria e Energia*. [S.l.]: FidelidadESPÍRITA, 2010. Citado na página 15.
- 3 KAGANOVICH, A. Field theory model giving rise to “quintessential inflation” without the cosmological constant and other fine-tuning problems. *Physical Review D*, APS, v. 63, n. 2, p. 025022, 2000. Citado na página 15.
- 4 BERTOLAMI, O. The cosmological constant problem: a user's guide. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 18, n. 14, p. 2303–2310, 2009. Citado na página 16.
- 5 LAHAV, O.; LIDDLE, A. R. The cosmological parameters 2010. *arXiv preprint arXiv:1002.3488*, 2010. Citado na página 16.
- 6 BOGOMOL'NYI, E. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys. (Engl. Transl.); (United States)*, LD Landau Theoretical Physics Institute, USSR Academy of Sciences, Moscow, v. 24, n. 4, 1976. Citado na página 20.
- 7 PRASAD, M.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the't hooft monopole and the julia-zee dyon. *Physical Review Letters*, APS, v. 35, n. 12, p. 760, 1975. Citado na página 20.
- 8 NETA, V.; CÂMARA, D. et al. Defeitos e modelos de quintessência. Universidade Federal de Campina Grande, 2016. Citado na página 20.
- 9 BAZEIA, D. Topological solitons in a vacuumless system. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 6, p. 067705, 1999. Citado na página 21.
- 10 NASCIMENTO, T. F. d. et al. Métodos perturbativos para obtenção de aproximações analíticas em modelos de campos escalares. Universidade Federal da Paraíba, 2012. Citado na página 22.
- 11 JUNIOR, S. et al. Estudo de modelos de campos escalares. Universidade Federal da Paraíba, 2010. Citado na página 22.
- 12 BAZEIA, D. *Defect structures in field theory*. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 24.
- 13 FILHO, D. B. *Campos escalares em ação*. [S.l.: s.n.], 2004. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- 14 RAJARAMAN, R. *Solitons and Instantons*. Amsterdam, NY. [S.l.]: Oxford: North-Holland Publ. Comp, 1982. Citado na página 24.
- 15 INFELD, L.; HULL, T. The factorization method. *Reviews of modern Physics*, APS, v. 23, n. 1, p. 21, 1951. Citado na página 25.

- 16 MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics. Philip M. Morse, ... Herman Feshbach, ...* [S.l.]: Mc Graw-Hill Book C, 1953. Citado na página 25.
- 17 WAGA, I. 100 years of cosmology and new challenges for the 21st century. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 27, n. 1, p. 157–173, 2005. Citado na página 29.
- 18 CARROLL, S. M. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997. Citado na página 32.
- 19 DAS, A. *Lectures on gravitation*. [S.l.]: World scientific, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 51.
- 20 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. [S.l.]: Massachusetts Institute of Technology, 1972. Citado na página 32.
- 21 BAZEIA, D.; LOSANO, L.; SANTOS, J. Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 25-27, p. 1615–1620, 2013. Citado na página 36.
- 22 BAZEIA, D. et al. First-order formalism and dark energy. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 633, n. 4-5, p. 415–419, 2006. Citado na página 36.
- 23 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999. Citado na página 39.
- 24 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Citado na página 39.
- 25 JÚNIOR, J. V. da C. *Energia Escura: Origem, Candidatos e Vínculos Observacionais*. Tese (Doutorado) — Tese de doutorado, UFRN, 2006. Citado na página 39.
- 26 ALMEIDA, C. et al. Cosmology in the universe with distance dependent lorentz-violating background. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi, v. 2017, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 47.
- 27 ARMENDARIZ-PICON, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V.-i. k-inflation. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 458, n. 2-3, p. 209–218, 1999. Citado na página 39.
- 28 CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 8, p. 1582, 1998. Citado na página 39.
- 29 ZLATEV, I.; WANG, L.; STEINHARDT, P. J. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 5, p. 896, 1999. Citado na página 39.
- 30 LI, X.-Z.; HAO, J.-G.; LIU, D.-J. Quintessence with o (n) symmetry. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 19, n. 23, p. 6049, 2002. Citado na página 39.
- 31 LIMA, J. A. S. de. Cosmologia, quintessência e aceleração do universo. *Revista USP*, n. 62, p. 134–147, 2004. Citado na página 39.

- 32 BAXTER, E. et al. Dark energy survey year 1 results: Methodology and projections for joint analysis of galaxy clustering, galaxy lensing, and cmb lensing two-point functions. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 2, p. 023508, 2019. Citado na página 40.
- 33 AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv preprint arXiv:1807.06209*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.
- 34 MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado na página 40.
- 35 GASPERINI, M. Inflation and broken lorentz symmetry in the very early universe. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 163, n. 1-4, p. 84–86, 1985. Citado na página 40.
- 36 DONNELLY, W.; JACOBSON, T. Coupling the inflaton to an expanding aether. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 6, p. 064032, 2010. Citado na página 40.
- 37 BLAS, D.; SIBIRYAKOV, S. Technically natural dark energy from lorentz breaking. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2011, n. 07, p. 026, 2011. Citado na página 40.
- 38 AUDREN, B. et al. Cosmological constraints on lorentz violating dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2013, n. 08, p. 039, 2013. Citado na página 40.
- 39 SANTOS, J.; MORAES, P. Cosmology from a running vacuum model driven by a scalar field. *arXiv preprint arXiv:1806.07493*, 2018. Citado na página 43.
- 40 BAZEIA, D. et al. Construction of new scalar field models from the standard  $\phi^4$  theory. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 87, n. 4, p. 045101, 2013. Citado na página 43.
- 41 MORAES, P.; SANTOS, J. A complete cosmological scenario from  $f(r, t)$  gravity theory. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, n. 2, p. 60, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 47.
- 42 ELLIS, J.; FAIRBAIRN, M.; SUEIRO, M. Rescuing quadratic inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 02, p. 044, 2014. Citado na página 47.
- 43 PASSOS, E. et al. Soliton solutions in two-dimensional lorentz-violating higher derivative scalar theory. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 396, p. 351–370, 2018. Citado na página 47.
- 44 MORAES, P.; SANTOS, J. Two scalar field cosmology from coupled one-field models. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 8, p. 083516, 2014. Citado na página 47.
- 45 BAZEIA, D.; GOMES, A. R. Bloch brane. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2004, n. 05, p. 012, 2004. Citado na página 47.