



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Maria Girlandia de Sousa

Espalhamento fóton-fóton em colisões de íons pesados e a quebra da simetria de Lorentz

Campina Grande, Paraíba, Brasil

Agosto de 2019

Maria Girlandia de Sousa

**Espalhamento fóton-fóton em colisões de íons pesados e
a quebra da simetria de Lorentz**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, e co-orientação do Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Campina Grande, Paraíba, Brasil

Agosto de 2019

S725e Sousa, Maria Girlandia de.
Espalhamento fóton-fóton em colisões de íons pesados e a quebra da simetria de Lorentz / Maria Girlandia de Sousa. – Campina Grande, 2019.
70 f.: il. : color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".
Referências.

1. Física de Partículas. 2. Espalhamento Fóton-Fóton. 3. Colisões de Íons Pesados. 4. Lagrangeana Estendida da QED. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. III. Título.

CDU 539.122(043)

MARIA GIRLANDIA DE SOUSA


**ESPALHAMENTO FÓTON-FÓTON EM COLISÕES DE ÍONS PESADOS
E A QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ**

Dissertação aprovada em 06/08/2019

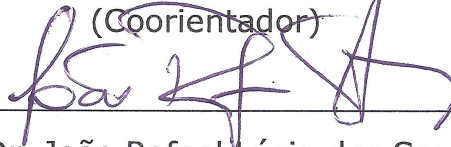
BANCA EXAMINADORA



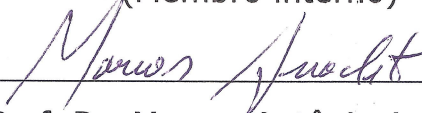
Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Presidente)



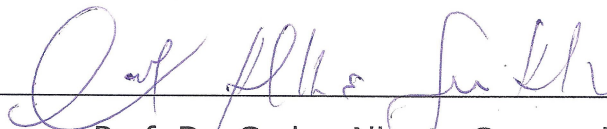
Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Coorientador)



Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Membro interno)



Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Membro interno)



Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida
Departamento de Ciências Exatas - UFPB
(Membro externo)

A todos os curiosos que buscam conhecimentos, inclusive você por lê esse trabalho.

Agradecimentos

- Ao Prof. Francisco de Assis de Brito, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- Ao Prof. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos pela grata colaboração durante sua coorientação.
- A Rafaela Laranjeira pela amizade e por me auxiliar com o Latex.
- Aos colegas de pós-graduação, Rafaela, Joeslei, Thaís, Romário, Ronaldo, Júlio, Izabelle, Felipe e Caroline, e aos funcionários da Unidade Acadêmica de Física, em especial ao Senhor Hélio, pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo.
- À CAPES pelo suporte financeiro.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão desse trabalho.

Resumo

Estudos recentes descobriram evidências experimentais para a dispersão da luz pela própria luz. Realizado no LHC, o experimento se deu por colisões ultra-periféricas de íons de chumbo pesado (Pb) - colisões em que a interação ocorre via fóton-íon e fóton-fóton. Para a análise desses processos, nos guiaremos por meio de processos básicos da QED tais como o espalhamento Bhabha, Compton, Möller e Coulomb. Nesse trabalho descrevemos estes e, especialmente, o processo de espalhamento fóton-fóton em colisões de íons pesados, a partir da Lagrangeana estendida da QED por quebra de simetria de Lorentz-CPT. Consideramos o regime em que as contribuições do parâmetro de violação de Lorentz entram linearmente nos propagadores.

Palavras-chave: Física de Partículas. Espalhamento Fóton-Fóton. Colisões de Íons Pesados. Lagrangeana Estendida da QED.

Abstract

Recent studies have found experimental evidence for the scattering of light by light itself. Performed at the LHC, the experiment was carried out by ultra-peripheral collisions of heavy lead ions (Pb) - collisions in which the interaction takes place via photon-ion and photon-photon. For the analysis of these processes will be guided by the basic processes of QED such as Bhabha, Compton, Möller and Coulomb scattering. Here we describe these and especially the photon-photon scattering process in heavy ion collisions, from QED extended by symmetry breaking of Lorentz-CPT. We consider the system in which the contributions of Lorentz violation parameter enter linearly in the propagators.

Keywords: Particle Physics. Photon-Photon scattering. Ion Collisions Heavy. QED Extended Lagrangean.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Regras de Feynman para a QED. Fonte: Ref.[15]. Adaptada pelo autor.	19
Figura 2 – Exemplos de diagramas de Feynman: a) digrama de um vértice, b) diagrama de dois vértices, c) diagrama de quatro vértices. Fonte: Ref. [16] - (a), (b); Ref. [8] - (c); Adaptada pelo autor.	20
Figura 3 – Diagrama de Feynman para o decaimento $A \rightarrow B + C$, com orientação temporal na horizontal para direita. Fonte: Ref. [17].	20
Figura 4 – Diagrama de Feynman para o decaimento $A + B \rightarrow C + D$, com orientação temporal na vertical para cima. Fonte: Ref. [17].	21
Figura 5 – Contribuições para o espalhamento $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$. Fonte: Ref, [16].	22
Figura 6 – Seção de choque diferencial em termos do $\cos\theta$. Fonte: Ref. [21]	26
Figura 7 – Seção de choque total em termos da energia de centro de massa \sqrt{s} . Fonte: Ref. [21].	26
Figura 8 – Diagramas de Feynman para o espalhamento Compton ($e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$). Fonte: Ref. [19].	27
Figura 9 – Quadro de centro de massa para o cálculo da seção de choque, em termos de ω e θ . Fonte: Ref. [20].	28
Figura 10 – Diagramas para a aniquilação por par $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$. Fonte: Ref. [20].	29
Figura 11 – Diagramas para o espalhamento Möller ($e^- e^- \rightarrow e^- e^-$). Fonte: Ref. [18].	30
Figura 12 – Espalhamento Coulomb. Fonte: Ref. [23].	31
Figura 13 – Diagramas de Feynman para o espalhamento fóton-fóton. Fonte: Ref. [24]. Adaptada pelo autor.	34
Figura 14 – Diagramas de Feynman para o espalhamento fóton-fóton com quebra de simetria. A presença do parâmetro violador de Lorentz modifica os propagadores com a “inserção” representada pela marca vermelha em (a), (b), (c) e (d).	39
Figura 15 – Diagrama de Feynman para o espalhamento fóton-fóton em colisões de íons pesados. O X marca dois campos eletromagnéticos externos formados pelos íons pesados, em cada diagrama.	43
Figura 16 – $\sqrt{s_{NN}}$ é a energia de centro de massa de núcleo-núcleo, $L_{AB} \cdot \Delta t$, é a luminosidade integrada, γ é o fator de Lorentz, R_A é o raio efetivo, ω_{max} é a energia de centro de massa máximo no quadro do fóton, $\sqrt{s_{\gamma\gamma}^{max}}$ é a energia e centro de massa máximo para o quadro fóton-fóton, $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma}^{excl}$ seção de choque para massa invariante maior que $5 GeV$, $N_{\gamma\gamma}^{excl}$ (por par) expectativa de sinal. Ver Ref. [7].	45

Figura 17 – Plote do lado esquerdo mostra as seções de choque transversais para fóton-fóton com massa de um par de fótons $m_{\gamma\gamma} > 5 GeV$ para as colisões ultraperiféricas de chumbo-chumbo, próton-chumbo e próton-próton, em função da energia de centro de massa por par de núcleo-núcleo. No lado direito rendimento de fótons em função da massa invariante para o espalhamento elástico de fótons, esperados em colisões de chumbo-chumbo de $1nb^{-1}$ em uma energia de centro de massa $\sqrt{s_{NN}} = 5.5 TeV$. Ver Ref. [7].	45
Figura 18 – Distribuição de energia pelo número de eventos. a) Acoplamento de fótons no valor $Aco < 0.01$. b) Massa invariante de dois fótons no acoplamento $Aco < 0.01$. Os valores são comparados com as previsões de Monte Carlos MC. Ver Ref. [8]	46
Figura 19 – a) Eficiência de reconstrução de fótons transversal reconstruída da interação $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$. b) Eficiência de fóton como função da energia transversal de fóton. c) Eficiência de identificação da partícula fóton em função da energia transversal de fóton. Ver Ref. [10]	46

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	ESPALHAMENTOS BÁSICOS DA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA	19
2.1	Modelos básicos de espalhamentos da QED	19
2.1.1	Espalhamento Bhabha	22
2.1.2	Espalhamento Compton	26
2.1.3	Espalhamento de aniquilação por par	29
2.1.4	Espalhamento Möller	30
2.1.5	Espalhamento Coulomb	31
3	ESPALHAMENTO FÓTON-FÓTON	33
3.1	Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$	33
3.2	Espalhamento fóton-fóton sem quebra das simetrias de invariância de Lorentz	33
3.2.1	Espalhamento fóton-fóton por quebra de simetria de invariância de Lorentz	38
3.2.2	Espalhamento Fóton-Fóton em colisões de íons pesados e a quebra de simetria de Lorentz	43
4	CONCLUSÕES	47
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICES	53
	APÊNDICE A – MATERIAL SUPLEMENTAR PARA O CAPÍTULO	
	2	55
A.1	Propriedades e teorema do traço	55
A.2	Propriedades das matrizes gama	55
A.3	Relações de completeza	56
A.4	Relações dos produtos dos espinores	56
A.5	Variáveis de Mandelstam	56
A.6	Produto escalar dos momentos com valores para o centro de massa	57
A.7	Integral de espaço de fase	57
A.8	Cálculo para o campo de Coulomb A_μ	59

APÊNDICE B – MATERIAL SUPLEMENTAR PARA O CAPÍTULO

	3	61
B.1	Cálculo das integrais de Feynman	61
B.1.1	Cálculo das integrais para o espalhamento fóton-fóton sem a quebra de invariância de Lorentz	61
B.1.2	Cálculo das integrais para o espalhamento fóton-fóton com a quebra de invariância de Lorentz	65
B.2	Técnicas de regularização para a QED	67
B.2.1	Regularização Dimensional	67
B.2.2	Regularização Implícita	68
B.2.3	Integração Simétrica	70

1 Introdução

Os estudos sobre polarização da luz no vácuo, o chamado espalhamento fóton-fóton ($\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$), vem chamando atenção dos pesquisadores de Física de Partículas, tanto pelas possibilidades de conhecer, cada vez mais, a dinâmica das partículas, em ordens de baixas e altas energia, quanto pelas descobertas que podem explicar teorias de partículas e campos.

Cronologicamente, como mencionado na referência [1], Halpern, em 1933 [2], e Heisenberg [3], em 1934, supuseram estudar teoricamente, fenômenos da luz em efeitos quânticos (luz polarizada no vácuo). Posteriormente, em 1935 Euler e Kockel [4] calcularam o processo para limite de baixa frequência, em 1936 Heisenberg e Euler [5] derivaram a expressão mais geral da lagrangeana não linear da Eletrodinâmica Quântica (QED), em 1951 Karplus e Neuman [6] publicaram o cálculo completo para o espalhamento Luz-por-Luz, Bor e Infeld propôs uma modificação da Lagrangeana da QED, em 2012 d'Enterrria e Silveira [7] propôs um estudo usando colisões de íons pesados no LHC, e em 2017 foi publicado o resultado da primeira evidência experimental, do espalhamento da Luz-por-Luz, descrito em [8].

O espalhamento fóton-fóton - popularmente chamado, Luz-por-Luz - descreve o fenômeno em que fótons reais em um vácuo polarizado geram fótons reais espalhados. Para descrever este processo, não é tão simples como os demais processos básicos da Eletrodinâmica Quântica (QED). O cálculo da amplitude de espalhamento é de alta ordem, em termos da constante de estrutura fina - que mede a intensidade de interação eletromagnética - isso devido, trabalharmos com quatro vértices para cada diagrama de Feynman que contribuem para a amplitude total, o que geram dificuldades em realizar os cálculos. Porém, é obtida uma amplitude total para esse espalhamento e conseqüentemente a seção de choque, o que comprova a interação da luz pela própria luz em um vácuo polarizado.

Em síntese, o estudo sobre a luz induzir própria luz, em um vácuo polarizado, é uma teoria que, há mais de 80 anos, vêm sendo estudada. Alguns físicos, adeptos a esses estudos, dedicaram-se a entender e descrever este fenômeno, e produziram vários trabalhos científicos, desde os estudos teóricos à experimentação, obtida com êxito em colisões ultraperiféricas de íons pesados de chumbo (Pb-Pb). Os resultados divulgados a partir de 2017 [8-10], tem contribuído, seja em revisar, ou incluir novos termos na teoria e analisar os resultados que podem ser refutados ou acrescentado às novas teorias.

Vários artigos estão sendo produzidos direcionados a descrever, de forma mais aproximada possível, os efeitos para ordens de altas energias. O artigo da referência [8], mostra todo o processo, detalhando o valor da energia de centro de massa igual a 5.02

TeV, por par de núcleos de chumbo, usando o detector ATLAS e obteve uma energia transversal (energia de centro de massa) de fótons igual a 3 GeV, e uma seção de choque para valor $70 \pm 24(\text{entrada}) \pm 17(\text{saída})\text{nb}$. O tipo de colisão foi inelástica, para o caso elástico temos que a constante de estrutura fina é de quarta ordem, o que torna um valor da ordem $O(\alpha^4 \approx 3 \times 10^9)$.

Em análise a alguns artigos sobre a modificação da lagrangeana para a descrição do espalhamento fóton-fóton, a maioria dos resultados na literatura, abordam a violação de Lorentz na QED minimamente estendida. Alguns dos resultados consideram fontes de alta energia para sondar a existência da violação de simetria de Lorentz [11-14], tanto em objetos astrofísicos como também no LHC (Large Hadron Collider). Isto nos motivou a desenvolver um estudo, abordando o espalhamento de Fóton-Fóton no processo de colisão com íons pesados, a partir da lagrangeana estendida da QED por quebra de simetria de Lorentz, em prol de analisar esse processo e contribuir com novas informações e aplicações na área.

Para explicitar as informações sobre esse estudo, consideramos, desde os processos básicos de espalhamentos da QED aos mais complexos. Então, o desenvolvimento dessa dissertação, apresenta-se em quatro partes, o capítulo 2 consta-se uma revisão das regras de Feynman para os espalhamentos: Bhabha, Compton, Aniquilação por par, Möller, e Coulomb. No capítulo 3 apresenta-se a descrição do espalhamento fóton-fóton, a partir da lagrangeana com e sem o termo da quebra de simetria, e também incluindo colisões de íons pesados. E por último, as análises, perspectivas e conclusões, abordam especificamente as contribuições presentes e futuras.

2 Espalhamentos básicos da Eletrodinâmica Quântica

Neste capítulo, apresenta-se uma breve introdução das regras de Feynman e de alguns modelos básicos para espalhamentos de partículas da Eletrodinâmica Quântica (QED). O intuito deste, é mostrar os processos básicos de espalhamentos para no próximo capítulo descrever especificamente o espalhamento fóton-fóton ($\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$).

2.1 Modelos básicos de espalhamentos da QED

Chama-se de modelos da QED, teorias que descrevem os processos de espalhamentos de partículas eletricamente carregadas. Para analisar esses modelos, faz-se uso de um conjunto de regras - chamadas de regras de Feynman - derivadas diretamente da Teoria Quântica de Campos, como mencionado em [15].

Essas regras são ferramentas necessárias para calcular os elementos de matriz, amplitude e seção de choque para cada espalhamento, e assim, obter o máximo possível de informações sobre a dinâmica das partículas de um dado processo.

Resumidamente, essas regras servem para ilustrações e leituras de diagramas representativos dos processos de espalhamentos da QED. Os principais elementos que as compõem são linhas sólidas orientadas, que representam os férmions (a orientação serve para diferenciar partículas de antipartículas), e linhas onduladas, que representam os fótons. Para cada interação de partículas, existe um diagrama correspondente e para interpretá-lo, considera-se as informações da Figura (1).










initial-state particle:	$u(p)$	
final-state particle:	$\bar{u}(p)$	
initial-state antiparticle:	$\bar{v}(p)$	
final-state antiparticle:	$v(p)$	
initial-state photon:	$\varepsilon_\mu(p)$	
final-state photon:	$\varepsilon_\mu^*(p)$	
photon propagator:	$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$	
fermion propagator:	$-\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$	
QED vertex:	$-iQe\gamma^\mu$	

Figura 1 – Regras de Feynman para a QED. Fonte: Ref.[15]. Adaptada pelo autor.

A multiplicação de todos esses elementos nos dá a amplitude de espalhamento

(M) para baixa ordem. Quando tem-se duas linhas sólidas e uma ondulada formando um vértice, tem-se também uma constante multiplicativa, a constante de estrutura fina ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$) - uma grandeza que corresponde à ordem de interação entre as partículas eletricamente carregadas.

Na Figura (2), tem-se três exemplos da aplicação dessas regras, onde em: a) um par elétron-pósitron aniquilam e emite um fóton; b) um par elétron-fóton emite um elétron virtual, e este, produz um par elétron-fóton; c) um par de fótons emite pares de elétrons-pósitrons virtuais e estes produzem um par de fótons. A referência temporal, para leitura dos diagramas, pode ser na orientação inferior para superior, ou da esquerda para a direita. É importante saber, também, que as linhas externas dos diagramas representam sempre partículas reais, e as linhas internas, as partículas virtuais.

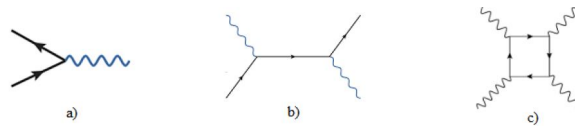


Figura 2 – Exemplos de diagramas de Feynman: a) digrama de um vértice, b) diagrama de dois vértices, c) diagrama de quatro vértices. Fonte: Ref. [16] - (a), (b); Ref. [8] - (c); Adaptada pelo autor.

Em síntese, nos diagramas de Feynman, observa-se que a análise é feita através das partículas incidentes num estado inicial, que ao interagirem, há transferência de energia-momento, resultando nas partículas do estado final e espalhadas.

Consta-se na Figura (3) mais um exemplos da aplicação das regras de Feynman, onde uma partícula qualquer, num estado inicial, decai em duas partículas gerando um estado final, ($A \rightarrow B + C$), com referência temporal na horizontal.

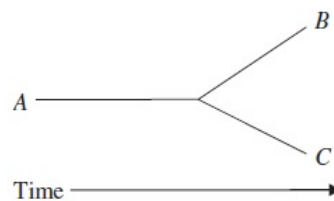


Figura 3 – Diagrama de Feynman para o decaimento $A \rightarrow B + C$, com orientação temporal na horizontal para direita. Fonte: Ref. [17].

Outro exemplo é mostrado na Figura (4), que corresponde o processo de decaimento de duas partículas quaisquer em outras duas ($A + B \rightarrow C + D$), com referência temporal na vertical. Esse processo pode ser escrito em termos de simetria de cruzamento, isto é, ($A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$), em que troca-se B por \bar{C} , e C por \bar{B} , o que é chamado na Ref. [17] de regra de substituição. Isso é útil, por exemplo, para calcular um processo a partir de

outro, como por exemplo, o o processo de aniquilação por par a partir do espalhamento Compton.

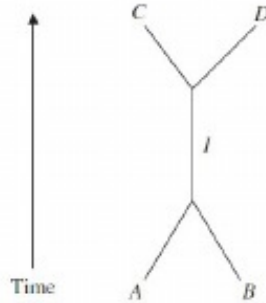


Figura 4 – Diagrama de Feynman para o decaimento $A + B \rightarrow C + D$, com orientação temporal na vertical para cima. Fonte: Ref. [17].

Para entender como calcular a matriz de espalhamento (S), seguimos os procedimentos da Ref. [17](p. 145-157), onde lista-se as seguintes relações, que comumente servem para qualquer processo de decaimento, dispersão ou outro sistema da QED que evolui no tempo:

I) $\langle f | S | i \rangle = S_{fi}$, onde a partir de um estado inicial $| i \rangle$ calcula-se os possíveis elementos da matriz para um estado final $\langle f |$, sendo S a matriz unitária que satisfaz a relação $S^\dagger S = S S^\dagger = I$, e S_{fi} é a amplitude de espalhamento de um estado inicial para um estado final específico, que contém os elementos da matriz.

Para calcular a amplitude de probabilidade de encontrar o elemento da matriz para um dado espalhamento, tem-se:

II) $P_{fi} = |\langle f | S | i \rangle|^2 = S_{fi} S_{fi}^*$, onde S_{fi}^* é a complexa conjugada.

Para processos de espalhamentos, por exemplo, que leva em consideração ao espaço dos momentos das partículas, pode-se relacionar, para um intervalo de limites:

III) $S_{fi} \propto -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) M_{fi}$, sendo M_{fi} uma amplitude de um dado processo, e $\delta^4(p_f - p_i)$ a função delta de Dirac, em termos dos momentos finais e iniciais.

Para calcular uma amplitude, usa-se uma função do tipo:

IV) $\int_{-\infty}^{\infty} f(p) \delta(p - p') dp = f(p')$, ou seja, faz a integração sobre todos os momentos das partículas internas.

Comumente, usa-se, em teorias de campos, a matriz de elementos na forma

$$\langle f | M | i \rangle = M_{fi}. \quad (2.1)$$

A partir dessas regras e relações, são descritos alguns dos processos básicos a seguir, usando a equação (2.1), substituindo f pelos momentos das partículas do estado final, e i pelos momentos das partículas do estado inicial.

As regras de Feynman, citadas nesse tópico, restringem-se às básicas, que usamos para descrever tais processos já mencionados. Porém, informações mais gerais, a respeito destas, podem ser encontradas nas referências [15 - 20].

2.1.1 Espalhamento Bhabha

O espalhamento Bhabha ($e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$) é um tipo de colisão elástica de partículas e descreve o espalhamento elétron-pósitron, que ao interagirem aniquilam-se emitindo um fóton virtual e este produz um par elétron-pósitron reais.

Na Figura (5) constam-se dois diagramas possíveis para este espalhamento. No diagrama a) temos a representação de duas partículas no estado inicial com momentos (p_1, p_2) , partícula de interação com momento $(p_1 + p_2)$ e as partículas finais com momentos (p_3, p_4) . No diagrama b) temos a troca de fóton entre elétron-pósitron, sem que haja contato direto, e este fóton produz um par elétron-pósitron. De acordo com [16] existem mais diagramas para o espalhamento Bhabha, porém os diagramas que contribuem para as amplitudes de baixa ordem, são estes. Para a leitura desses diagramas, consideramos a orientação na horizontal para a direita, indicada pelas setas dos momentos. Usando como referencia principal, para a descrição desse processo, o artigo Ref.[21].

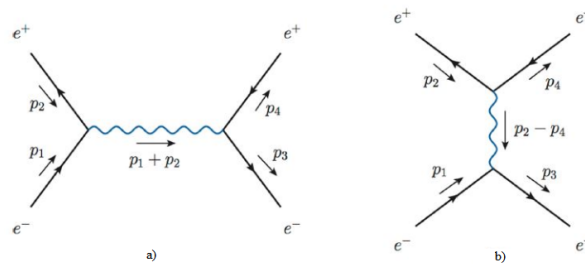


Figura 5 – Contribuições para o espalhamento $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$. Fonte: Ref, [16].

Para este espalhamento, temos duas contribuições para o cálculo da amplitude. Começando por definir a matriz (M), usando a equação (2.1) escrevemos

$$\langle p_3; p_4 | M | p_1; p_2 \rangle = M_{fi}, \quad (2.2)$$

onde $\langle p_3; p_4 |$ representa os estados de momento das partículas finais, $| p_1; p_2 \rangle$ os das partículas iniciais, e $| M_{fi} |$ é a amplitude do espalhamento.

Reescrevendo a equação (2.2) em termos dos espinores $(u; v)$ e espinores adjuntos $(\bar{u}; \bar{v})$ e das matrizes gama (γ^μ) , usando as informações da Figura (1), temos a matriz

$$M_{fi} = \langle \bar{u}(p_3); \bar{v}(p_4) | M | u(p_1); v(p_2) \rangle, \quad (2.3)$$

onde $(u; \bar{u})$ representa os elétrons, e (v, \bar{v}) os pósitrons.

Calculando, separadamente, os elementos da matriz, observando os diagramas da Figura (5), e usando as regras de Feynman, escrevemos para o primeiro diagrama

$$M_1 = -\frac{e^2}{p^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1)], \quad (2.4)$$

e a complexa conjugada

$$M_1^* = -\frac{e^2}{p^2} [\bar{v}(p_4) \gamma_\mu u(p_3)] [\bar{u}(p_1) \gamma^\mu v(p_2)]. \quad (2.5)$$

A amplitude de espalhamento, pode ser calculada através do valor médio quadrático, isto é, $\langle |M_1|^2 \rangle = \langle |M_1^* M_1| \rangle$. Multiplica a equação (2.4) pela (2.5),

$$\langle |M_1|^2 \rangle = \left| \frac{e^2}{p^2} [\bar{v}(p_4) \gamma_\mu u(p_3)] [\bar{u}(p_1) \gamma^\mu v(p_2)] \times \frac{e^2}{p^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1)] \right|. \quad (2.6)$$

Usa a relação de completeza, que são as relações dos espinores, equação (2.7) para os elétrons e a (2.8) para os pósitrons,

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \gamma^\mu p_\mu + mc, \quad (2.7)$$

$$\sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) = \gamma^\mu p_\mu - mc, \quad (2.8)$$

onde $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$, m é a massa das partículas, s aqui é a helicidade fermiônica.

Aplicando o teorema dos traços e as propriedades das matrizes gama, Apêndice (A.1) e (A.2), e as relações dos espinores normalizados, ($\bar{u}^1 u^1 = 2mc$, e $\bar{v}^1 v^1 = -2mc$, $\bar{u}^1 u^2 = 0$, e $\bar{v}^1 v^2 = 0$), com $c = 1$, obtém-se

$$\langle |M_1|^2 \rangle = 8 \frac{e^4}{p^4} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)], \quad (2.9)$$

onde, para o primeiro diagrama, $p = (p_1 + p_2)$.

Considerando as variáveis de Mandelstam, dadas pelas seguintes equações

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad (2.10)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad (2.11)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2, \quad (2.12)$$

onde para $s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = p_3^2 + p_4^2 + 2p_3p_4$, como $p_1^2 = p_3^2$ e $p_2^2 = p_4^2$, então, $2p_1p_2 = 2p_3p_4$ o que nos permite escrevermos $s = p_1p_2 = p_3p_4$ e de forma análoga, encontramos para $t = p_1p_3 = p_2p_4$, $u = p_1p_4 = p_3p_2$. Logo, rescrevemos (2.9) na forma

$$\langle |M_1|^2 \rangle = 8 \frac{e^4}{s^2} [t^2 + u^2], \quad (2.13)$$

onde s, t, u , são os canais de transmissão de momento-energia.

Observe que essa amplitude, dada pela equação (2.13), ocorre no canal s , o qual se refere a parte espacial do processo.

Para a segunda amplitude, escrevemos $\langle |M_2|^2 \rangle = \langle |M_2^* M_2| \rangle$, fazendo o processo semelhante ao anterior, mas referente à análise para o segundo diagrama, temos então

$$\langle |M_2|^2 \rangle = \left| \frac{e^2}{p^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\nu v(p_4)] \times \frac{e^2}{p^2} [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(p_3)] [\bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_2)] \right|. \quad (2.14)$$

Fazendo a multiplicação e considerando os traços das matrizes, obtemos

$$\langle |M_2|^2 \rangle = 8 \frac{e^4}{p^4} [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)], \quad (2.15)$$

neste caso $p = (p_2 - p_4)$, que de acordo com as variáveis de Mandelstam, rescrevemos (2.15) na forma

$$\langle |M_2|^2 \rangle = 8 \frac{e^4}{t^2} [u^2 + s^2]. \quad (2.16)$$

Observamos que essa amplitude ocorre no canal t (canal de tempo), como pode ser visto no segundo diagrama, Figura (5b).

Agora, calculamos os termos de interferência, isto é, $M_1 \cdot M_2^*$, logo substituindo os valores, temos

$$\begin{aligned} M_1 \cdot M_2^* &= \left(\frac{-e^2}{p^2} \right) [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(p_4)] \\ &\times \left(\frac{-e^2}{p^2} \right) [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(p_3)] [\bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_2)], \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde de acordo com o primeiro diagrama $p = (p_1 + p_2)$ e para o segundo $p = (p_2 - p_4)$ considerando as variáveis de Mandelstam, e a relação dos espinores, ver Apêndice (A.4), rescrevemos (2.17) na forma

$$M_1 \cdot M_2^* = \frac{e^4}{ts} \{ [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_4) \gamma_\mu v(p_2)] + [\bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p_3)] \}, \quad (2.18)$$

sendo t o canal de tempo, e s o canal espacial.

Para os quatros férmions, temos que a soma em termos das polarizações é

$$\sum_s \sum_s \sum_s \sum_s \frac{1}{4} |M_1 M_2^*| = \langle |M_1 M_2^*| \rangle. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.18) em (2.19), temos

$$\langle | M_1 M_2^* | \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^4}{ts} T_r [u(p_3) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4) \bar{v}(p_4) \gamma_\nu \times v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu]. \quad (2.20)$$

Utilizando as relações de completeza, e os traços das matrizes, ver Apêndices (A.1) e (A.2), temos a amplitude nos canais (ts)

$$\langle | M_1 M_2^* | \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^4}{ts} (-32) (p_1 \cdot p_4 \cdot p_3 \cdot p_2). \quad (2.21)$$

Utilizando as variáveis de Mandelstam, Apêndice (A.5), rescrevemos (2.21) na forma

$$\langle | M_1 M_2^* | \rangle = 2 \frac{e^4 u^2}{ts}. \quad (2.22)$$

Como temos duas contribuições idênticas, isto é, o mesmo valor de (2.21) para o caso $\langle | M_1^* M_2 | \rangle$, então

$$(\langle | M_1 M_2^* | \rangle + \langle | M_1^* M_2 | \rangle) = 4 \frac{e^4 u^2}{ts}. \quad (2.23)$$

Assim, temos a amplitude total, em termos das variáveis (s, t, u)

$$\langle | M |^2 \rangle = 2e^4 \left[\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{u^2 + s^2}{t^2} + 2 \frac{u^2}{ts} \right]. \quad (2.24)$$

Para calcular a seção de choque, inserimos (2.24) na integral de fase para o estado final de suas partículas, dada pela seguinte relação, ver Apêndice (A.6),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\langle | M |^2 \rangle}{64\pi^2 (2E)^2}. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.24) em (2.25) e organizando os termos, considerando as variáveis de Mandelstam, em termos do ângulo de espalhamento ($s = 4E^2$; $t = -4E^2 \sin^2(\theta/2)$; $u = -4E^2 \cos^2(\theta/2)$), e a constante de estrutura fina ($\alpha = e^2/4\pi$), temos a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{(1 + \cos\theta)^2 + 4}{(1 - \cos\theta)^2} + \frac{(1 + \cos\theta)^2}{2} - \frac{(1 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)} \right]. \quad (2.26)$$

Esta é a equação para o seção de choque transversal, em termos do ângulo de espalhamento.

A partir dessas equações, usando valores para a energia do centro de massa, e integrando em termos do ângulo θ , plota-se o gráfico da Figura (6), que mostra a comparação entre a predição da QED e os valores obtidos pelo experimento TASSO¹, e o da Figura (7), que mostra o valor total da seção de choque em termos da energia de centro de massa.

¹ "O experimento TASSO foi realizado no colisor de elétron-pósitron PETRA em DESY, Hamburgo. A máquina começou em 1979, e energias de até 35 GeV foram alcançadas. Uma grande descoberta do experimento TASSO foi uma evidência direta da existência do glúon". Ref [22]

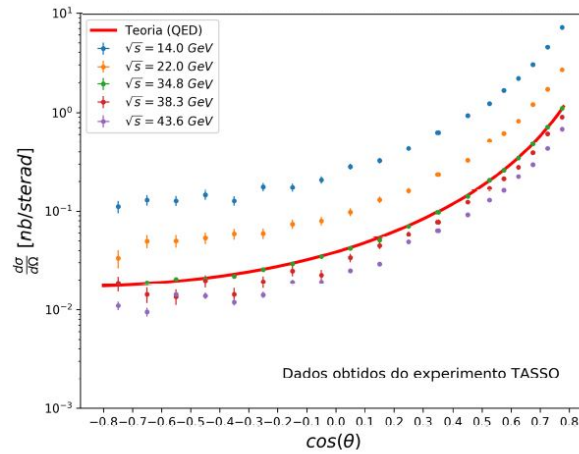


Figura 6 – Seção de choque diferencial em termos do $\cos\theta$. Fonte: Ref. [21]

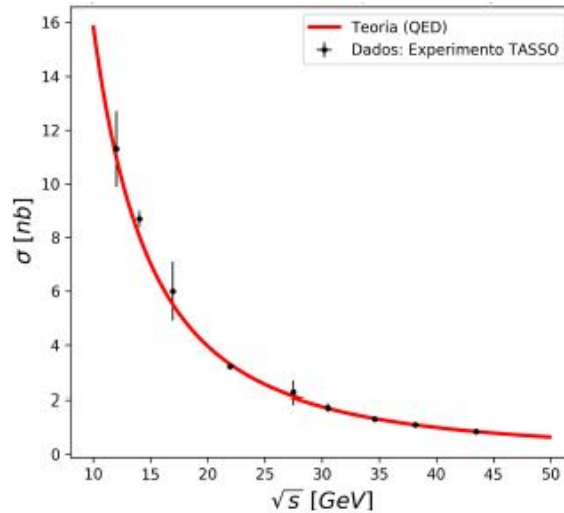


Figura 7 – Seção de choque total em termos da energia de centro de massa \sqrt{s} . Fonte: Ref. [21].

Feita essas descrições a respeito do espalhamento Bhabha, pode-se atribuir valores desde baixas energias à ordens de altas energias. Para o caso de alta energia, limite relativístico, temos que $E \gg m$.

2.1.2 Espalhamento Compton

O espalhamento Compton descreve colisões de elétron-fóton ($e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$). Para a descrição desse espalhamento usamos o livro Ref.[18]. Basicamente, calculamos os elementos da matriz, a amplitude de espalhamento e a seção de choque diferencial, usando novamente as regras e os diagramas de Feynman.

A figura (8) mostra os dois diagramas que contribuem para a amplitude de espalhamento desse processo.

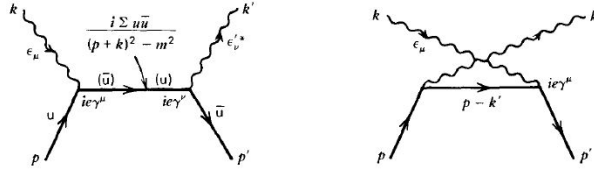


Figura 8 – Diagramas de Feynman para o espalhamento Compton ($e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$). Fonte: Ref. [19].

No primeiro diagrama, temos partículas reais num estado inicial, um par elétron-fóton que interagem cria um elétron virtual, e este emite um par elétron-fóton reais no estado final do processo. No segundo diagrama, um elétron num estado inicial emite um fóton e é espalhado pelo fóton do estado inicial.

Analisando os diagramas, e usando as regras de Feynman, citadas no tópico (2.1), escrevemos a amplitude de espalhamento, na forma

$$iM = -ie^2 \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\mu(k) \bar{u}(p') \left[\frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2} \right] u(p), \quad (2.27)$$

onde $\bar{u}(p')$ é o espinor adjunto associado ao momento do elétron do estado final, $u(p)$ é o espinor associado ao momento do elétron no estado inicial, $\epsilon_\mu^*(k')$ é a polarização associado ao momento do fóton do estado final, $\epsilon_\mu(k)$ é a polarização associado ao momento do fóton no estado inicial, e os demais termos são os propagadores de interação entre as partículas reais e virtual, sendo m a massa do elétron, \not{p} e \not{k} é a forma compacta para as componentes do quadri-momento.

Podemos considerar $p^2 = m^2 c^2 = 2$ e $k^2 = m^2 c^2 = 0$, pois $c = 1$ e para o fóton $m = 0$, e escrever os momentos em termos das variáveis de Mandelstam

$$s = (p+k)^2 - m^2 = p^2 + 2p \cdot k + k^2 - m^2 = 2p \cdot k = 2p' \cdot k', \quad (2.28)$$

$$u = (p-k')^2 - m^2 = p^2 - 2p \cdot k' + k'^2 - m^2 = -2p \cdot k' = -2k \cdot p'. \quad (2.29)$$

Agora, fazemos a média quadrática da amplitude, considerando a soma nas helicidades do elétron e do fóton

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_s |M^* M|. \quad (2.30)$$

Logo, substituindo (2.28) e (2.29) em (2.27) e substituindo em (2.30), fazendo a multiplicação do elemento de matriz com a complexa conjugada, obtemos

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{e^4}{4s^2} Tr[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu] + \frac{e^4}{4u^2} Tr[\not{p} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p}' \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu]. \quad (2.31)$$

Observe que na equação (3.31), o primeiro termo se refere a amplitude do diagrama (1) da Figura (8), ou seja, $M_1^* M_1 = |M_1|^2$, e o segunda termo, a amplitude do diagrama (2), também da Figura (8), isto é, $M_2^* M_2 = |M_2|^2$, onde $\langle |M|^2 \rangle = |M_1|^2 + |M_2|^2$.

Aplicando o teorema do traço e as propriedades das matrizes gamas, ver Apêndices (A.1 - A.2), isto é, $\not{p}' \gamma^\nu \gamma_\nu = -2\not{p}'$, $\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -2\not{p}$, e $T_r[\not{p}' \not{k} \not{p} \not{k}] = 2(p' \cdot k)(p \cdot k)$, ver também detalhes dos cálculos nas referências [18] e [19], temos

$$\langle |M|^2 \rangle = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} \right), \quad (2.32)$$

onde nesse cálculo as amplitudes, $M_1 M_2^* = M_1^* M_2 = 0$, ou seja, temos apenas duas amplitudes.

Para calcular a seção de choque diferencial, como visto na relação para o espalhamento Bhabha, temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |M|^2 \rangle. \quad (2.33)$$

Assim, temos a seção de choque total escrito na forma

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \int \langle |M|^2 \rangle d\Omega. \quad (2.34)$$

Substituindo (2.32) em (2.34), a equação para o cálculo da seção de choque se torna

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \int 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} \right) d\Omega. \quad (2.35)$$

A partir da equação (2.35), incluindo a constante de estrutura fina ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$), e considerando o sistema de centro de massa, Ref.[20](p.162-164), a seção de choque total para o limite de baixa energia, é igual a obtida para a radiação eletromagnética clássica por um elétron livre, ou seja,

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}, \quad (2.36)$$

onde m é massa do elétron.

Para o limite de alta energia, como mostrado na Figura (9), a seção de choque se torna igual a equação (2.38), obtida da relação dos momentos dos fótons e elétrons, em termos da energia e ângulo de espalhamento.

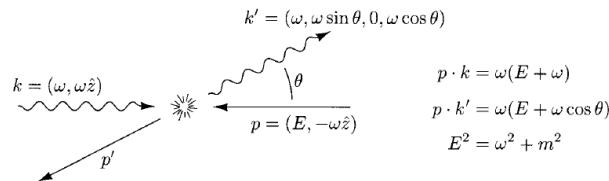


Figura 9 – Quadro de centro de massa para o cálculo da seção de choque, em termos de ω e θ . Fonte: Ref. [20].

Então, da equação (2.35), sendo $d\Omega = d\cos\theta$, e substituindo as variáveis de Mandelstam por $s = p \cdot k = \omega(E + \omega)$, $u = p \cdot k' = \omega(E + \omega\cos\theta)$, $E^2 = \omega^2 + m^2$, com $\theta \approx \pi$, temos

$$\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{2m^2 + s(1 + \cos\theta)}. \quad (2.37)$$

Resolvendo (2.37), obtemos a seção de choque total

$$\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \log \frac{s}{m^2}. \quad (2.38)$$

Este é um valor para energia de centro de massa, onde $s \gg m^2$, ou seja, alta energia.

2.1.3 Espalhamento de aniquilação por par

É o espalhamento em que um elétron e um pósitron se aniquilam e produzem um par de fótons ($e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$). Este é um tipo da extensão do espalhamento Compton, e os diagramas são basicamente os termos cruzados, Figura (10)

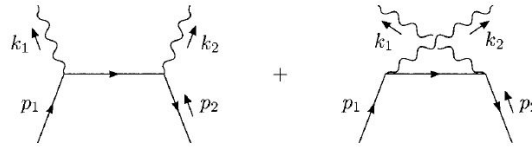


Figura 10 – Diagramas para a aniquilação por par $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Fonte: Ref. [20].

Para os diagramas, aplicando as regras de Feynman e fazendo uso das relações de completudez, temos o elemento de matriz escrito na forma

$$\begin{aligned} iM &= (-ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_1 - m)}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \gamma^\nu u(p_1) \epsilon_2^\mu \epsilon_1^\nu \\ &+ (-ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_2 - m)}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \gamma^\nu u(p_1) \epsilon_2^\nu \epsilon_1^\mu. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Fazendo a média quadrática das amplitudes do espalhamento, considerando a soma das polarizações sobre todas as partículas do processo, também usando o teorema dos traços, a amplitude total de espalhamento, para ordens de baixas energias, Ref. [20](p.168), é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_s \langle |M|^2 \rangle &= -2e^4 \left[\frac{p_1 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_1} + \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_2} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - m^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Com isso, considerando a energia de centro de massa: $p_1 = (E, p)$, $p_2 = (E, -p)$, $k_1 = (E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta)$, $k_2 = (E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta)$, escrevemos a seção de choque

diferencial para este espalhamento na forma

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{p} \right) \left[\frac{(E^2 + p^2 \cos^2\theta)}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} + \frac{(2m^2)}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} - \frac{(2m^4)}{(m^2 + p^2 \sin^2\theta)^2} \right]. \quad (2.41)$$

Para o limite de altas energias ($E \gg m$), a seção de choque diferencial é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left(\frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right). \quad (2.42)$$

E para calcular a seção de choque total, basta resolver a integral

$$\sigma = \int_0^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \quad (2.43)$$

2.1.4 Espalhamento Möller

É o espalhamento de dois elétrons que se dispersam trocando um fóton virtual e este cria dois elétrons no estado final do processo.

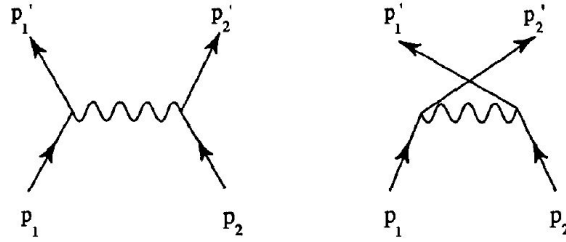


Figura 11 – Diagramas para o espalhamento Möller ($e^-e^- \rightarrow e^-e^-$). Fonte: Ref. [18].

A amplitude de espalhamento da matriz é dada por

$$M = -e^2 \frac{\bar{u}(p_1') \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_2') \gamma_\mu u(p_2)}{(p_1 - p_1')^2} + e^2 \frac{\bar{u}(p_2') \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1') \gamma_\mu u(p_2)}{(p_1 - p_2')^2}. \quad (2.44)$$

E a amplitude média quadrática, considerando as helicidades de polarização é

$$\frac{1}{4} \sum_s \langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} (2m^2 e^2)^2 2 \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right]. \quad (2.45)$$

Onde, para uma energia de centro de massa

$$t = -2p^2(1 - \cos\theta) = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2.46)$$

$$u = -2p^2(1 + \cos\theta) = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.47)$$

A seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 \alpha^2}{16p^4} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2}} \right), \quad (2.48)$$

onde, $p = |p_i|$, sendo $i = 1, 2, 3, 4$.

Integrando (2.48) encontra a seção de choque total.

2.1.5 Espalhamento Coulomb

O espalhamento Coulomb corresponde interação de partículas, eletricamente carregadas, com um campo eletromagnético externo. É um tipo de colisão inelástica, e descreve a dinâmica das partículas na presença desse campo externo, sendo este, um potencial Coulombiano escrito na forma $A^\mu = \left(\frac{Ze}{4\pi r}, \mathbf{0}\right)$, onde $\mathbf{0}$ representa um vetor nulo, Z o número atômico, r a distancia da partícula em relação ao referencial.

Geralmente, colisões coulombianas são estudadas nas interações atômicas ou moleculares, mas para um caso especial, estudamos a seção de choque transversal, considerando uma única partícula interagindo com o campo externo, Figura (12).

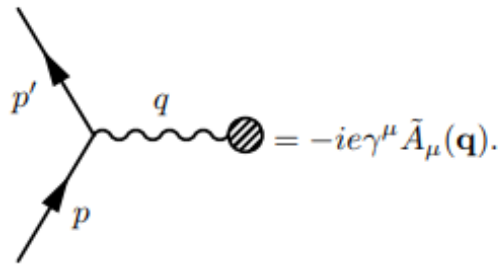


Figura 12 – Espalhamento Coulomb. Fonte: Ref. [23].

Neste caso, temos o potencial de Coulomb $A^\mu = \left(\frac{Ze}{4\pi r}, 0\right)$, escrevendo no espaço de momento temos, $\tilde{A}_\mu(q) = \left(\frac{Ze}{|q|}, \mathbf{0}\right)$, sendo $q = p' - p$, onde p é momento da partícula no estado inicial, p' no estado final, e q o momento do fóton. Assim como nos processos descritos anteriormente, calculamos a seção de choque a partir da amplitude e matriz de espalhamento.

Então, considerando as regras de Feynman, o elemento de matriz para este caso é

$$iM = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu(p' - p). \quad (2.49)$$

A média quadrática da amplitude de espalhamento, somando sobre os spins dos dois elétrons é

$$\frac{1}{2} \sum_s \langle |M|^2 \rangle = \frac{e^2}{2} \sum_s \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu \tilde{A}_\mu)u(p)u^\dagger(p)ie\gamma^\nu \tilde{A}_\nu^\dagger \bar{u}^\dagger(p'), \quad (2.50)$$

Resolvendo (2.50), considerando os traços e as relações de completudez, ver Apêndices (A.1), (A.2) e (A.7), ver também Ref.[23] para detalhes dos cálculos,

$$\frac{1}{2} \sum_s \langle |M|^2 \rangle = \langle |M|^2 \rangle = 2e^2[2EE' - p' \cdot p + m^2] \left(\frac{Ze}{|q|^2}\right)^2. \quad (2.51)$$

Considerando $p = (E, p)$, $p' = (E', p')$, $E = E'$, $p' \cdot p = |p|^2 \cos\theta$, $|q|^2 = 2|p|^2 - 2|p|^2 \cos\theta$, onde E é a energia, temos

$$\langle |M|^2 \rangle = 2e^2[E^2 - |p|^2 \cos\theta + m^2] \left(\frac{Ze}{2|p|^2(1 - \cos\theta)}\right)^2. \quad (2.52)$$

Usando as relações $|p| = |p'| = m\beta$, sendo m a massa do elétron, β a velocidade limite, a constante de estrutura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \leftrightarrow 4\pi\alpha = e^2$, a relação trigonométrica $\sin^2\theta = (1 - \cos^2\theta)$, e organizando os termos, temos a média quadrática da amplitude de espalhamento igual a

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{4\pi^2 Z^2 \alpha^2 m^2}{|p|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (2.53)$$

Para a seção de choque diferencial, assim como nas relações anteriores, temos, considerando este espalhamento

$$d\sigma = \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{|M|^2}{2E' 2E\beta} (2\pi) \delta(E - E'). \quad (2.54)$$

Substituindo (2.53) em (2.54) obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 m^2}{16E\beta |p|^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (2.55)$$

Como $|p| = m\beta$, rescrevemos (2.55) na forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{16E\beta^2 |p|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (2.56)$$

Esta é a seção de choque diferencial para o espalhamento de Coulomb. Para $\beta \rightarrow 0$, isto é, no limite não relativístico, a equação (2.56) se torna a fórmula do espalhamento de Rutherford [19],

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (2.57)$$

Integrando (2.56) obtém a seção de choque total do espalhamento Coulombiano. Veja que a equação (2.57) é obtida usando o campo de Coulomb para caso não relativístico. Portanto podemos usar esse modelo para cálculos de outras seção de choques com campos externos formados por íons pesados de elementos químicos, por exemplo, o chumbo.

3 Espalhamento Fóton-Fóton

Visto no capítulo 2, que às análises dos processos de espalhamentos básicos da QED se dão pelo cálculo da matriz de espalhamento, a qual contém todas as amplitudes individuais. E, a partir da amplitude total calcula-se a seção de choque, tanto para a ordem mais baixa do espalhamento, que é a contribuição de até dois fatores de vértices dos diagramas de Feynman, tanto para ordem de altas energias. Neste capítulo, mostra-se uma introdução de alguns processos de maiores ordens, são eles: espalhamentos fóton-fóton para os casos, elástico sem e com a quebra de simetria de Lorentz, e para o caso inelástico em que dois campos externos, formados por íons pesados de chumbo, contribuem para o espalhamento, considerando também a quebra de invariância de Lorentz.

3.1 Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

O espalhamento fóton-fóton descreve o fenômeno em que fótons reais, em um vácuo polarizado, geram fótons reais espalhados. Para descrever este processo, não é tão simples quanto os demais processos básicos da QED. O cálculo da amplitude de espalhamento e a seção de choque não são mais de ordens baixas, em termos da constante de estrutura fina, pois trabalhamos com quatro vértices para cada diagrama que contribuem para a amplitude, o que gera dificuldades em realizar esses cálculos.

Algumas das literaturas, sobre a temática, mostram teoricamente, resultados interessantes para a seção de choque do espalhamento fóton-fóton [1 - 6]. Outras, descrevem estudos que poderiam comprovar, experimentalmente, tais resultados usando íons de chumbo pesados [7, 31 - 36]. E, outras, mostram o resultado obtido com êxito sobre as colisões ultraperiféricas de íons pesados de chumbo (Pb-Pb), divulgado a partir de 2017 [8-10]. Essas literaturas, tem contribuído como material para estudos e pesquisas na área.

Então, neste capítulo, consta-se três considerações sobre o espalhamento fóton-fóton: as descrições dos processos a partir da lagrangeana invariante de Lorentz; da lagrangeana estendida da QED por quebra de simetria de Lorentz; e em colisões de íons pesados considerando também a quebra de simetria.

3.2 Espalhamento fóton-fóton sem quebra das simetrias de invariância de Lorentz

O espalhamento elástico fóton-fóton ($\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$), corresponde ao processo em que dois fótons reais produzem um par elétron-pósitron virtuais que se aniquilam produzindo

dois fótons reais.

Pela regra de Furry¹, os diagramas que contribuem para o cálculo da amplitude total desse processo são apresentados na Figura (13), onde cada um dos três diagramas tem outro diagrama correspondente, com a orientação do loop contrária. A leitura é feita da esquerda para a direita, atribuindo (k_1, k_2, k_3, k_4) ² para os momentos das partículas externas, e p para o loop de férmions (partículas virtuais).

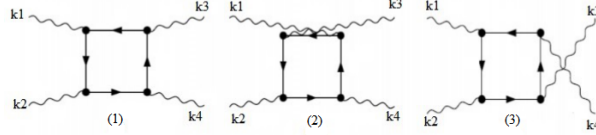


Figura 13 – Diagramas de Feynman para o espalhamento fóton-fóton. Fonte: Ref. [24]. Adaptada pelo autor.

Aplicando as regras de Feynman para esse processo, e sabendo que cada diagrama tem duas representações que contribuem com o mesmo valor da amplitude, então, representamos duas vezes o valor nas somas das amplitudes dos três diagramas, ou seja,

$$M = 2(M_1 + M_2 + M_3). \quad (3.1)$$

Consideração a polarização dos fótons, a equação (3.1) é reescrita na forma

$$M^{s^1 s^2 s^{*1} s^{*2}} = 2(M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} + M_2^{\mu\nu\lambda\sigma} + M_3^{\mu\nu\lambda\sigma})\epsilon_\mu^{s^1}(k_1)\epsilon_\nu^{s^2}(k_2)\epsilon_\lambda^{s^{*1}}(k_3)\epsilon_\sigma^{s^{*2}}(k_4), \quad (3.2)$$

onde ϵ^{s^1} , ϵ^{s^2} , $\epsilon^{s^{*1}}$, $\epsilon^{s^{*2}}$ representa os estados de polarização dos fótons.

Comecemos a descrição desse processo com a lagrangeana, sem quebra de invariância de Lorentz, dada por

$$L = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - ie\gamma^\mu A_\mu)\Psi, \quad (3.3)$$

onde o espinor Ψ e seu adjunto $\bar{\Psi}$ representam os campos formados pelas partículas fermiônicas, γ^μ são as matrizes de Dirac, m a massa das partículas fermiônicas, e A_μ o campo de interação elétron-fóton.

Para calcular a amplitude do espalhamento fóton-fóton, a partir da equação (3.3), consideramos as seguintes representações do inverso do propagador fermiônico $S_F^{-1} = i\gamma^\mu\partial_\mu - m \Rightarrow i\gamma^\mu p_\mu - m = \not{p} - m$. Feita a racionalização do propagador, tem-se o propagador do elétron $S_F(p) = -\frac{i\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2}$, o propagador do fóton $\Delta_{\mu\nu} = -i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$, e o fator de vértice $-ie\gamma^\mu A_\mu$, onde $-e\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$ representa a interação do campo de matéria (formado pelos elétrons) e o campo eletromagnético (da interação elétron-fóton).

¹ Loops com número par de fótons externos são equivalentes, os de número ímpar, se anulam [24].

² Algumas também vamos considerar (p_1, p_2, p_3, p_4) como momentos externos, sem qualquer perda de generalidade.

Aplicando esses termos correspondentes às regras de Feynman, escreve-se as amplitudes de espalhamento, para cada um dos diagramas da Figura (13), Ref. [24], nas seguintes formas

$$M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_1 + m)}{[(p - k_2 - k_1)^2 - m^2]} \gamma^\sigma \frac{(\not{p} - \not{k}_4 + m)}{[(p - k_4)^2 - m^2]} \right. \\ \left. \times \gamma^\lambda \frac{(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{(\not{p} - \not{k}_2 + m)}{[(p - k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (3.4)$$

$$M_2^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_1 + m)}{[(p - k_2 - k_1)^2 - m^2]} \gamma^\lambda \frac{(\not{p} - \not{k}_3 + m)}{[(p - k_3)^2 - m^2]} \right. \\ \left. \times \gamma^\sigma \frac{(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{(\not{p} - \not{k}_2 + m)}{[(p - k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (3.5)$$

$$M_3^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\sigma \frac{(\not{p} - \not{k}_2 + \not{k}_4 + m)}{[(p - k_2 + k_4)^2 - m^2]} \gamma^\mu \frac{(\not{p} - \not{k}_3 + m)}{[(p - k_3)^2 - m^2]} \right. \\ \left. \times \gamma^\lambda \frac{(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{(\not{p} - \not{k}_2 + m)}{[(p - k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (3.6)$$

onde p corresponde aos momentos das partículas do loop (férmions), e k_1, k_2 (momento dos fótons externos do estado inicial), e k_3, k_4 (momento dos fótons externos do estado final), e Tr é o traço.

As equações acima apresentam integrais finitas, e divergentes. Para solucioná-las, usa-se a parametrização de Feynman, Apêndice (B.1). No entanto, as integrais divergentes não possui soluções finitas, e se torna necessário fazer uma renormalização³ para que tenha uma solução finita.

Para facilitar a separação dos termos divergentes e fazer o cálculo das equações (3.4 - 3.6), usa-se para cada propagador do loop, a seguinte identidade,

$$\frac{1}{(p + k_i)^2 - k_i^2} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot p)^j}{(p^2 - m_i^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{n+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot p)^{n+1}}{(p^2 - m_i^2)^{n+1} [(p + k_i)^2 - m_i^2]}, \quad (3.7)$$

onde k_i é arbitrário - k_1, k_2, k_3 , e n qualquer valor que satisfaz a identidade [25].

Usando identidade (3.7) nas equações (3.4 - 3.6), escrevemos para cada diagrama,

$$M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \\ \times \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_1 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{(k_2 + k_1)^2 - 2(k_2 + k_1) \cdot p}{(p^2 - m^2)[p - (k_2 - k_1)]^2 - m^2} \right) \right.$$

³ São técnicas de regularizações, para tratar integrais divergentes - consiste basicamente transformar as integrais divergentes em convergentes, para que seja possível obter soluções finitas.

$$\begin{aligned} & \times \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}_4 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{k_4^2 - 2k_4 \cdot p}{(p^2 - m^2)[(p - k_4)^2 - m^2]} \right) \\ & \times \gamma^\lambda \frac{(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}_2 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{k_2^2 - 2k_2 \cdot p}{(p^2 - m^2)[(p - k_2)^2 - m^2]} \right) \Bigg\}, \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \\ & \times Tr \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_1 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{(k_2 + k_1)^2 - 2(k_2 + k_1) \cdot p}{(p^2 - m^2)[p - (k_2 - k_1)]^2 - m^2} \right) \right. \\ & \times \gamma^\lambda (\not{p} - \not{k}_3 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{k_3^2 - 2k_3 \cdot p}{(p^2 - m^2)[(p - k_3)^2 - m^2]} \right) \\ & \left. \times \gamma^\sigma \frac{(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}_2 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{k_2^2 - 2k_2 \cdot p}{(p^2 - m^2)[(p - k_2)^2 - m^2]} \right) \right\}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \\ & \times Tr \left\{ \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}_2 + \not{k}_4 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{(k_2 - k_4)^2 - 2(k_2 - k_4) \cdot p}{(p^2 - m^2)[p - (k_2 - k_4)]^2 - m^2} \right) \right. \\ & \times \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_3 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{k_3^2 - 2k_3 \cdot p}{(p^2 - m^2)[(p - k_3)^2 - m^2]} \right) \\ & \left. \times \gamma^\lambda \frac{(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}_2 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{k_2^2 - 2k_2 \cdot p}{(p^2 - m^2)[(p - k_2)^2 - m^2]} \right) \right\}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Fazendo a parametrização de Feynman nas equações (3.8 - 3.10), ver Apêndice (B.1.1), encontra-se Logo, os termos divergentes

$$D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \int_p \frac{Tr[\gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma \not{p} \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\nu \not{p}]}{[p^2 - m^2]^4}, \quad (3.11)$$

$$D_2^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \int_p \frac{Tr[\gamma^\mu \not{p} \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\sigma \not{p} \gamma^\nu \not{p}]}{[p^2 - m^2]^4}, \quad (3.12)$$

$$D_3^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \int_p \frac{Tr[\gamma^\sigma \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\nu \not{p}]}{[p^2 - m^2]^4}. \quad (3.13)$$

Aplicando o traço nas três equações acima, ver Apêndices (A.1.10 - A.1.12), escrevemos

$$\begin{aligned} D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} &= 4 \int_p \frac{1}{[p^2 - m^2]^4} [(p^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \\ & \quad - 2p^2 (p^\mu p^\nu g^{\lambda\sigma} + p^\mu p^\sigma g^{\nu\lambda} + p^\nu p^\lambda g^{\mu\sigma} + p^\lambda p^\sigma g^{\mu\nu}) + 8p^\mu p^\nu p^\lambda p^\sigma], \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$D_2^{\mu\nu\sigma\lambda} = 4 \int_p \frac{1}{[p^2 - m^2]^4} [(p^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}) - 2p^2 (p^\mu p^\nu g^{\lambda\sigma} + p^\mu p^\lambda g^{\nu\sigma} + p^\nu p^\sigma g^{\mu\lambda} + p^\sigma p^\lambda g^{\mu\nu}) + 8p^\mu p^\nu p^\sigma p^\lambda], \quad (3.15)$$

$$D_3^{\mu\nu\sigma\lambda} = 4 \int_p \frac{1}{[p^2 - m^2]^4} [(p^2)^2 (g^{\sigma\nu} g^{\lambda\mu} + g^{\sigma\mu} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\mu}) - 2p^2 (p^\sigma p^\nu g^{\mu\lambda} + p^\sigma p^\mu g^{\nu\lambda} + p^\nu p^\lambda g^{\sigma\mu} + p^\lambda p^\mu g^{\sigma\nu}) + 8p^\sigma p^\nu p^\lambda p^\mu], \quad (3.16)$$

de modo que $D^{\mu\nu\lambda\sigma} = D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} + D_2^{\mu\nu\lambda\sigma} + D_3^{\mu\nu\lambda\sigma}$, seja finita.

Próximo passo, é renormalizar essas integrais, usando a técnica de regularização dimensional⁴, mostrada no Apêndice (B.2) ou regularização implícita. Na referência [24] pode-se ver como resolver a integral (3.14) através da regularização implícita, e apresenta todo o cálculo para se obter a seção de choque diferencial.

Feito a regularização dimensional, o valor da soma das integrais divergentes é

$$D^{\mu\nu\sigma\lambda} = \frac{-i}{24\pi^2} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \quad (3.17)$$

Este é termo de contribuição das integrais divergentes que deve ser somado as soluções das integrais finas, para se obter a amplitude total. Nos Apêndices (B.1) e (B.2) é mostrado a resolução desses cálculos.

Agora, tendo o valor da amplitude M , para a seção de choque despolarizada, como já conhecida a relação obtida da integral de espaço de fase, Apêndice (A.6), num referencial de centro de massa, temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 (2\omega)^2} \frac{1}{4} \sum_{s^1 s^2 s^*1 s^*2} |M|^2, \quad (3.18)$$

sendo,

$$\sum_{s^1 s^2 s^*1 s^*2} |M|^2 = M_{\mu\nu\lambda\sigma}^* M^{\mu\nu\lambda\sigma}, \quad (3.19)$$

a amplitude quadrática total, feito a média sobre todos os estados iniciais e finais das polarizações.

Então, para a equação (3.2), assim como mostrado em [24], obtém-se o valor da amplitude total que calculado a média e substituindo em (3.18), a seção de choque diferencial para este espalhamento é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 (2\omega)^2} \left| \frac{-(ie)^4}{(2\pi)^4} i\pi^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 \right|^2 \times \frac{2224(\cos^2(\theta) + 3)^2}{2025}. \quad (3.20)$$

⁴ Técnica para resolver integrais divergentes, consiste na observar analiticamente as dimensões espaço-temporal permitindo a transformação das integrais divergentes em convergentes.

⁵ Método para tratar integrais divergentes no contexto da QED, onde os termos de superfícies devem ser nulos para que seja preservada a invariância de calibre da teoria.

Simplificando a equação acima, e escrevendo em termos da constante de estrutura fina, isto é, substituindo ($\frac{e^8}{256\pi^4} = \alpha^4$), temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{139\alpha^4}{(180\pi)^2} \frac{\omega^6}{m^8} (3 + \cos^2\theta)^2. \quad (3.21)$$

Este é o resultado da seção de choque diferencial do espalhamento ($\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$) para baixas energias (caso não relativístico, em que m não tende a zero), obtida em várias literaturas que descrevem esse processo. Sendo ω o que relaciona os momentos à energia e ao ângulo de espalhamento θ .

Integrando (3.21), a seção de choque para o espalhamento fóton-fóton em ordem de baixa energia [26]

$$\sigma = \frac{973\alpha^4\omega^6}{(10125\pi)^2 m^8}. \quad (3.22)$$

Para o caso de altas energia, é apresentado em [30, 31] o valor

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^4}{\pi^2\omega^2} \frac{\log^4}{\theta}. \quad (3.23)$$

Até aqui, fizemos apenas uma revisão desses processos, os quais estão descritos e presentes em várias literaturas, o objetivo foi facilitar a descrição dos processos a serem trabalhados nas próximas subseções.

3.2.1 Espalhamento fóton-fóton por quebra de simetria de invariância de Lorentz

Nesta subseção, mostramos alguns passos de como calcular a amplitude e a seção de choque diferencial para o espalhamento fóton-fóton com a quebra de simetria de Lorentz. Porém, os resultados desses cálculos e a discussão a respeito da informação que o parâmetro (b_μ) de Lorentz representa, ao ser introduzido na teoria, serão concluídas e mostrados em trabalho futuro.

Começamos com a lagrangeana estendida por quebra de simetria, dada por

$$L = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \mathcal{M}_b - ie\gamma^\mu A_\mu)\Psi, \quad (3.24)$$

onde $\mathcal{M}_b \equiv m + \not{b}\gamma_5$, sendo $\not{b} = \gamma^\mu b_\mu$, em que b_μ é um quadri-vetor constante responsável por quebra da simetria de Lorentz e CPT.

Voltando aos diagramas da Figura (13), observa-se três topologias diferentes. Para o caso, agora considerado, verifica-se, na Figura (14), quatro diagramas com inserções da quebra de simetria, em um dos propagadores de férmions, para cada loop (a inserção, do termo de quebra de simetria, no propagador fermiônico, permite a contribuição de b_μ

linear na ordem mais baixa). Logo, três topologias para cada um dos quatro diagramas, resulta-se em 12 diagramas representativos, e considerando o teorema de Furry, conta-se no total 24 diagramas que contribuem para a amplitude do espalhamento [29]. Com isso, em analogia a equação (3.2), escrevemos

$$M^{s^1 s^2 s^{*1} s^{*2}} = 2(3M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} + 3M_b^{\mu\nu\lambda\sigma} + 3M_c^{\mu\nu\lambda\sigma} + 3M_d^{\mu\nu\lambda\sigma}) \epsilon_\mu^{s^1}(p_1) \epsilon_\nu^{s^2}(p_2) \epsilon_\lambda^{s^{*1}}(p_3) \epsilon_\sigma^{s^{*2}}(p_4), \quad (3.25)$$

onde, $3M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = M_{a_1}^{\mu\nu\lambda\sigma} + M_{a_2}^{\mu\nu\lambda\sigma} + M_{a_3}^{\mu\nu\lambda\sigma}$ representa três equações que descreve as três topologias diferentes, para a Figura (14a), de forma análoga, para as demais representações da Figura (14b, 14c e 14d); $\epsilon_\mu^{s^1}(p_1) \epsilon_\nu^{s^2}(p_2)$ representa a polarização dos fótons no estado inicial do processo, e $\epsilon_\lambda^{s^{*1}}(p_3) \epsilon_\sigma^{s^{*2}}(p_4)$ os do estado final.

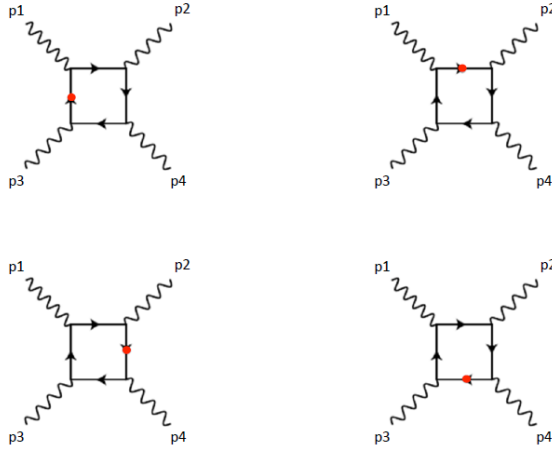


Figura 14 – Diagramas de Feynman para o espalhamento fóton-fóton com quebra de simetria. A presença do parâmetro violador de Lorentz modifica os propagadores com a “inserção” representada pela marca vermelha em (a), (b), (c) e (d).

Antes de aplicar as regras de Feynman para amplitude deste espalhamento, escrevemos os propagadores de férmions livres nas formas [14] e [27]

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m}, \quad S_b(p) = \frac{i}{\not{p} - \mathcal{M}_b} = \frac{i}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5}, \quad (3.26)$$

onde $S(p)$ é o propagador fermiônico usual, e $S_b(p)$ é o propagador fermiônico em termo de $\mathcal{M}_b = m + \not{b}\gamma_5$, ambos, sem racionalização.

O propagador $S_b(p)$, pode ser escrito na forma

$$S_b(p) = S(p) + G_b(p), \quad (3.27)$$

sendo

$$G_b(p) = \frac{\not{b}\gamma_5 S(p)}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5}. \quad (3.28)$$

Para a ordem mais baixa em b , exatamente por corresponder a inserção desse termo no propagador fermiônico, pode-se escrever

$$G_b(p) \simeq -iS(p)\gamma^\alpha\gamma_5 S(p)b_\alpha. \quad (3.29)$$

Racionalizado, como mostrado em [12] e [27], o propagador fermiônico $S_b(p)$ para baixa energia ($m \neq 0$), é

$$S_b(p) = i \frac{(\not{p} + m - \not{b}\gamma_5)(p^2 - m^2 - b^2 + [\not{p}, \not{b}\gamma_5])}{(p^2 - m^2 - b^2)^2 + 4[p^2 b^2 - (b \cdot p)^2]}, \quad (3.30)$$

e para o caso de alta energia ($m \approx 0$), como mostram [13] e [27]

$$S_b(p) = i \frac{(\not{p} + \not{b}\gamma_5)(p^2 + b^2 - 2p \cdot b\gamma_5)}{(p + b)^2(p - b)^2}. \quad (3.31)$$

As equações (3.30) e (3.31) podem ser usadas para realizar o cálculo das amplitudes, no entanto, usamos a forma simplificada, equação (3.29), e aplicamos as regras de Feynman para descrever os 24 diagramas.

Como estamos interessados na ordem mais baixa do parâmetro de violação de Lorentz, então, as contribuições de b_μ linear para a amplitude do espalhamento, são dadas pela combinação dos propagadores acima mencionados,

$$M_{a,b,c,d}^{\mu\nu\lambda\sigma}(p, \dots, p_3) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p + p_2) \gamma^\lambda S(p + p_1 + p_3) \gamma^\sigma G_b(p + p_1) + \dots \right\}, \quad (3.32)$$

onde (\dots) representa sequência das contribuições dos demais diagramas.

Substituindo os propagadores em (3.32) escrevemos a amplitude

$$M_{a,b,c,d}^{\mu\nu\lambda\sigma}(p, \dots, p_3) = -ie^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p} + \not{p}_2 - m} \gamma^\lambda \frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 + \not{p}_3 - m} \gamma^\sigma \times \frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 - m} b_\alpha + \dots \right\}. \quad (3.33)$$

Explicitando o termo que envolve $\gamma^\alpha \gamma_5$ [28]

$$\frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 - m} = \frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{i}{(p + p_1)^2 - m^2}, \quad (3.34)$$

e aplicando a racionalização dos propagadores, temos

$$M_{a,b,c,d}^{\mu\nu\lambda\sigma}(p_1, \dots, p_4) = -ie^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^\mu \frac{i(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{i(\not{p} - \not{p}_2 + m)}{[(p - p_2)^2 - m^2]} \times \gamma^\lambda \frac{i(\not{p} - \not{p}_1 - \not{p}_3 + m)}{[(p - p_2 - p_3)^2 - m^2]} \gamma^\sigma \frac{i(\not{p} - \not{p}_1 + m)}{[(p - p_1)^2 - m^2]} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{i(p - p_1)^2 + m^2}{[(p - p_1)^4 - m^4]} b_\alpha + \dots \right\}. \quad (3.35)$$

Sabemos que, da equação acima, pode ser expressa em forma de tensores, ou seja, $\Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = \Pi_0^{\mu\nu\lambda\sigma} + \Pi_{b_\mu}^{\mu\nu\lambda\sigma} + \Pi_{b_\mu b_\mu}^{\mu\nu\lambda\sigma}$, onde $\Pi_0^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é o tensor de polarização da QED para a ordem mais baixa, $\Pi_{b_\mu}^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é o termo com a quebra de simetria de Lorentz para ordem mais baixa em b , e o último é termo para ordens mais alta em b .

Dessa forma, para $\Pi_{a,b,c,d}^{\mu\nu\lambda\sigma} = \Pi_a^{\mu\nu\lambda\sigma} + \Pi_b^{\mu\nu\lambda\sigma} + \Pi_c^{\mu\nu\lambda\sigma} + \Pi_d^{\mu\nu\lambda\sigma}$, onde para cada tensor, há uma representação para as ordens citadas. Como apenas o termo de b_μ linear, de ordem mais baixa, nos interessa, então, reescrevemos a equação acima na forma do seguinte tensor,

$$\Pi_{b_\mu}^{\mu\nu\lambda\sigma} \simeq \Pi_{b_\mu}^{\mu\nu\lambda\sigma\alpha} b_\alpha. \quad (3.36)$$

Usando a equação (3.35) em (3.36) escrevemos,

$$\begin{aligned} \Pi_{b_\mu}^{\mu\nu\lambda\sigma} = & -ie^4 b_\alpha \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^\mu \frac{i(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{i(\not{p} - \not{p}_2 + m)}{[(p - p_2)^2 - m^2]} \right. \\ & \times \left. \gamma^\lambda \frac{i(\not{p} - \not{p}_1 - \not{p}_3 + m)}{[(p - p_2 - p_3)^2 - m^2]} \gamma^\sigma \frac{i(\not{p} - \not{p}_1 + m)}{[(p - p_1)^2 - m^2]} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{i(p - p_1)^2 + m^2}{[(p - p_1)^4 - m^4]} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Aplica-se a seguinte identidade, para cada propagador do loop [24, 28]

$$\frac{1}{(p - p_i)^2 - m^2} = \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{(p_i)^2 - 2p_i \cdot p}{(p^2 - m^2)[(p - p_i)^2 - m^2]}, \quad (3.38)$$

onde $i = 1, 2, 3$.

Então,

$$\begin{aligned} \Pi_{b_\mu}^{\mu\nu\lambda\sigma} = & -ie^4 b_\alpha \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^\mu \frac{i(\not{p} + m)}{[p^2 - m^2]} \right. \\ & \times \gamma^\nu i(\not{p} - \not{p}_2 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{p_2^2 - 2p_2 \cdot p}{(p^2 - m^2)[p - p_2]^2 - m^2} \right) \\ & \times \gamma^\lambda i(\not{p} - \not{p}_1 - \not{p}_3 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{(p_2^2 - p_3)^2 - 2(p_2 + p_3) \cdot p}{(p^2 - m^2)[p - (p_2 - p_3)]^2 - m^2} \right) \\ & \times \gamma^\sigma i(\not{p} - \not{p}_1 + m) \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{p_1^2 - 2p_1 \cdot p}{(p^2 - m^2)[p - p_1]^2 - m^2} \right) \\ & \times \left. \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{i(p - p_1)^2 + m^2}{[(p - p_1)^4 - m^4]} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Da equação acima, usamos a parametrização de Feynman para resolver as integrais convergentes, e para os termos divergentes é necessário realizar uma regularização, seja ela dimensional, ou implícita - alguns problemas complexos como este a ser resolvido, às vezes não obtemos analiticamente uma regularização dimensional para a matriz γ_5 , como cita [24], e neste caso a regularização implícita torna-se essencial.

Para fazer esses cálculos, envolvendo o propagador com quebra de simetria de Lorentz e CPT, não é simples, e se torna importante fazer uso de ferramentas como o FeynCalc para solucioná-los. Portanto, nos Apêndices (B.1.2) e (B.2.2) consta alguns procedimentos dos cálculo para as integrais de Feynman e a regularização para tratar as divergências. No entanto, os resultados desses cálculos é a meta para o próximo trabalho.

Podemos então escrever a amplitude total, que inclui o termo de quebra de simetria, como sendo

$$|M|_{b_\mu}^2 = (1+B)(1+B)^* |M|^2 \quad (3.40)$$

onde $|M|^2$ é a amplitude quadrática total sem a quebra de simetria, e B ⁶ é definido da seguinte forma

$$B = ie^{-1}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot b + e^{-2} [-(p_1 \cdot b)(p_2 \cdot b) + (p_1 \cdot b)(p_3 \cdot b) + (p_1 \cdot b)(p_4 \cdot b) + (p_2 \cdot b)(p_3 \cdot b) + (p_2 \cdot b)(p_4 \cdot b) - (p_3 \cdot b)(p_4 \cdot b)] + O(b^3), \quad (3.41)$$

onde $p_1 = (\omega, \mathbf{p})$, $p_2 = (\omega, -\mathbf{p})$, $p_3 = (\omega, \mathbf{p})$, $p_4 = (\omega, -\mathbf{p})$, e $\mathbf{p} = \omega \cos \theta$. Onde \mathbf{p} colocado em negrito representa o tri-momento, e ω é a energia. Da conservação do momento, temos que, $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$, e b corresponde a $b_\mu = (b_0, \mathbf{b})$, onde para o nosso problema, da inserção no propagador do férmio, consideramos apenas a parte temporal $b_\mu = (b, 0, 0, 0)$. Com isto, assim como citado em [30], a quebra de invariância se dá a partir da segunda ordem na expansão em b .

Tendo essas relações, feito a parametrização de Feynman e aplicado o método de regularização, para resolver as integrais no cálculo da amplitude total, correspondente aos 24 diagramas, temos que, a seção de choque diferencial total será dada na forma

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(2\omega^2)} \frac{1}{4} \sum_{s^1 s^2 s^*1 s^*2} |M|_{b_\mu}^2, \quad (3.42)$$

onde $\frac{1}{4} \sum_{s^1 s^2 s^*1 s^*2} |M|_{b_\mu}^2$ é o cálculo da amplitude quadrática total feito a média sobre todos os estados de polarizações com a quebra de simetria de Lorentz.

Logo, substituindo a equação (3.40) em (3.42), e denominando a seção de choque total de σ_t , então, a seção de choque diferencial para o processo, é escrita na forma,

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(2\omega^2)} \frac{1}{4} \sum_{s^1 s^2 s^*1 s^*2} (1 + 2Re(B)) |M|^2. \quad (3.43)$$

Assim, temos que, a seção de choque diferencial total com a quebra de invariância é a soma das seções de choque diferenciais,

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{b_\mu}}{d\Omega}, \quad (3.44)$$

sendo a seção de choque diferencial usual do espalhamento fóton-fóton da QED

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{139\alpha^4}{(180\pi)^2} \frac{\omega^6}{m^8} (3 + \cos^2\theta)^2, \quad (3.45)$$

já obtida no tópico anterior, e $\frac{d\sigma_{b_\mu}}{d\Omega}$ é a seção de choque diferencial com a quebra de simetria, que será parte do próximo trabalho.

⁶ B aqui é feito analogia a C da equação (22) da Ref. [30].

A priori, é importante frisar, sobre alguns dos resultados já obtidos em outras literaturas, como por exemplo, a Ref. [28] mostra o cálculo do termo Chern-Simons, partindo de uma integral do tipo $\int d^4x \bar{\Psi} \not{b} \gamma_5 \Psi$, para um caso sem massa. Nas referências [14, 39] detalha o cálculo para uma integral do tipo obtendo $k_\lambda = (e^2/16\pi^2)b_\lambda$ para medidas cosmológica birrefringente [14], em um processo de divisão tripla de fótons, e o valor exato de $k_\mu = (3/16\pi^2)b_\mu$ [39]. Em [29], o termo b_μ é encontrada num limite colinear, num processo de divisão tripla de fótons, nesse caso o cálculo de refere a quebra de simetria de Lorentz, para a inserção no vértice dos diagramas, e encontra uma relação para a amplitude diferente de zero, o que explicita que o resultado sem a divisão de fótons se dá devido o termo de violação de Lorentz.

3.2.2 Espalhamento Fóton-Fóton em colisões de íons pesados e a quebra de simetria de Lorentz

Para calcular a seção de choque total do espalhamento fóton-fóton em colisões de íons pesados, usa-se novamente as regras de Feynman, e realiza-se os mesmos procedimentos feitos para os dois casos anteriores, mas com uma modificação nos dois vértices de interação, devido aos dois campos eletromagnéticos externos formados pelos íons pesados de chumbo.

Na figura abaixo, temos a representatividade do espalhamento fóton-fóton com a inserção da quebra de simetria de Lorentz no propagador fermiônico, e em cada diagrama temos dois campos externos (marcado pelos X) que representam a interação do campo eletromagnético formados pelos íons pesados de chumbo.

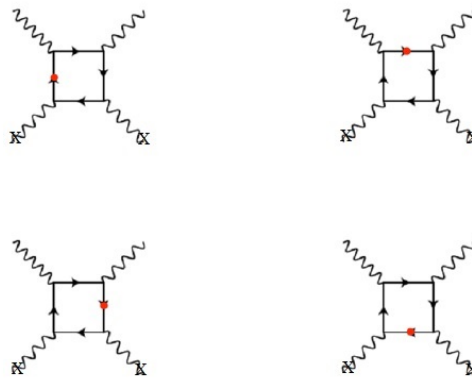


Figura 15 – Diagrama de Feynman para o espalhamento fóton-fóton em colisões de íons pesados. O X marca dois campos eletromagnéticos externos formados pelos íons pesados, em cada diagrama.

Da Figura acima, considerando as topologias mostrado na subseção (3.1.1) e discutida também em (3.1.2), considerando as regras de Furry, temos ao todo 24 diagramas que contribuem para a amplitude total. Nesse caso teremos uma expansão em séries que começa no diagrama, tipo do espalhamento Delbrück, e vai crescendo somando com os

valores de segunda ordem (o qual o parâmetro de Lorentz contribui com a quebra de simetria).

Escrevemos então, a expressão usando a equação (3.32), mas com uma modificação em dois vértices, pois temos que incluir o potencial de Coulomb que corresponde a $A_\mu = \left(\frac{Ze}{4\pi r}, \mathbf{0}\right)$ do qual $\tilde{A}_\mu(\mathbf{p}_1) = \left(\frac{Ze}{|\mathbf{p}_1|^2}, \mathbf{0}\right)$, $\tilde{A}_\mu(\mathbf{p}_2) = \left(\frac{Ze}{|\mathbf{p}_2|^2}, \mathbf{0}\right)$, sendo Z o número atômico do elemento que compõem os íons pesados, e \mathbf{p}_1 momento das partículas associada ao campo externo 1, e \mathbf{p}_2 momento das partículas associada ao campo externo 2.

Logo, a amplitude escrita com os propagadores não racionalizados é

$$\begin{aligned}
M_{a,b,c,d}^{\mu\nu\lambda\sigma}(p, p_1, p_2, p_3) = & -ib_\alpha \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left\{ (ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{p} - m} \tilde{A}_0(\mathbf{p}_2) (ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{p} + \not{p}_2 - m} \right. \\
& \times (ie\gamma^\lambda) \frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 + \not{p}_3 - m} \tilde{A}_0(\mathbf{p}_1) (ie\gamma^\sigma) \frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 - m} \\
& \left. \times \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{i}{\not{p} + \not{p}_1 - m} + \dots \right\} \quad (3.46)
\end{aligned}$$

A partir da equação (3.46), faz-se novamente a parametrização de Feynman, e a regularização implícita para resolver as integrais divergentes, e usando mais uma vez o FeynCal, para encontrar o resultado da amplitude total do espalhamento.

Em geral, a seção de choque total será dada pela forma

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(2\omega^2)} \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s^*1 s^*2} |M|^2, \quad (3.47)$$

onde $\frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s^*1 s^*2} |M|^2$ é o cálculo da amplitude quadrática total feito a média sobre todos os estados de polarizações com a quebra de simetria de Lorentz e contribuição dos campos de íons pesados de chumbo.

Em síntese buscamos encontrar a seção de choque diferencial em termos de Z e do parâmetro de violação de Lorentz b , e comparar com os dados experimentais. Mas isso é algo a ser concluído no próximo trabalho.

Importante entender que, em processos de espalhamentos fóton-fóton, principalmente na âmbito experimental, o cálculo da seção de choque, envolve várias informações, e considerações devem ser feitas, como mostra as Refs. [7 - 10, 35 - 40]. Na Figura (16), mostra alguns dados de trabalhos teóricos e são essas as informações e considerações que nos referimos.

System	$\sqrt{s_{NN}}$ (TeV)	$\mathcal{L}_{AB} \cdot \Delta t$ (per year)	γ	R_A (fm)	ω_{max} (GeV)	$\sqrt{s_{\gamma\gamma}^{max}}$ (GeV)	$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma}^{excl}$ [$m_{\gamma\gamma} > 5$ GeV]	$N_{\gamma\gamma}^{excl}$ (per year) [$m_{\gamma\gamma} > 5$ GeV, after cuts]
p-p	14	1 fb ⁻¹	7455	0.7	2450	4500	105 ± 10 fb	12
p-Pb	8.8	200 nb ⁻¹	4690	7.1	130	260	260 ± 26 pb	6
Pb-Pb	5.5	1 nb ⁻¹	2930	7.1	80	160	370 ± 70 nb	70

Figura 16 – $\sqrt{s_{NN}}$ é a energia de centro de massa de núcleo-núcleo, $L_{AB} \cdot \Delta t$, é a luminosidade integrada, γ é o fator de Lorentz, R_A é o raio efetivo, ω_{max} é anergia de centro de massa máximo no quadro do fóton, $\sqrt{s_{\gamma\gamma}^{max}}$ é a energia e centro de massa máximo para o quadro fóton-fóton, $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma}^{excl}$ seção de choque para massa invariante maior que 5 GeV, $N_{\gamma\gamma}^{excl}$ (por par) expectativa de sinal. Ver Ref. [7].

Os gráficos da Figura (18) representa esses valores para de predições.

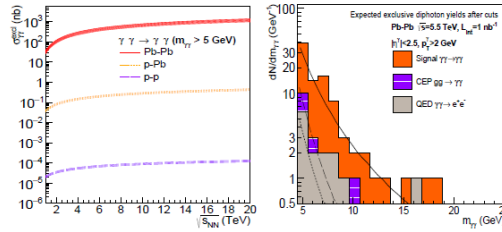


Figura 17 – Plote do lado esquerdo mostra as seções de choque transversais para fóton-fóton com massa de um par de fótons $m_{\gamma\gamma} > 5$ GeV para as colisões ultraperiféricas de chumbo-chumbo, próton-chumbo e próton-próton, em função da energia de centro de massa por par de núcleo-núcleo. No lado direito rendimento de fótons em função da massa invariante para o espalhamento elástico de fótons, esperados em colisões de chumbo-chumbo de $1nb^{-1}$ em uma energia de centro de massa $\sqrt{s_{NN}} = 5.5$ TeV. Ver Ref. [7].

Outros dados pela colaboração ALICE no LHC, e também pela colaboração CMS mostra a produção de fótons em colisões ultraperiféricas de íons pesados de chumbo, numa energia de centro de massa por par de núcleo no valor de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, Refs. [36, 37], obtiveram a seção de choque no limite de baixa energia de massa invariante $\sigma_{\gamma\gamma}^{e^+e^-} = [154 \pm 11(entrada) + 17(ou - 11)(saída)]\mu b$, e no limite de alta energia de massa invariante $\sigma_{\gamma\gamma}^{e^+e^-} = [91 \pm 10(entrada) + 11(ou - 8)(saída)]\mu b$.

Os dados experimentais obtidos pela colaboração ATLAS, Refs. [8, 10] mostra os resultados com os respectivos valores para colisões de chumbo-chumbo $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV, luminosidade integrada da produção exclusiva de dois fótons $L \cdot \delta t = 1.73$ nb⁻¹, energia transversal para o fóton $\omega = E_T^\gamma = 3$ GeV, pseudorapidez⁷ $|\eta_\gamma| = 2.4$, massa invariante para dois fótons $m_{\gamma\gamma} > 6$ GeV, de 59 eventos são observados 12 ± 3 de expectativa de saída, com uma significância de 8.2 de saída. E a seção de choque mensurada foi de $\sigma = [78 \pm 13(entrada) \pm 7(saída) \pm 3(luminosidade\ integrada)]nb$.

Na Figura abaixo, mostra a identificação e reconstrução de fótons para os dados citados acima.

⁷ Pseudorapidez dada em termos do ângulo polar θ , $\eta = -\ln \tan \theta/2$. Ref. [8]

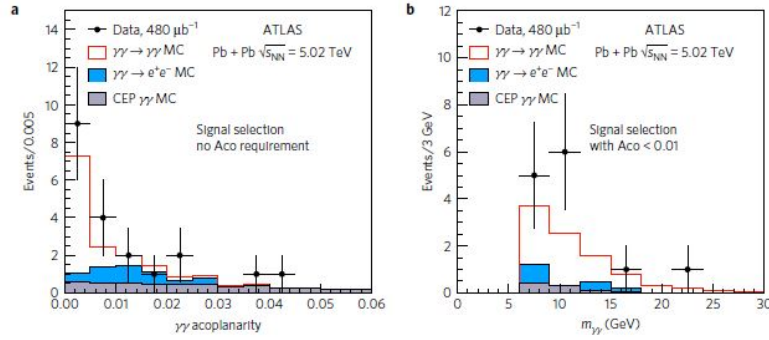


Figura 18 – Distribuição de energia pelo número de eventos. a) Acoplamento de fótons no valor $Aco < 0.01$. b) Massa invariante de dois fótons no acoplamento $Aco < 0.01$. Os valores são comparados com as previsões de Monte Carlos MC. Ver Ref. [8]

Outros dados são apresentados na figura seguinte.

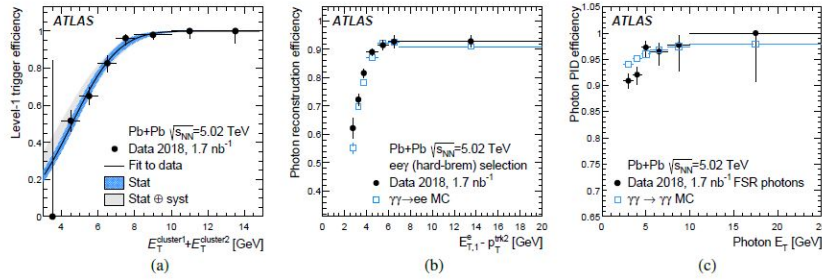


Figura 19 – a) Eficiência de reconstrução de fótons transversal reconstruída da interação $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$. b) Eficiência de fóton como função da energia transversal de fóton. c) Eficiência de identificação da partícula fóton em função da energia transversal de fóton. Ver Ref. [10]

A seção de choque nesses conceitos experimentais é encontrado da seguinte relação [10]

$$\sigma = \frac{N_{data} - N_{bkg}}{C \times \int L dt}, \quad (3.48)$$

onde N_{data} é o número de seleção de eventos de entrada, N_{bkg} é o número de seleção de eventos de saída, C é o fator de correção que representa a eficiência e resoluções, $\int L dt$ é a luminosidade integrada da amostra de dados dos eventos.

4 Conclusões

A primeira parte dessa dissertação é uma revisão sobre o cálculo da seção de choque diferencial para alguns espalhamentos básicos da Eletrodinâmica Quântica.

Para tal cálculo, é necessário calcular a amplitude de espalhamento, e para esse procedimento, usou-se as regras de Feynman para a leitura dos diagramas, de até dois vértices de interação.

Posteriormente, fez-se uns cálculos matriciais, onde toma-se o traço das matrizes gama, e por último, usamos a parametrização de Feynman para resolver as integrais. Dessa forma, obteve-se a amplitude total e a relação para a seção de choque diferencial, para os espalhamentos: Bhabha, Compton, Aniquilação por par, Möller, e Coulomb. Em ambos, a amplitude total do espalhamento depende da energia do centro de massa (chamada de energia transversal), da constante de estrutura fina, e do ângulo de espalhamento, tanto para o caso de baixa ordem de energia (onde a massa das partículas são diferentes de zero), tanto para o caso de alta ordem de energia (onde a massa fermiônica é aproximadamente zero).

Para o caso em que há um campo externo interagindo com as partículas num dado processo de espalhamento, a amplitude dependerá do potencial de Coulomb no espaço dos momentos, conseqüentemente a seção de choque dependerá do número atômico do elemento químico responsável por esse campo externo, como é mostrado no espalhamento Coulomb.

Na segunda parte, mostrou-se o cálculo da seção de choque para espalhamento fóton-fóton, onde usamos a lagrangeana da QED e aplicamos novamente as regras de Feynman para a descrição da amplitude do processo.

No cálculo da amplitude, usamos a parametrização Feynman nas integrais e foi necessário fazer uma renormalização (regularização) para resolver o problema da divergência que surge em alguns termos nas integrais.

Após vários cálculos, usando a ferramenta FeynCal, é encontrada a amplitude total do processo de espalhamento, que substituída na relação da seção de choque diferencial, encontra-se as mesmas dependências das seções de choques dos processos anteriores. Porém, nesse caso a constante de estrutura fina é de quarta ordem, e a massa invariante é de oitava ordem, enquanto que a frequência é da sexta ordem. E, como a seção de choque tem dimensão de área ao quadrado, ou de inverso quadrado da massa, fazendo $\omega \approx m$ obtemos a mesma relação de dimensão da seção de choque.

Na segunda parte também é apresentado brevemente duas extensões do espalha-

mento fóton-fóton: uma é para o caso em que usamos a lagrangeana estendida da QED por quebra das simetrias de Lorentz, onde consideramos a inserção no propagador do férmion; e a outra é o caso em que considerando a quebra de simetria de Lorentz inclui a interação de dois campos externos formados por colisões de íons pesados de chumbo. Em ambas são mostrado apenas a estrutura para calcular a amplitude do espalhamento. Os resultados serão incluídos no artigo que está sendo escrito.

Para o primeiro caso pretendemos encontrar o valor para o termo de quebra de simetria de Lorentz, e analisar as informações que o mesmo agrega ao processo de espalhamento fóton-fóton.

Para o segundo caso, pretendemos encontrar a seção de choque e comparar as informações com os dados experimentais mostrado na referência [2]. E como prévia do resultado, esperamos encontrar o valor muito pequeno para o parâmetro linear da quebra de simetria, o qual ao ser considerado aproximadamente zero, recuperarmos o valor obtido sem a quebra de simetria.

Como o resultado desse trabalho, ainda é parcial, o que podemos concluir no momento, é que todos os processos de espalhamentos da QED, sejam eles para ordens mais baixas nos diagramas de Feynman, ou ordens mais altas, seguem as mesmas regras para o cálculo de amplitude de espalhamento, que compõem os elementos de matriz de espalhamento, e servindo para o cálculo final da seção de choque.

Para o caso de calcular essas informações (matriz, amplitude, seção de choque) utilizando a lagrangeana estendida da QED por quebra de simetria de Lorentz e incluindo os campo externo formado por íons pesados, prevemos encontrar um valor pequeno para o termo de quebra de simetria. Esperamos também que o valor da seção de choque aumente para o caso em que há colisões de íons pesados de chumbo.

Independente do processo de espalhamento, a seção de choque é de extrema importância para as informações da dinâmica de partículas em altas energias, ou seja em colisões ultraperiféricas de partículas.

Referências

- [1] E. John, M. Nick E. and YOU. Tevong. **Light-by-Light Scattering Constraint on Born-Infeld***. Theory Phys. Rev. Lett. 118,261802-Published 27 June (2017). arXiv:1703.08450v2.
- [2] O. Halpern, Phys. Rev. 44 855.2 (1993), doi:10.1103/PhysRev.44.855.2.
- [3] W. Heisenberg, Z. Phys. 90 (1934) 209 Erratum: [Z. Phys. 92 692 (1934)], doi:10.1007/BF01340782, 10.1007/BF01333516.
- [4] H. Euler and B. Kockel, Naturwiss. 23 246 (1935), doi:10.1007/BF01493898.
- [5] W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. 98 714 (1936), doi:10.1007/BF01343663 [physics/0605038].
- [6] R. Karplus and M. Neuman. **The Scattering of Light by Light***, Phys. Rev. 83, 776 (1951).
- [7] D. d'Enterria and G. G. da Silveira, **Observing Light-by-Light Scattering at the Large Hadron Collider**, Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 080405, [Erratum: Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 129901], arXiv: 1305.7142 [hep-ph].
- [8] ATLAS Collaboration. **Evidência for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC**. Nature Physics 13, 852-858(2017), doi:10.1038/nphys4208, Received 09 February 2017, Accepted 15 June 2017, Published online 14 August 2017.
- [9] CMS Collaboration, **Evidence for light-by-light scattering and searches for axion-like particles in ultraperipheral PbPb collisions at $\sqrt{s_{NN}}= 5.02$ TeV**, (2018), arXiv: 1810.04602 [hep-ex].
- [10] ATLAS Collaboration, **Observation of light-by-light scattering in ultraperipheral Pb+Pb collisions with the ATLAS detector**. Phys. Rev. Lett. 123 (2019) 052001 DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.052001. arXiv:1904.03536v2 [hep-ex].
- [11] R. Jackiw and V. Alan Kostelecký. **Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics**. v82, n. 18, Physical Review Letters, may 1999.
- [12] M. Perez-Victoria. **Exact calculation of the radiatively-induced Lorentz and CPT violation in QED**. arXiv.org > hep-th > arXiv: hep-th / 9905061v3 (2001)
- [13] Alexander A. Andrianov, Paola Giacconi and Roberto Soldati. **Lorentz and CPT violations from Chern-Simons modifications of QED**. arXiv.org > hep-th > arXiv: hep-th / 0110279v3.
- [14] F. A. Brito, J. R. Nascimento, E. Passos and A. Yu. Petrova. **Lorentz-CPT violation, radiative corrections and finite temperature**. arXiv.org > hep-th > arXiv: 0705.1338v2 (2007).
- [15] THOMSON, M. **Modern Particle Physics**. Cambridge University Press,

Cambridge, 2013. 1 ed.

[16] AGUILAR, Arlene Cristina. **Diagramas de Feynman: O poder de uma imagem.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, n^o4, e4205. 2018. www.scielo.br/rbef doi:10.1590/1806-RBEF-2017-0378.

[17] McMAHOM, David. **Quantum Field Theory Demystified.**(2008)

[18] KAKU, Michio. **Quantum field theory: a modern introduction.**New York, 1984. 1 ed.

[19] HALZEN. F., Martin. A. D. **Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.** Wiley, New York, 1984. 1 ed.

[20] PESKIN. M. E., SCHOEDER. D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory.** Perseus, Reading, 1951. 1 ed.

[21] MACKEDANZ, Luiz Fernando.; NÓBREGA, Fábio Köpp.**Espalhamento Bhabha: Um Estudo Detalhado.**Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, n^o 3, e3318 (2018) www.scielo.br/rbef.

[22] <https://www.physics.ox.ac.uk/dwb/tasso.pdf> acesso em 07/10/2019 as 16:00h.

[23] POKRAKA, Andrzej. **Solutions to Peskin and Schroder.**

<http://www.physics.mcgill.Peskin/Chap5.pdf>.

[24] CAMARGO, Gabriel Fagundes. **Espalhamento Fóton-Fóton: Ambiguidades e Seção de Choque.** (2013). Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais.

[25] CARDOSO. Lucas T, **Estudo das Divergências em Eletrodinâmica Quântica ao Nível um Laço com a Utilização da Regularização Implícita**, Dissertação de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2011.

[26] Yi Liang.; Andrzej Czarnecki. **Photon–photon scattering: a tutorial.** Canadian Journal of Physics, 2012, 90(1): 11-16, <https://doi.org/10.1139/p11-144>.

[27] F. A. Brito; E. Passos and P. V. Santos. **On the effective action of the vacuum photon splitting in Lorentz-violating QED.** arXiv.org > hep-th > arXiv:1101.5390v2.

[28] W.F.Chen, **Understanding radiatively induced Lorentz-CPT violation in differential regularization**, Phys. Rev. D 60, 085007 – Published 27 September 1999.

[29] V.A. Kostelecky and A.G.M. Pickering, Phys. Rev. Lett. 91, 031801 (2003).

[30] Y.M.P. Gomes, J.T. Guaitolini Junior, **Elastic light-by-light scattering in a nonminimal Lorentz violation scenario.**

<https://journals.aps.org/prd/pdf/10.1103/PhysRevD.99.055006>.

[31] V. B. Beretetskii, E. M. Lifshitz e L. P. Pitaevskii, Quantum Electrodynamics, Pergamon Press (1982).

[32] A. Rebham.; G. Turk. **Polarization effects in light-by-light scattering: Euler-Heisenberg versus Bor-Infeld.** Int. J. Mode. Phys. A32, 1750053(2017), doi:10.114/S0217751X17500531, arXiv:170.07375.

- [33] Taekoon Lee. **Delbrück scattering in small scattering angle region**. Department of Physics, Kunsan National University, Kunsan 54150, Korea arXiv:1711.00160v2 [hep-ph] 2 Nov 2018.
- [34] Martin Schumacher. **Delbrück scattering**. Article in Radiation Physics and Chemistry · August 1999. DOI: 10.1016/S0969-806X(99)00289-3.
- [35] Mariola Klusek-Gawenda, Piotr Lebiedowicz, and Antoni Szczurekc. **Light-by-light scattering in ultraperipheral PbPb collisions at the Large Hadron Collider**. arXiv:1601.07001v1 [nucl-th] 26 Jan 2016.
- [36] CMS Collaboration, **Studies of jet quenching using isolated-photon + jet correlations in PbPb and pp collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV**, Phys. Lett. B 718 (2013) 773, doi:10.1016/j.physletb.2012.11.003, arXiv:1205.0206.
- [37] ALICE Collaboration, **Measurement of jet suppression in central Pb–Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV**, Phys. Lett. B 746 (2015) 1, doi:10.1016/j.physletb.2015.04.039, arXiv:1502.01689.
- [38] CMS Collaboration, **Study of jet quenching with Z+jet correlations in PbPb and pp collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV**, arXiv:1702.01060v2 [nucl-ex] 26 Aug 2017.
- [39] T. Mariz, J. R. Nascimento, and E. Passos, **Remarks on Lorentz and CPT Violation in Field Theory**. Brazilian Journal of Physics, vol. 36, no. 4A, December, 2006. Disponível em <https://www.scielo.br/pdf/bjp/v36n4a/a10v364a.pdf>.
- [40] P. Niau Akmansoy, L. G. Medeiros, **Constraining nonlinear corrections to Maxwell electrodynamics using $\gamma\gamma$ scattering**. arXiv:1809.01296v2 [hep-ph] 24 Jun 2019.

Apêndices

APÊNDICE A – Material suplementar para o capítulo 2

A.1 Propriedades e teorema do traço

1. $Tr(A) + Tr(B) = Tr(A + B)$
2. $Tr(AB...YZ) = Tr(ZAB...Y)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$
4. $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$
5. $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu} Tr(I)$, sendo (I) matriz identidade, onde $Tr(I) = 4$
6. $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$,
7. $Tr(\gamma^5) = 0$
8. $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = Tr(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^5) = -Tr(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = -Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = 0$, com $\gamma^5 \gamma^5 = I$, como $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$
9. $2Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 2g^{\mu\nu} Tr(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - 2g^{\mu\sigma} Tr(\gamma^\nu \gamma^\rho) + 2g^{\mu\rho} Tr(\gamma^\nu \gamma^\sigma)$
10. $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}$
11. $Tr(\not{a} \not{b}) = 4(a \cdot b)$, o traço de $\not{a} \not{b}$ é o produto interno de a com b , sendo a notação compacta de Dirac $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ e $\not{b} = \gamma^\nu b_\nu$.
12. $Tr(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$
13. $Tr(\gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\sigma$, sendo $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = -1$ para permutação par, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = 1$ para permutação ímpar, ou $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ se dois índices forem iguais.

A.2 Propriedades das matrizes gama

1. $\gamma^a \gamma^b = 2g^{ab} - \gamma^b \gamma^a$
2. $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$
3. $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$
4. $\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b$
5. $\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c} \not{b} \not{a}$
6. $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$

A.3 Relações de completeza

1. $\sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) = \gamma^\mu p_\mu + mc$, soma das polarizações dos elétrons, sendo $u_s(p)$ polarização do elétron de entrada, e $\bar{u}_s(p)$ polarização do elétron de saída.

2. $\sum_{s=1}^2 v_s(p)\bar{v}_s(p) = \gamma^\mu p_\mu - mc$, soma das polarizações dos pósitrons, sendo $v_s(p)$ polarização do pósitron de entrada, e $\bar{v}_s(p)$ polarização do pósitron de saída.

A.4 Relações dos produtos dos espinores

1. $\bar{u}^1 u^1 = 2mc$, para espinores normalizados de elétrons.
2. $\bar{v}^1 v^1 = -2mc$, para espinores normalizados de pósitrons
3. $\bar{u}^1 u^2 = 0$, para espinores ortogonais de elétrons.
4. $\bar{v}^1 v^2 = 0$, para espinores ortogonais de pósitrons.

A.5 Variáveis de Mandelstam

1. $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$, canal espacial.
2. $t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$, canal de tempo.
3. $u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2$, canal de termos cruzados.

Para interação de férmions com fótons, podemos ainda expressar as variáveis nas relações seguintes

4. $s = (p + k)^2 - m^2 = p^2 + 2p \cdot k + k^2 - m^2 = 2p \cdot k$, onde $p^2 = m^2 c^2 = m^2$ para $c = 1$, e $k^2 = m^2 c^2 = 0$ para $m = 0$.

5. $u = (p - k')^2 - m^2 = p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2 = -2p \cdot k'$

Em termos de energia, as variáveis são expressas nas formas:

6. $s = 4E^2$, pois $s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2$, onde num limite relativístico a massa das partículas, de forma que $2p_1 p_2 = 2 |E, p| (E, -p)^T = 2(E^2 - |p|^2)$, que é a relação de energia-momento, sendo $p_1 \cdot p_2 = |p|^2 \cos\theta$, sendo $\theta = 180^\circ$, então $s = 4E^2$.

7. $t = -4E^2 \sin^2(\theta/2)$, pois $t = -2 |p|^2 (1 - \cos\theta) = -4E^2 \sin^2\theta/2$.

8. $u = -4E^2 \cos^2(\theta/2)$, pois $u = -2 |p|^2 (1 + \cos\theta) = -4E^2 \cos^2\theta/2$

A.6 Produto escalar dos momentos com valores para o centro de massa

1. $p_0 \cdot p_0 = p_1 \cdot p_1 = p_2 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_3 = 0$
2. $p_0 \cdot p_2 = \omega^2(1 + \cos\theta)$
3. $p_0 \cdot p_3 = \omega^2(1 - \cos\theta)$
4. $p_1 \cdot p_2 = \omega^2(1 - \cos\theta)$
5. $p_1 \cdot p_3 = \omega^2(1 + \cos\theta)$
6. $p_2 \cdot p_3 = 2\omega^2$
7. $p_0 \cdot p_1 = 2\omega^2$

A.7 Integral de espaço de fase

A integral de espaço de fase contabiliza a densidade de probabilidade de um dado evento ocorrer, denominando W_{fi} essa densidade de probabilidade, temos, já mostrado experimentalmente, que ela é proporcional a seção de choque σ . Considerando um processo ($A + B \rightarrow C + D$), escrevemos W_{fi} na forma

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV}. \quad (\text{A.1})$$

onde T é o intervalo de tempo de interação, V é o volume, e T_{fi} é a amplitude de transição, dada por

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) M. \quad (\text{A.2})$$

onde M é a amplitude invariante, $N_A N_B N_C N_D$ são as constantes de normalizações, que $N = 1/\sqrt{V}$ e $\delta^{(4)}$ é a delta de Dirac, surge da integral sobre o espaço dos momentos, logo

$$W_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)}{V^4} |M|^2. \quad (\text{A.3})$$

Como já mencionado, experimentalmente para o processo de ($A + B \rightarrow C + D$), a relação da seção de choque com a densidade de probabilidade W_{fi} é dada por

$$\sigma = \frac{W_{fi}}{f_i} \times (n_f) \quad (\text{A.4})$$

onde f_i é fluxo inicial de partículas, e n_f é o número de estados finais.

Por partícula o número de estado final é

$$n_f = \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3 2E}. \quad (\text{A.5})$$

Para duas partículas finais, C e D

$$n_f = \frac{V d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{V d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}. \quad (\text{A.6})$$

O fluxo inicial de partículas para A,B, é

$$f_i = |V_A| \frac{2E_A}{V} \frac{2E_B}{V}. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo esses valores na equação (A.4), escrevemos na forma diferencial,

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{V^2}{|V_A| 2E_A 2E_B} \frac{1}{V^4} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \\ &\times \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{2E_C} \frac{d^3 p_D}{2E_D} V^2 |M|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Da equação acima, temos que, o fator de invariância de Lorentz é

$$dQ = \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}, \quad (\text{A.9})$$

e o fluxo incidente medido no laboratório é

$$F = |V_A| 2E_A 2E_B, \quad (\text{A.10})$$

Para o caso colinear de colisão de A com B , F se torna

$$F = |V_A - V_B| 2E_A 2E_B, \quad (\text{A.11})$$

sendo $V_A = p_A/E_A$, e $V_B = p_B/E_B$, então

$$F = 4(|p_A| E_B + |p_B| E_A) = 4p_i \sqrt{s}, \quad (\text{A.12})$$

sendo $s = (E_A + E_B)^2$ a energia de centro de massa, e $p_i = p_A = p_B$ o momento das partículas iniciais. Da equação (A.9), temos que

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}} d\Omega, \quad (\text{A.13})$$

onde $p_f = p_C = p_D$ são os momentos das partículas do estado final, e $s = (E_C + E_D)^2$ é a energia de centro de massa, e $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido.

Logo, escrevemos a seção de choque diferencial na forma

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{F} dQ, \quad (\text{A.14})$$

onde substituindo as equações (A.12), (A.13) e (A.14), a seção de choque diferencial para um centro de massa tem seguinte relação com a amplitude quadrática

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |M|^2. \quad (\text{A.15})$$

A.8 Cálculo para o campo de Coulomb A_μ

O campo de Coulomb corresponde a $A^\mu = \left(\frac{Ze}{4\pi r}, \mathbf{0}\right)$, onde $\mathbf{0}$ representa um vetor nulo, Z o número atômico, r as coordenadas espaciais. Para o espalhamento de partículas trabalhamos com espaço de momentos, então, temos que $\tilde{A}_\mu(q) = \left(\frac{Ze}{|q|}, \mathbf{0}\right)$, sendo $q = p' - p$, onde p é momento da partícula no estado inicial, p' no estado final, e q o momento do fóton.

Usando as regras de Feynman, escrevemos o elemento de matriz de espalhamento na forma

$$iM = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu(p' - p) \quad (\text{A.16})$$

e a média quadrática da amplitude de espalhamento é

$$\frac{1}{2} \sum_s \langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_s \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu \tilde{A}_\mu)u(p)u^\dagger(p)ie\gamma^\nu \tilde{A}_\nu^\dagger \bar{u}^\dagger(p'). \quad (\text{A.17})$$

Usando o traço das matrizes gama

$$\frac{1}{2} \sum_s \langle |M|^2 \rangle = \frac{e^2}{2} \text{Tr}[u(p')\bar{u}(p')\gamma^\mu \bar{u}(p)u(p)\gamma^\nu]\tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu, \quad (\text{A.18})$$

e a relação de completeza, Apêndice (A.3.1), com $c = 1$ e $\not{p}' = \gamma^\mu p'_\mu$ e $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s \langle |M|^2 \rangle &= \frac{e^2}{2} \text{Tr}[(\not{p}' + m)\gamma^\mu (\not{p} + m)\gamma^\nu]\tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu \\ &= \frac{e^2}{2} \text{Tr}[\not{p}'\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu + m^2\gamma^\mu \gamma^\nu]\tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu \\ &= \frac{e^2}{2} \text{Tr}[\not{p}'\gamma^\mu \tilde{A}_\mu \not{p}\gamma^\nu \tilde{A}_\nu + m^2\gamma^\mu \tilde{A}_\mu \gamma^\nu \tilde{A}_\nu] \\ &= 2e^2[-(p \cdot p')(\tilde{A} \cdot \tilde{A}) + 2(p \cdot \tilde{A})(p' \cdot \tilde{A}) + (\tilde{A} \cdot \tilde{A})m^2] \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

Da relação energia-momento, temos $p = (E, \mathbf{p})$, $p' = (E', \mathbf{p}')$, $E = E'$, $p' \cdot p = |p|^2 \cos\theta$, $|q|^2 = 2|p|^2 - 2|p|^2 \cos\theta$, onde E é a energia, também substituindo o valor de \tilde{A} , logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s \langle |M|^2 \rangle &= 2e^2[2EE' - p' \cdot p + m^2] \left(\frac{Ze}{|q|^2}\right)^2 \\ &= \langle |M|^2 \rangle = 2e^2[E^2 - |p|^2 \cos\theta + m^2] \left(\frac{Ze}{2|p|^2(1 - \cos\theta)}\right)^2. \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

Usando as relações $|p| = |p'| = m\beta$, sendo m a massa do elétron, β a velocidade limite, a constante de estrutura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \leftrightarrow 4\pi\alpha = e^2$, a relação trigonométrica $\sin^2\theta = (1 - \cos^2\theta)$, também sabendo que da integral de espaço de fase, para este processo, obtém

$$d\sigma = \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{|M|^2}{2E'2E\beta} (2\pi)\delta(E - E'), \quad (\text{A.21})$$

organiza-se os termos e a média quadrática da amplitude de espalhamento é

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{4\pi^2 Z^2 \alpha^2 m^2}{|p|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{A.22})$$

Substituindo o valor da amplitude na relação da seção de choque diferencial, temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 m^2}{16E\beta |p|^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{A.23})$$

Como $|p| = m\beta$, rescrevemos a equação (A.22)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{16E\beta^2 |p|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{A.24})$$

APÊNDICE B – Material suplementar para o capítulo 3

B.1 Cálculo das integrais de Feynman

Para solucionar as integrais finitas decorrentes do cálculo das amplitudes, usamos a parametrização de Feynman - técnica que consiste em parametrizar o denominador reescrevendo as integrais de tal forma que, as novas variáveis de integração sejam manipuladas. Algumas das identidades dessa parametrização estão listadas abaixo, e podem ser encontradas, de forma análoga, em [25]

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dz}{[(B-A)z + A]^2}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{1}{A^2B} = 2 \int_0^1 \frac{(1-z)dz}{[(B-A)z + A]^3}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{1}{A^3B} = 3 \int_0^1 \frac{(1-z)^2 dz}{[(B-A)z + A]^4}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{1}{A^4B} = 4 \int_0^1 \frac{(1-z)^3 dz}{[(B-A)z + A]^5}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(C-A)z + (B-A)y + A]^3}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{A^2BC} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-z-y)dy}{[(C-A)z + (B-A)y + A]^4}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{A^3BC} = 12 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-z-y)^2 dy}{[(C-A)z + (B-A)y + A]^5}, \quad (\text{B.7})$$

B.1.1 Cálculo das integrais para o espalhamento fóton-fóton sem a quebra de invariância de Lorentz

Para solucionar as integrais finitas usamos a parametrização de Feynman nas equações (3.8 - 3.10), em observância, as identidades acima e a referência [24], reescrevemos na forma

$$M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \\ \times \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_1 + m)\gamma^\sigma(\not{p} - \not{k}_3 + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} - \not{k}_1 + m)]}{[p^2 - 2p.A + B]^4}, \quad (\text{B.8})$$

onde $A = k_1 z_1 + (k_3 - k_1)z_2 + k_4 z_3$, e $B = 2k_1.k_2 - m^2$. Escrito em forma de $A^\mu = k_1^\mu z_1 + (k_3 - k_1)^\mu z_2 + k_4^\mu z_3$;

$$M_2^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \\ \times \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_1 + m)\gamma^\lambda(\not{p} - \not{k}_3 + m)\gamma^\sigma(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)]}{[p^2 - 2p.A + B]^4}, \quad (\text{B.9})$$

onde $A = k_1 z_1 + (k_4 - k_1)z_2 + k_3 z_3$, e $B = 2k_1.k_2 - m^2$. Escrito em forma de $A^\mu = k_1^\mu z_1 + (k_4 - k_1)^\mu z_2 + k_3^\mu z_3$;

$$M_3^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \\ \times \frac{Tr[\gamma^\sigma(\not{p} - \not{k}_2 + \not{k}_4 + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k}_3 + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)]}{[p^2 - 2p.A + B]^4}, \quad (\text{B.10})$$

onde $A = k_1 z_1 + (k_3 - k_1)z_2 - k_2 z_3$, e $B = -2k_1.k_4 - m^2$. Escrito em forma de $A^\mu = k_1^\mu z_1 + (k_3 - k_1)^\mu z_2 - k_2^\mu z_3$.

O próximo passo, é fazer uma substituição de termos para reduzir essas expressões algébricas, e facilitar a resolução do cálculo. Denominamos para a equação (B.8) $t = p - A$, $\not{a} = \not{A} - \not{k}_1 - \not{k}_2$, $\not{b} = \not{A} - \not{k}_3$, $\not{c} = \not{A}$, $\not{d} = \not{A} - \not{k}_1$; para a equação (B.9) $t = p - A$, $\not{a} = \not{A} - \not{k}_1 - \not{k}_2$, $\not{b} = \not{A} - \not{k}_4$, $\not{c} = \not{A}$, $\not{d} = \not{A} - \not{k}_1$; para a equação (B.10) $t = p - A$, $\not{a} = \not{A} - \not{k}_1 + \not{k}_4$, $\not{b} = \not{A} - \not{k}_3$, $\not{c} = \not{A}$, $\not{d} = \not{A} - \not{k}_1$.

Então,

$$M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t \\ \times \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{t} + \not{a} + m)\gamma^\sigma(\not{t} + \not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{t} + \not{c} + m)\gamma^\nu(\not{t} + \not{d} + m)]}{[t^2 - A^2 + B]^4}, \quad (\text{B.11})$$

$$M_2^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t \\ \times \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{t} + \not{a} + m)\gamma^\sigma(\not{t} + \not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{t} + \not{c} + m)\gamma^\nu(\not{t} + \not{d} + m)]}{[t^2 - A^2 + B]^4}, \quad (\text{B.12})$$

$$M_3^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t$$

$$\times \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{t} + \not{d} + m)\gamma^\sigma(\not{t} + \not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{t} + \not{c} + m)\gamma^\nu(\not{t} + \not{d} + m)]}{[t^2 - A^2 + B]^4}. \quad (\text{B.13})$$

Aplicamos as propriedades do traço das matrizes gama, nas equações acima, separando a dependência em t

$$M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t$$

$$\times \frac{t^2 F^{\mu\nu\lambda\sigma} + G^{\mu\nu\lambda\sigma} + Tr[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\nu \not{t}]}{[t^2 - s]^4}, \quad (\text{B.14})$$

onde $s = A^2 - B$, e

$$F^{\mu\nu\lambda\sigma} = -4m^2(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) - \frac{1}{2}Tr[\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\lambda\not{c}\gamma^\nu\not{d} + \gamma^\mu\gamma^\lambda\not{b}\gamma^\sigma\gamma^\nu\not{d}$$

$$+ \gamma^\mu\gamma^\nu\not{b}\gamma^\lambda\not{c}\gamma^\nu + (\gamma^\mu\not{d}\gamma^\sigma)(\gamma^\lambda\not{d} + \gamma^\nu\not{c}\gamma^\lambda + \not{b}\gamma^\lambda\gamma^\nu)],$$

$$G^{\mu\nu\lambda\sigma} = Tr[\gamma^\mu(\not{d} + m)\gamma^\sigma(\not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{c} + m)\gamma^\nu(\not{d} + m)]. \quad (\text{B.15})$$

O mesmo para as amplitude M_2 a M_3 . Vê-se que surge uma integral divergente do tipo

$$D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = \int d^4t \frac{Tr[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\nu \not{t}]}{[t^2 - s]^4}, \quad (\text{B.16})$$

também para $D_2^{\mu\nu\lambda\sigma}$ e $D_3^{\mu\nu\lambda\sigma}$, e estas precisam ser regularizadas.

Aplicando o traço na equação acima, escrevemos

$$D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \int_t \frac{1}{[t^2 - s]^4} [(t^2)^2(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma})$$

$$- 2t^2(t^\mu t^\nu g^{\lambda\sigma} + t^\mu t^\sigma g^{\nu\lambda} + t^\nu t^\lambda g^{\mu\sigma} + t^\lambda t^\sigma g^{\mu\nu}) + 8t^\mu t^\nu t^\lambda t^\sigma]. \quad (\text{B.17})$$

Então, na Ref. [24] é aplicada a invariância de rótulo, e feito a regularização implícita, Apêndice (B.2.1), e a contribuição da integral divergente

$$D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \left\{ \frac{1}{3} \eta^{\mu\nu\lambda\sigma} 2(\pi)^4 \left[I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{m^2}{s}\right) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{i\pi^2}{6} (3g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \right\}, \quad (\text{B.18})$$

onde $\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} = g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}$. Resultados idênticos para as integrais divergentes das demais amplitudes.

Voltando a equação (B.14) e substituindo (B.18), escrevemos

$$M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3$$

$$\times \frac{t^2 F^{\mu\nu\lambda\sigma} + G^{\mu\nu\lambda\sigma}}{[t^2 - s]^4} + 4 \left\{ \frac{1}{3} \eta^{\mu\nu\lambda\sigma} 2(\pi)^4 \left[I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{m^2}{s}\right) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{i\pi^2}{6} (3g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \right\}. \quad (\text{B.19})$$

Organizando a equação acima e substituindo $s = A^2 - B$, temos

$$\begin{aligned}
M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \\
&\times (-i\pi^2) \left\{ \frac{2F^{\mu\nu\lambda\sigma}}{B - A^2} + \frac{G^{\mu\nu\lambda\sigma}}{[B - A^2]^2} + 8\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} \left[\frac{(2\pi)^4}{(i\pi)^2} I_{\log}(m^2) + \ln \left(\frac{m^2}{A^2 - B} \right) \right] \right. \\
&\left. - 4(3g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \right\}. \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Com isto, as integrais da equação acima, possuem soluções finitas, logo, o próximo passo é resolvê-las, para isto, introduzimos as relações das coordenadas espaciais - z_1 , z_2 , e z_3 , que correspondem ao espaço dos momentos. Denominando $U = 4[z_2(z_2 - z_1 - z_3)\sin^2(\theta/2) - z_3z_1\cos^2(\theta/2) + z_3]$ e para $B - A^2 = m^2 - m^2\xi^2U$, onde $\xi \rightarrow \omega/m$, escrevemos (B.15)

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -4m^2(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) - \frac{1}{2}Tr \left[\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\lambda\cancel{b}\gamma^\sigma\gamma^\nu\cancel{d} \right. \\
&\quad \left. + \gamma^\mu\gamma^\nu\cancel{b}\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\sigma + (\gamma^\mu\cancel{d}\gamma^\sigma)(\gamma^\lambda\cancel{d} + \gamma^\nu\cancel{d}\gamma^\lambda + \cancel{b}\gamma^\lambda\gamma^\nu) \right] \\
&= -4m^2\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} - \frac{1}{2}\omega^2R^{\mu\nu\lambda\sigma}, \\
G^{\mu\nu\sigma\lambda} &= Tr[\gamma^\mu(\cancel{d} + m)\gamma^\sigma(\cancel{b} + m)\gamma^\lambda(\cancel{d} + m)\gamma^\nu(\cancel{d} + m)] \\
&= Tr[\gamma^\mu\cancel{d}\gamma^\sigma\cancel{b}\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu] + m^2Tr \left[\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\sigma\cancel{b}\gamma^\lambda\gamma^\nu\cancel{d} \right. \\
&\quad \left. + \gamma^\mu\gamma^\sigma\cancel{b}\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu + (\gamma^\mu\cancel{d}\gamma^\sigma)(\gamma^\lambda\gamma^\nu\cancel{d} + \gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu + \cancel{b}\gamma^\lambda\gamma^\nu) \right] + m^4Tr[\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu] \\
&= \omega^4S^{\mu\nu\lambda\sigma} + m^2\omega^2R_0^{\mu\nu\lambda\sigma} + m^4T^{\mu\nu\lambda\sigma}, \tag{B.21}
\end{aligned}$$

ou seja, escrevemos $F^{\mu\nu\lambda\sigma}$ e $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ em termos de outros tensores, que são: $\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} = (g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma})$; $R^{\mu\nu\lambda\sigma} = (1/\omega^2)Tr[\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\lambda\cancel{b}\gamma^\sigma\gamma^\nu\cancel{d}\gamma^\mu\gamma^\nu\cancel{b}\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\sigma + (\gamma^\mu\cancel{d}\gamma^\sigma)(\gamma^\lambda\cancel{d} + \gamma^\nu\cancel{d}\gamma^\lambda + \cancel{b}\gamma^\lambda\gamma^\nu)]$; $S^{\mu\nu\lambda\sigma} = (1/\omega^4)Tr[\gamma^\mu(\cancel{d} + m)\gamma^\sigma(\cancel{b} + m)\gamma^\lambda(\cancel{d} + m)\gamma^\nu(\cancel{d} + m)]$; $R_0^{\mu\nu\lambda\sigma} = (1/\omega^2)Tr[\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\sigma\cancel{b}\gamma^\lambda\gamma^\nu\cancel{d}\gamma^\mu\gamma^\sigma\cancel{b}\gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu + (\gamma^\mu\cancel{d}\gamma^\sigma)(\gamma^\lambda\gamma^\nu\cancel{d} + \gamma^\lambda\cancel{d}\gamma^\nu + \cancel{b}\gamma^\lambda\gamma^\nu)]$; $T^{\mu\nu\lambda\sigma} = Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma]$.

Logo,

$$\begin{aligned}
M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \\
&\times \left\{ \frac{8\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} + \xi^2R^{\mu\nu\lambda\sigma}}{1 - \xi^2U} + \frac{\xi^4S^{\mu\nu\lambda\sigma} + \xi^2R_0^{\mu\nu\lambda\sigma} + T^{\mu\nu\lambda\sigma}}{[1 - \xi^2]^2} \right. \\
&\quad \left. + 8\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} \left[\frac{(2\pi)^4}{(i\pi)^2} I_{\log}(m^2) + \ln \left(\frac{m^2}{A^2 - B} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 4(3g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \right\}. \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Expandindo em ξ^2

$$M_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ 8\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} + (R + 8\eta^{\mu\nu\lambda\sigma}U + 8\eta^{\mu\nu\lambda\sigma}U^2)\xi^4 + \dots \right. \\
& T^{\mu\nu\lambda\sigma} + (R_0^{\mu\nu\lambda\sigma} + 2TU)\xi^2 + (S^{\mu\nu\lambda\sigma}U + 2T^{\mu\nu\lambda\sigma}U^2)\xi^4 + \dots \\
& \left. + 8\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} \left[\frac{(2\pi)^4}{(i\pi)^2} I_{\log}(m^2) + \ln(m^2)U\xi^2 + \frac{1}{2}U^2\xi^4 + \dots \right] \right. \\
& \left. - 4(3g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \right\}. \tag{B.23}
\end{aligned}$$

Portanto, a equação acima, está apta para ser integrada, e o cálculo desta, está feito no Apêndice (B) da referência [26].

B.1.2 Cálculo das integrais para o espalhamento fóton-fóton com a quebra de invariância de Lorentz

Para a amplitude com a quebra de simetria de Lorentz, usamos procedimentos semelhantes ao que foi feito na referencia [29], logo, escrevemos a integral de Feynman na forma

$$\begin{aligned}
M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4p \\
&\times \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{p}_3 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)\gamma^\lambda(\not{p} + m)\gamma^\sigma(\not{p} - \not{p}_1 + m)\gamma^\alpha\gamma_5 b_\alpha(\not{p} - \not{p}_1 + m)]}{(p_3^2 - m^2)[p_4^2 - m^2](p^2 - m^2)[(p^2 - p_1^2 - m^2)^2]} \tag{B.24}
\end{aligned}$$

onde $\not{p}_3 = \not{p} - \not{p}_1 - \not{p}_2$, $\not{p}_4 = \not{p} - \not{p}_1 - \not{p}_2 - \not{p}_3$, $p_3^2 = p^2 - p_1^2 - p_2^2$, $p_4^2 = p^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$

Agora, reescrevemos a amplitude acima, usando a parametrização de Feynman, onde para o denominador substituímos $t = p - q$, $\not{q} = \not{q} - \not{p}_3$, $\not{b} = \not{q} - \not{p}_4$, $\not{c} = \not{q}$, $\not{d} = \not{q} - \not{p}_1$. Sendo $q = z_1 p_1 + z_2 p_{12} + z_3 p_{123}$ e $q^2 = 0$, onde $p_{12} = (p_1 + p_2)$, $p_{123} = (p_1 + p_2 + p_3)$.

$$\begin{aligned}
M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t \\
&\times \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{t} + \not{q} + m)\gamma^\nu(\not{t} + \not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{t} + \not{c} + m)\gamma^\sigma(\not{t} + \not{d} + m)\gamma^\alpha b_\alpha \gamma_5]}{[t^2 - m^2 + 2t \cdot q]^n}, \tag{B.25}
\end{aligned}$$

com $n = (4, 5)$. O que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t \\
&\times \frac{t^2 F^{\mu\nu\lambda\sigma} + G^{\mu\nu\lambda\sigma} + Tr[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\nu \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\alpha b_\alpha \gamma_5]}{[t^2 - s]^n}, \tag{B.26}
\end{aligned}$$

sendo $s = m^2 - 2t \cdot q$, e para $n = 4$ existe um termo divergente isto é, para cada loop haverá um termo que diverge, e é necessário fazer uma renormalização. Portanto, o termo é

$$D_a^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \int d^4t \frac{Tr[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\nu \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\alpha b_\alpha \gamma_5]}{[t^2 - s]^4}. \tag{B.27}$$

Se realizarmos o traço na equação acima, $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma_5] = 0$. Para evitar isto, e ser possível resolver a divergência, reescrevemos na forma

$$D_a^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv b_\alpha p_\beta \int d^4t \frac{Tr[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\nu \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5]}{[t^2 - s]^4}. \tag{B.28}$$

Agora, aplicamos o traço das matrizes gama, e faz-se a regularização dimensional, ou a implícita, para obter a contribuição do termo divergente. No Apêndice (B.2) é feito este cálculo.

Voltamos a equação (B.26) , escrevemos $G^{\mu\nu\lambda\sigma} = A$, e $F^{\mu\nu\lambda\sigma} = B$. Onde,

$$A = 4!b_\alpha p_\beta \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \times \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{d} + m)\gamma^\nu(\not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{c} + m)\gamma^\sigma(\not{d} + m)\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_5]}{(t^2 - m^2 + 2t.q)^5}, \quad (\text{B.29})$$

$$B = -3!b_\alpha p_\beta \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \times \frac{Tr[\not{d}\gamma^\mu(\not{b} + m)\gamma^\nu(\not{c} + m)\gamma^\lambda(\not{d} + m)\gamma^\sigma\gamma^\alpha\gamma_5]}{(t^2 - m^2 + 2t.q)^4}. \quad (\text{B.30})$$

Sabemos que das equações acima, vamos obter de $A = A_1 + m^2 A_2 + m^4 A_3$, e de $B = B_1 + m^2 B_2$, ou seja

$$A = 4!b_\alpha p_\beta \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t (A_1 + m^2 A_2 + m^4 A_3) \quad (\text{B.31})$$

$$B = -3!b_\alpha p_\beta \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t (B_1 + m^2 B_2) \quad (\text{B.32})$$

onde

$$A_1 = b_\alpha p_\beta \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \frac{Tr[\gamma^\mu \not{d} \gamma^\nu \not{b} \gamma^\lambda \not{c} \gamma^\sigma \not{d} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5]}{(t^2 - m^2 + 2t.q)^5}, \quad (\text{B.33})$$

$$A_2 = b_\alpha p_\beta \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \times \frac{Tr[(\gamma^\mu \not{d} \gamma^\nu \not{b} \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) + (\gamma^\mu \not{d} \gamma^\nu \gamma^\lambda \not{c} \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) + (\gamma^\mu \not{d} \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \not{d} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5)]}{(t^2 - m^2 + 2t.q)^5}, \quad (\text{B.34})$$

$$A_3 = b_\alpha p_\beta \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \frac{Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5]}{(t^2 - m^2 + 2t.q)^5}. \quad (\text{B.35})$$

$$B_1 = - \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \frac{Tr[\gamma^\mu \not{b} \gamma^\nu \not{c} \gamma^\lambda \not{d} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5 b_\alpha p_\beta]}{(t^2 - m^2 + 2t.q)^4}, \quad (\text{B.36})$$

$$B_2 = -b_\alpha p_\beta \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \times \frac{Tr[(\gamma^\mu \not{d} \gamma^\nu \not{b} \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) + (\gamma^\mu \not{d} \gamma^\nu \gamma^\lambda \not{c} \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) + (\gamma^\mu \not{d} \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \not{d} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5)]}{(t^2 - m^2 + 2t.q)^4}, \quad (\text{B.37})$$

Próximo passo, calcular todos essas integrais, em prol de obter M_a e de forma semelhante para os demais diagramas que contribuem para a amplitude total.

B.2 Técnicas de regularização para a QED

Técnicas de regularização corresponde a métodos utilizados para resolver divergências nos cálculos da Eletrodinâmica Quântica. Dentre os métodos, temos: Regularização Dimensional, Regularização Implícita, e o método independente de regularização.

B.2.1 Regularização Dimensional

É uma técnica para resolver integrais divergentes, em que consiste observar analiticamente as dimensões espaço-temporal, transformando a integral divergente em convergente.

Ou seja, considerando a integral divergente

$$I_{\log}(m^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2}, \quad (\text{B.38})$$

se transforma em convergente quando escrevemos em termos de D dimensões para n dimensões,

$$I_{\log}(m^2) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^n}, \quad (\text{B.39})$$

sendo $D = 4$, correspondendo a três dimensões espaciais (\mathbf{p}) e uma temporal (p_0), onde $p = (p_0, \mathbf{p})$. Com isto, a equação (B.39), tem como solução

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} m^{D-2n} \frac{\Gamma[n - (D/2)]}{\Gamma(n)}. \quad (\text{B.40})$$

Usando essa regularização dimensional no espaço de Minkowski, como mostra [26], escrevendo aqui de forma semelhante,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^n} = \frac{(-1)^n \Gamma(n-2)}{16\pi^2 \Gamma(n)} \frac{i}{(m^2)^{n-2}} = \frac{-i}{16\pi^2} \frac{1}{2m^2}, \quad (\text{B.41})$$

para $n = 3$.

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^n} = \frac{(-1)^{n-1} g^{\mu\nu} \Gamma(n-3)}{16\pi^2 \Gamma(n)} \frac{i}{(m^2)^{n-3}} = \frac{-i}{16\pi^2} \frac{\eta^{\mu\nu}}{12m^2}, \quad (\text{B.42})$$

para $n = 4$.

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu p^\lambda p^\sigma}{(p^2 - m^2)^n} = \frac{(-1)^n \eta^{\mu\nu\lambda\sigma} \Gamma(n-4)}{16\pi^2 \Gamma(n)} \frac{i}{(m^2)^{n-4}} = \frac{-i}{16\pi^2} \frac{\eta^{\mu\nu\lambda\sigma}}{96m^2}, \quad (\text{B.43})$$

para $n = 5$. Onde, $\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} = g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}$.

A Regularização Dimensional, como informa [25], geralmente está associada a quebra de simetrias, trabalhar com matrizes γ_5 e tensor antissimétricos de quatro índices passa a ser um problema trabalhar com essa técnica de regularização, pois não é possível analisar dimensionalmente e preservar a simetria da teoria. No entanto, existe a técnica de regularização implícita que não geram ambiguidades e se torna mais interessante e útil para a manipulação algébrica das integrais divergentes.

B.2.2 Regularização Implícita

Segundo a Ref. [24], a regularização implícita consiste em avaliar as integrais com base nas simetrias que podem ser usadas na teoria. Sejam elas, simetria de calibre, escala, ou invariância de rótulo ⁸.

Considerando a integral seguinte

$$\int_p f(p, q_i) \Rightarrow \int_p f(p, q_i) \rho(p^2, \Lambda) \equiv \int_p^\Lambda f(p, q_i) \quad (\text{B.44})$$

Para um loop a amplitude pode ser escrita, na forma

$$\int_p f(p, q_i) = \int_p \frac{\mathcal{A}^{v_1 \dots v_m}(p, q_i)}{\prod_i [(p - q_i)^2 - m^2]} \quad (\text{B.45})$$

em que $\int_p = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}$

Usamos a identidade seguinte, semelhante a mostrada em [25]

$$\frac{1}{(p + p_i)^2 - p_i^2} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (p_i^2 + 2p_i \cdot p)^j}{(p^2 - m_i^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{n+1} (p_i^2 + 2p_i \cdot p)^{n+1}}{(p^2 - m_i^2)^{n+1} [(p + p_i)^2 - m_i^2]} \quad (\text{B.46})$$

Que é a mesma identidade, apresentada na Ref. [26], aplicada para cada propagador do loop

$$\frac{1}{(p - p_i)^2 - m^2} = \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{(p_i)^2 - 2p_i \cdot p}{(p^2 - m^2)[(p - p_i)^2 - m^2]}, \quad (\text{B.47})$$

onde $i = 1, 2, 3$.

De [25], para amplitudes a nível de um loop em uma teoria renormalizável, os termos divergentes são obtidos com as seguintes combinações

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\lambda\sigma}(m^2) &\equiv \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{24p^\mu p^\nu p^\lambda p^\sigma}{(p^2 - m^2)^4} - 4g^{\mu\nu} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\lambda p^\sigma}{(p^2 - m^2)^3} \\ &- 4g^{\mu\lambda} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\nu p^\sigma}{(p^2 - m^2)^3} - 4g^{\mu\sigma} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\nu p^\lambda}{(p^2 - m^2)^3}, \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

⁸ "A invariância de rótulo relaciona duas amplitudes que diferem apenas por uma mudança de variável de integração" Ref. [24]. E quando ela é considerada os termos de superfícies na QED devem ser nulos, para que seja preservada a invariância de calibre.

$$I^{\mu\nu}(m^2) \equiv 4 \int_{\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^3} - g^{\mu\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2}, \quad (\text{B.49})$$

$$I^{\nu\mu}(m^2) \equiv 2 \int_{\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\nu p^\mu}{(p^2 - m^2)^3} - g^{\mu\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2}, \quad (\text{B.50})$$

$$I_{log}(m^2) \equiv \int_p^{\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2}, \quad (\text{B.51})$$

$$I_{quad}(m^2) \equiv \int_p^{\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)}, \quad (\text{B.52})$$

De Ref. [24], então podemos escrever para os termos de superfícies

$$I_{log}^{\mu\nu}(m^2) = \left(\frac{2}{D}\right) \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{2} I_{log}(m^2) - \frac{1}{2} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\}, \quad (\text{B.53})$$

$$I_{quad}^{\mu\nu}(m^2) = \left(\frac{2}{D-2}\right) \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{2} I_{quad}(m^2) - \frac{1}{2} \Upsilon_2^{\mu\nu} \right\}, \quad (\text{B.54})$$

$$I_{log}^{\mu\nu\lambda\sigma}(m^2) = \left(\frac{1}{24}\right) \left\{ I_{log}(m^2) [g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}] \right. \\ \left. - g^{\mu\sigma} \Upsilon_0^{\nu\lambda}(m^2) + g^{\mu\lambda} \Upsilon_0^{\nu\sigma}(m^2) + g^{\mu\nu} \Upsilon_0^{\lambda\sigma}(m^2) - 4 \Upsilon_0^{\mu\nu\lambda\sigma} \right\}. \quad (\text{B.55})$$

Sendo,

$$\Upsilon_0^{\mu\nu} \equiv \int_p \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{p^\nu}{(p^2 - m^2)^{(D/2)}}, \\ \Upsilon_0^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \int_p \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{p^\nu p^\lambda p^\sigma}{(p^2 - m^2)^{(D+2/2)}}, \\ \Upsilon_2^{\mu\nu} \equiv \int_p \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{p^\nu}{(p^2 - m^2)^{(D-2/2)}}. \quad (\text{B.56})$$

E usando essas relações, pode-se aplicar a relação de regularização de escala

$$I_{log}(m^2) - I_{log}(\Lambda^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right), \\ I_{log}(\Lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln(\Lambda^2) = I_{log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln(m^2) = c, \quad (\text{B.57})$$

onde Λ é o parâmetro de escala, e c é uma constante.

Aplicando essas soluções na equação (B.16) e (B.17) que são semelhantes as (3.13 - 3.15)

$$D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = \int d^4 t \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\nu \not{t}]}{[t^2 - s]^4}, \quad (\text{B.58})$$

também para $D_2^{\mu\nu\lambda\sigma}$ e $D_3^{\mu\nu\lambda\sigma}$.

Aplicando o traço na equação acima, escrevemos

$$D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \int_t \frac{1}{[t^2 - s]^4} [(t^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) - 2t^2 (t^\mu t^\nu g^{\lambda\sigma} + t^\mu t^\sigma g^{\nu\lambda} + t^\nu t^\lambda g^{\mu\sigma} + t^\lambda t^\sigma g^{\mu\nu}) + 8t^\mu t^\nu t^\lambda t^\sigma]. \quad (\text{B.59})$$

Usando a invariância de rótulo, a qual exige que os termos de superfícies sejam nulos, obtemos

$$D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \left\{ \frac{1}{3} [(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma})] (2\pi)^4 I_{\log}(s) - \frac{\pi^2}{6} (3g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \right\} \quad (\text{B.60})$$

sendo

$$I_{\log}(s) = I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{m^2}{s} \right) \quad (\text{B.61})$$

Substituindo $I_{\log}(s)$, obtém-se

$$D_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \left\{ \frac{1}{3} \eta^{\mu\nu\lambda\sigma} 2(\pi)^4 \left[I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{m^2}{s} \right) \right] - \frac{i\pi^2}{6} (3g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \right\}, \quad (\text{B.62})$$

onde $\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} = g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}$.

De forma análoga faz-se para o cálculo da equação (B.27)

B.2.3 Integração Simétrica

"A integração simétrica consiste em supor uma fronteira simétrica esférica para uma integral regularizada", Ref.[24] e aplicar as transformações

$$p^\mu p^\nu \Rightarrow \frac{p^2}{D} g^{\mu\nu} = \frac{p^2}{4} g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.63})$$

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu p^\lambda p^\sigma &\Rightarrow \frac{(p^2)^2}{D(D-2)} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \\ &= \frac{(p^2)^2}{24} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}). \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$