



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Joás Davi Lopes da Silva

Um Estudo Sobre Teoria de Perturbação Cosmológica

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2020

Joás Davi Lopes da Silva

Um Estudo Sobre Teoria de Perturbação Cosmológica

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2020

S586e Silva, Joás Davi Lopes da.
Um estudo sobre teoria de perturbação cosmológica / Joás Davi
Lopes da Silva. – Campina Grande, 2020.
72 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.

"Orientação: Professor Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz".

Referências.

1. Cosmologia. 2. Equações de Einstein. 3. Equações de Friedmann.
4. Perturbações Cosmológicas. I. Queiroz, Amílcar Rabelo de. II. Título.

CDU 524.8(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

JOÁS DAVI LOPES DA SILVA

Um Estudo Sobre Teoria de Perturbação Cosmológica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 24/09/2020

Amílcar Rabelo de Queiroz
Presidente da Comissão e Orientador

Francisco de Assis de Brito
Examinador Interno

Alex de Albuquerque Silva
Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 28/09/2020, às 18:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **ALEX DE ALBUQUERQUE SILVA, PROFESSOR 3 GRAU**, em 13/11/2020, às 08:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **AMILCAR RABELO DE QUEIROZ, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 13/11/2020, às 12:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz, pela orientação, sugestão, competência e paciência com que conduziu este trabalho.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- A minha esposa, pela paciência e apoio durante essa jornada.
- Aos meus familiares pela confiança e incentivo.
- À CAPES pelo suporte financeiro.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Resumo

Nesse trabalho temos por objetivo estudar e entender diversos conceitos relacionados a cosmologia padrão e a teoria de perturbação cosmológica. Nessa dissertação fornecemos uma base de fundamentos teóricos para esse estudo. Após revisarmos vários aspectos do modelo cosmológico padrão, estendemos nosso estudo em cosmologia para abordarmos os desvios da homogeneidade do Universo. Pequenas perturbações na homogeneidade podem se desenvolver em determinados períodos e fases do nosso Universo e tais perturbações estão relacionadas à instabilidade gravitacional. O crescimento das inhomogeneidades pode ser estudado através do formalismo de uma teoria perturbativa de primeira ordem. Tal mecanismo deu início a formação das estruturas que vemos no Universo nos dias atuais. Em nosso trabalho estudamos a dinâmica dessas perturbações tanto no contexto newtoniano quanto no da relatividade geral.

Palavras-chave: Cosmologia. Equações de Einstein. Equações de Friedmann. Perturbações Cosmológicas.

Abstract

In this work we aim to study and understand several concepts related to standard cosmology and the theory of cosmological perturbation . In this dissertation we provide a base of theoretical foundations for this study. After reviewing various aspects of the standard cosmological model, we extended our study in cosmology to address deviations from the universe's homogeneity. Small perturbation in homogeneity can develop in certain periods and phases of our Universe and such perturbations are related to gravitational instability. The growth of inhomogeneities can be studied through the formalism of a first order perturbative theory. This mechanism started the formation of the structures that we see in the Universe today. In our work we have studied the dynamics of these perturbation both in the Newtonian context and in that of general relativity.

Keywords: Cosmology. Einstein's equations. Friedmann's equations. Cosmological Perturbations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – A figura mostra esquematicamente os três casos possíveis para expansão de um Universo homogêneo e isotrópico, correspondentes a $k = -1, k = 0, k = 1$. Fonte [1]	20
Figura 2 – Representação de como age o fator de escala. Fonte[2]	21
Figura 3 – A Figura mostra as isócronas para o modelo Λ CDM plano. Do lado esquerdo o plano $\Omega_{m,0}$ vs h . Do lado direito, o parâmetro de desaceleração (2.34) em função do redshift. Fonte[3]	31
Figura 4 – Diagrama de Hubble obtido pelo grupo Supernova Cosmology Project. Fonte[1]	35
Figura 5 – Função de correlação de larga escala com amostra de 46748 galáxias com redshifts entre $0,72 < z < 0,47$ construída com dados do SDSS. Fonte [4]	66

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	ASPECTOS DA COSMOLOGIA PADRÃO	19
2.1	A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	19
2.2	Equações da Dinâmica para um Universo Homogêneo e Isotrópico	21
2.3	Lei de Hubble	25
2.4	Eras Cosmológicas	26
2.4.1	Radiação	27
2.4.2	Matéria	28
2.4.3	Energia Escura	29
2.5	Idade do Universo	30
2.6	Distâncias em Cosmologia	32
2.6.1	Distância Própria	32
2.6.2	Distância Comóvel	33
2.6.3	Distância de Diâmetro Angular	33
2.6.4	Distância Luminosa	34
2.6.4.1	Relação entre distância luminosa e redshift	35
3	INSTABILIDADE GRAVITACIONAL NEWTONIANA	37
3.1	Teoria de Jeans	37
3.2	A instabilidade de Jeans	38
3.3	Análise Perturbativa: Fluido em expansão	40
3.3.1	Solução para um Fluido de matéria	42
3.3.2	Fluido de várias componentes	44
4	TEORIA DE PERTURBAÇÃO RELATIVÍSTICA	45
4.1	A Fixação do Gauge	46
4.2	Perturbações Escalares	47
4.3	Modelo cosmológico com Fluido Único	49
4.4	Escalas Maiores que o raio de Hubble	53
4.5	Escalas Menores que o raio de Hubble	54
4.6	Modelo cosmológico com dois Fluidos	56
5	CONCLUSÕES	61

APÊNDICES	63
APÊNDICE A – FERRAMENTAS ESTATÍSTICAS PARA TEORIA DE PERTURBAÇÃO COSMOLÓGICA	65
A.1 A função de Correlação	65
A.1.1 Os n-pontos da função de correlação	67
A.2 O Espectro de potência	67
REFERÊNCIAS	71

1 Introdução

A Cosmologia é a ciência que estuda a dinâmica do Universo como um todo, sob esse ponto de vista, seu objetivo principal consiste em estabelecer um modelo cosmológico que prediga ou pelo menos explique os resultados das observações astronômicas fornecendo uma compreensão global sobre a estrutura, composição e evolução do Universo.

Durante a maior parte da história, os astrônomos tiveram que confiar na luz na parte visível do espectro para estudar o universo. Uma das grandes realizações astronômicas do século XX foi a exploração do espectro eletromagnético completo para medições astronômicas [2]. Até por volta de 1920 a cosmologia não era considerada uma ciência, visto que seu objeto de estudo (o universo como um todo) não era passível de ser observado facilmente. Mas a partir dos trabalhos teóricos de Einstein e Friedmann a cosmologia começou a ser encarada como uma ciência de fato, incorporando as observações feitas por Hubble. E finalmente, graças a descoberta da radiação cósmica de fundo por Penzias e Wilson, em 1964 [5], a cosmologia tornou-se definitivamente uma ciência, uma área de pesquisa bem definida dentro da astronomia e da física.

Desde o seu nascimento na Grécia antiga, as pesquisas em cosmologia foram fundamentais para a formação de uma concepção científica da natureza. Mas foi a partir dos trabalhos de estudiosos como Copérnico, Kepler e Galileu que deu início ao que hoje chamamos de revolução astronômica e culminou com a teoria gravitacional Newtoniana. Mais tarde com o desenvolvimento da teoria da relatividade geral (que está baseada na ideia de um espaço curvo), tal teoria revelou-se uma teoria mais rica e mais completa que a teoria de gravitação newtoniana, prevendo assim mais fenômenos e expandindo as fronteiras do que se podia prever em cosmologia até então. A teoria da relatividade de Einstein generalizou a teoria de Newton em diversos aspectos prevendo a existência de fenômenos como as ondas gravitacionais que é tipicamente relativística.

No estudo da cosmologia temos dois conceitos importantes a considerar: o primeiro é que a gravidade domina em grandes escalas, de forma que nessas grandes escalas podemos desprezar a complexidade das forças eletromagnéticas e nucleares (fraca e forte). O segundo conceito importante é que em grandes escalas uma boa aproximação é dizermos que o universo é homogêneo e isotrópico (princípio cosmológico), o princípio cosmológico é a base da cosmologia do Big Bang. O Big Bang é a melhor descrição que temos do nosso universo [2]. Quando falamos em escalas suficientemente grandes, estamos falando sobre aquelas que se encontram os aglomerados de galáxias.

Uma peça fundamental da evidência observacional na cosmologia, é que quase tudo no universo parece estar se afastando de nós, e quanto mais longe está algo, mais

rápida parece ser a recessão. Estas velocidades são medidas através do redshift, que é basicamente o efeito Doppler aplicado às ondas de luz [6]. De uma forma geral podemos dizer que a cosmologia moderna é produto direto da teoria da relatividade geral atrelada as observações dos grandes telescópios.

Os modelos cosmológicos contemporâneos baseiam-se na ideia de que o universo é praticamente o mesmo em toda parte, que é conhecido como princípio copernicano ou cosmológico [7]. De início podemos pensar que tal ideia está equivocada pois, o centro do sol, por exemplo, tem pouca semelhança com o frio desolador do espaço interestelar. Mas adotamos o princípio copernicano para aplicar apenas nas escalas muito grandes, nas quais as variações locais de densidade são calculadas em média [7]. O princípio cosmológico está relacionado a duas propriedades matemáticas: isotropia e homogeneidade. A isotropia afirma que o espaço parece o mesmo não importa em que direção você olha. Por outro lado, se um espaço é isotrópico em toda parte, implicará na sua homogeneidade, e por homogêneo queremos dizer que a geometria (isto é, a métrica) é a mesma em qualquer ponto do universo.

A ideia de um universo homogêneo e isotrópico é uma boa aproximação quando tratamos de escalas muito grandes (acima de 100 Mpc)[8], porém o universo real, é claro, contém estruturas não homogêneas como galáxias, aglomerados, estrelas, etc. No capítulo 2 desse trabalho estudamos o modelo cosmológico padrão em que através das equações de Einstein da relatividade geral obtivemos as equações de Friedmann que regem a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico. Ao longo do capítulo discorreremos sobre os aspectos gerais da cosmologia padrão e sobre conceitos a ela relacionados tais como: redshift, eras cosmológicas, idade do Universo, relações de distância em cosmologia e etc.

Nos capítulos subsequentes estudamos a chamada teoria de perturbação cosmológica linear, primeiramente em um contexto newtoniano (mais intuitivo porém mais limitado), e posteriormente no contexto relativístico, obtivemos as soluções para os contrastes de densidade nos casos propostos, e encontramos a função de crescimento das perturbações de matéria na teoria de perturbação cosmológica linear.

Por fim, fizemos nossas conclusões para esse trabalho, discutindo também sobre a perspectiva de trabalhos futuros com base no que estudamos nesse atual.

2 Aspectos da Cosmologia Padrão

2.1 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Nessa seção estudaremos a métrica FRW que é utilizada nas soluções das equações de Einstein da relatividade geral. A solução dada pela métrica FRW, descreve um Universo que é preenchido de um fluido ideal com densidade e pressão dada pelas chamadas equações de Friedmann. Tais equações são uma solução das equações de campo de Einstein quando o tensor energia-momento descreve um espaço-tempo isotrópico e homogêneo.

O elemento de linha que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico de 4 dimensões é chamado espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), e é dado por [9]

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2, \quad (2.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $a(t)$ é o fator de escala com tempo cósmico t , e $d\sigma^2$ é a métrica independente do tempo no espaço tridimensional com uma constante de curvatura k .

Explicitamente teremos para o tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

e como a matriz $g_{\mu\nu}$ é invertível, podemos denotar sua inversa por $[g_{\mu\nu}]^{-1}$, assim temos

$$[g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2a^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix},$$

para parte espacial $d\sigma^2$, temos

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.2)$$

onde os valores de k são $+1$, -1 , 0 e correspondem respectivamente as geometrias

- *Fechadas*;

- *Abertas*;
- *Planas*.

A figura abaixo mostra esquematicamente os três casos possíveis para a expansão de um Universo homogêneo e isotrópico, correspondentes aos valores de k

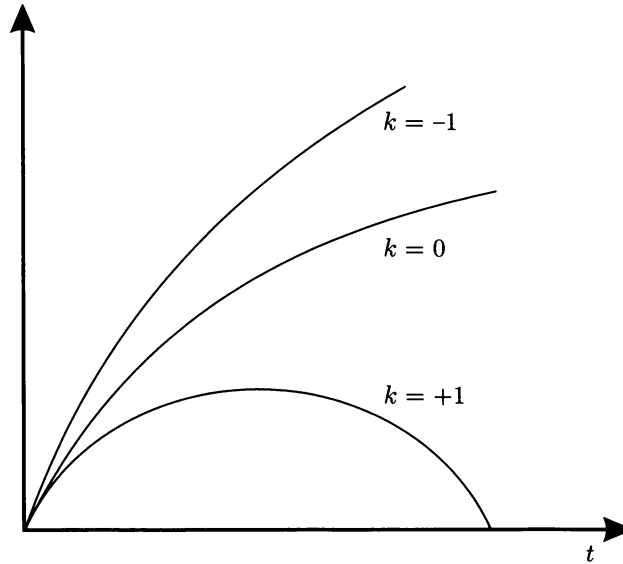


Figura 1 – A figura mostra esquematicamente os três casos possíveis para expansão de um Universo homogêneo e isotrópico, correspondentes a $k = -1, k = 0, k = 1$. Fonte [1]

Onde a métrica é dada em termos de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) com $\gamma_{11} = (1 - kr^2)^{-1}, \gamma_{22} = r^2, \gamma_{33} = r^2 \sin^2 \theta$. Além do tempo t , introduzimos também o tempo de conformidade η definido por

$$\eta \equiv \int a^{-1} dt. \quad (2.3)$$

O termo $a(t)$ da métrica FRW, o chamado fator de escala, é o termo que mede a taxa de expansão do Universo [10]. Nós compreendemos o efeito de afastamento das galáxias como a expansão do próprio espaço [2]. Para entendermos tal expansão a adoção de um sistema de coordenadas que a acompanha é muito útil, damos o nome a esse sistema de coordenadas comóveis, pois nesse sistema a posição dos objetos em largas escalas é fixa, e o vetor posição \vec{r} que os conecta é

$$\vec{r}(t) = a(t)\vec{x}. \quad (2.4)$$

O que devemos imaginar quando estudamos essa equação é uma grade coordenada que se expande ao longo do tempo, de forma que o sistema de coordenadas de distância é transportado junto com a expansão, assim todos os objetos permanecem em valores de

coordenadas fixos, ou seja, corpos materiais como as galáxias permanecem em locais fixos no sistema de coordenadas \vec{x} .

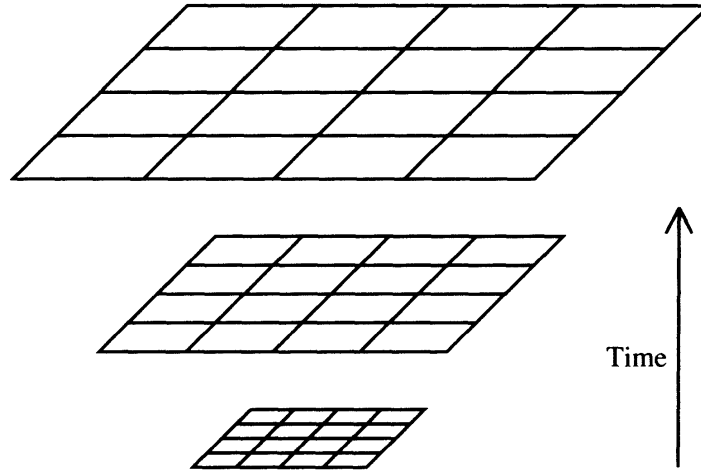


Figura 2 – Representação de como age o fator de escala. Fonte[2]

Como a expansão é uniforme, a expressão acima descreve a relação entre a distância real \vec{r} e a distância de deslocamento, que chamamos de \vec{x} , onde usamos a propriedade de homogeneidade para garantir que a seja uma função do tempo.

Pontos materiais como as galáxias por exemplo, permanecem em locais fixos no sistema de coordenadas \vec{x} . O sistema de coordenadas originais \vec{r} , que não se expande, é geralmente conhecido como sistema de coordenadas físicas. Assim o fator de escala nos diz como as separações físicas estão evoluindo com o tempo, uma vez que as distâncias de coordenadas \vec{x} são por definição fixas [2]. Por exemplo, se, entre dois instantes de tempos quaisquer t_1 e t_2 , o fator de escala dobra de valor (que nos diz que o universo se expandiu em tamanho por um fator dois), quer dizer que levará o dobro do tempo para percorrermos uma distância de um ponto A a um ponto B que levaríamos antes do fator de escala dobrar.

2.2 Equações da Dinâmica para um Universo Homogêneo e Isotrópico

A partir da métrica de Friedmann-Robertson-Walker podemos derivar as chamadas equações de Friedmann que descreve a dinâmica de um Universo que obedece ao princípio cosmológico. Nessa etapa do trabalho introduziremos algumas quantidades da relatividade geral a fim de obtermos tais equações a partir da métrica FRW. As equações da dinâmica do movimento no Universo em expansão podem ser derivadas das equações de Einstein pelas seguintes etapas.

A partir da métrica $g_{\mu\nu}$ obtemos os símbolos de Christoffel [11]

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}), \quad (2.5)$$

temos que o tensor de Ricci é definido como [11]

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}. \quad (2.6)$$

Se fizermos a seguinte contração no tensor de Ricci, encontraremos o que chamamos de escalar de Ricci ou escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

e através dessas duas últimas quantidades, podemos escrever o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.8)$$

A dinâmica cosmológica na presença da constante cosmológica pode ser obtida resolvendo as equações de Einstein

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi GT_{\nu}^{\mu} + \Lambda\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (2.9)$$

onde T_{ν}^{μ} é o tensor de energia-momento dos componentes de matéria, mais tarde falaremos mais detalhadamente sobre ele.

O lado esquerdo da Eq. (2.9) caracteriza a geometria do espaço-tempo, enquanto que o lado direito descreve as energias e conteúdo material do Universo.

Os símbolos de Christoffel não nulos para a métrica FRW são dados por

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a}, \quad \Gamma_{33}^0 = r^2 a\dot{a} \sin^2 \theta, \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \quad (2.14)$$

Para a equação (2.6) as componentes não nulas do tensor de Ricci são dadas por

$$R_{00} = \frac{-3\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (2.15)$$

$$R_{22} = r^2(a\dot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (2.16)$$

e o escalar de curvatura é dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6 \frac{(k + \dot{a}^2 + a\ddot{a})}{a^2}. \quad (2.17)$$

A partir da equação (2.8) e da relação $G_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu}$, podemos obter as componentes do tensor de Einstein, suas componentes não nulas são dadas por

$$G_0^0 = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3 \frac{k}{a^2} \quad G_1^1 = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{k}{a^2}, \quad (2.18)$$

$$G_2^2 = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{k}{a^2} \quad G_3^3 = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{k}{a^2}. \quad (2.19)$$

No espaço-tempo FRW, o tensor de energia-momento é restrito para tomar a forma de fluido perfeito, que é um tipo de fluido que é caracterizado pelas densidades de energia ρ e pressão p . O uso desse tipo de fluido é muito útil, pois podemos desprezar algumas características que os fluidos reais possuem como por exemplo viscosidade, condução de calor e cisalhamento.

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + p\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (2.20)$$

onde $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ é o 4-velocidade do fluido em coordenadas comóveis e ρ e p são funções de t . A forma matricial do tensor T_{ν}^{μ} é dada por

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Usando as componentes do tensor de Einstein equação (2.9), obtemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.21)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.22)$$

pela conservação do tensor energia-momento, $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, obtemos a equação da continuidade para $\nu = 0$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.23)$$

As equações (2.21), (2.22) e (2.23) são respectivamente as equações de: Friedmann, aceleração e fluido, tais equações descrevem a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico.

Agora, vamos definir alguns parâmetros cosmológicos para discussão subsequente. O primeiro é o parâmetro de Hubble, que é definido como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.24)$$

se dividirmos a equação de Friedmann (2.21) por H^2 temos

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{k}{(aH)^2}. \quad (2.25)$$

De forma que podemos definir os seguintes parâmetros

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G}{3H^2}\rho, \quad (2.26)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (2.27)$$

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{(aH)^2}, \quad (2.28)$$

assim, podemos escrever a equação de Friedmann como sendo

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1, \quad (2.29)$$

para esses valores de parâmetros damos os nomes de: parâmetro de densidade de matéria, parâmetro de densidade de constante cosmológica e parâmetro de densidade de curvatura.

Outro parâmetro importante é o chamado redshift, tal parâmetro é definido para uma fonte astrofísica que se afasta ou se aproxima de um observador, é basicamente o efeito Doppler aplicado às ondas de luz emitidas por fontes astrofísicas. O redshift pode ser definido como

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.30)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda medido pelo observador e λ_e é o comprimento de onda emitido pela fonte. O comprimento de onda aumenta com a expansão do Universo ($\lambda \propto a$). Relacionando o comprimento de onda medido pelo observador e o comprimento de onda emitido pela fonte, com o fator de escala, temos [2]

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a}, \quad (2.31)$$

e usando (2.30) chegamos em

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (2.32)$$

Um outro parâmetro importante é o parâmetro de desaceleração, definido como

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (2.33)$$

um valor positivo de q significa que a expansão do Universo está desacelerando (ou seja, a velocidade relativa de quaisquer dois pontos está diminuindo). Um valor negativo de q , significa que a velocidade relativa de dois pontos está aumentando com o tempo [12].

Podemos escrever o parâmetro de desaceleração em termos do redshift como sendo

$$q = \frac{(1+z)dH(z)/dz}{H(z)-1}. \quad (2.34)$$

2.3 Lei de Hubble

As medições das distâncias das galáxias realizadas por Hubble foram obtidas por meio de redshift (2.30), que resultou na chamada: Lei de Hubble, uma importante relação linear entre redshift z e a distância das galáxias, dada por [6]

$$z = \frac{H_0}{c}d, \quad (2.35)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, usando a fórmula aproximada para o efeito Doppler $v = cz$ [13], podemos escrever a Lei de Hubble da seguinte forma

$$v = H_0 d, \quad (2.36)$$

onde fica estabelecido uma relação entre a velocidade de recessão v e a distância d .

A partir dessa relação, podemos obter as seguintes quantidades importantes no estudo de cosmologia

$$D_{H_0} \equiv \frac{c}{H_0}, \quad (2.37)$$

e

$$T_{H_0} \equiv \frac{1}{H_0}, \quad (2.38)$$

que são respectivamente, a distância de Hubble e o tempo de Hubble, essas quantidades definem a escala de Universo.

A constante de Hubble H_0 é usualmente escrita como

$$H_0 = 100hKms^{-1}Mpc^{-1}, \quad (2.39)$$

onde

$$1Mpc = 3,08568 \times 10^{24}cm = 3,26156 \times 10^6 anos - luz, \quad (2.40)$$

O parâmetro h , descreve a incerteza no valor de H_0 . De acordo com o experimento Planck 2018 [14]

$$h = 0,674 \pm 0,5. \quad (2.41)$$

2.4 Eras Cosmológicas

A história da evolução do Universo pode ser melhor analisada dividindo-a em eras cosmológicas, o modelo cosmológico padrão prediz que o Universo é constituído de matéria (matéria bariônica e matéria escura), radiação e energia escura.

Em um contexto cosmológico, a relação entre a densidade de massa ρ e pressão p é dada pela chamada equação de estado. De forma geral temos [15]

$$p_x = \omega_x \rho_x, \quad (2.42)$$

onde ω_x é uma função arbitrária e depende do tipo de componente que domina a expansão. Usando a equação (2.23), temos

$$\dot{\rho}_x + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_x(1 + \omega_x) = 0, \quad (2.43)$$

podemos organizar a equação acima da seguinte forma

$$\frac{1}{\rho_x} \frac{d\rho_x}{dt} = -3(1 + \omega_x) \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (2.44)$$

se integrarmos ambos os lados da equação teremos

$$\int \frac{d\rho_x}{\rho_x} = -3(1 + \omega_x) \int \frac{da}{a}, \quad (2.45)$$

e podemos obter facilmente

$$\rho_x = \rho_{x,0} a^{-3(1+\omega_x)}, \quad (2.46)$$

essa equação descreve como cada componente evolui com o fator de escala, e 0 é para denotar o valor atual de densidade da componente que estivermos tratando.

2.4.1 Radiação

No início o Universo foi dominado por radiação que é tida como a fase inicial do Universo. Nesta fase todo o material estava completamente ionizado, por exemplo, um gás de fótons e neutrinos em equilíbrio térmico. Nessa fase a pressão é dada por [2]

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r, \quad (2.47)$$

consequentemente para (2.46) temos

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4}, \quad (2.48)$$

onde $\rho_{r,0}$ denota o valor atual da densidade de energia da radiação.

Podemos usar a equação de Friedmann (2.21) para estabelecermos a dependência temporal que o fator de escala possui, que no caso da fase da radiação é

$$a \sim t^{\frac{1}{2}}. \quad (2.49)$$

Podemos verificar que para esse caso $\dot{a} \sim t^{-\frac{1}{2}}$, ou seja o Universo se encontraria em uma fase de expansão, e o resultado $\ddot{a} \sim -t^{-\frac{3}{2}}$ implica que tal expansão seria desacelerada.

2.4.2 Matéria

Para matéria bariônica, que constitui as galáxias, estrelas e planetas, temos que a pressão é zero [2].

$$p_b = 0, \quad (2.50)$$

sua evolução com o fator de escala é dada utilizando a equação (2.46). Assim

$$\rho_b = \rho_{b,0} a^{-3}, \quad (2.51)$$

onde $\rho_{b,0}$ denota o valor atual da densidade de energia de matéria bariônica.

Como citado anteriormente, além da matéria bariônica de acordo com o modelo Λ CDM¹ há outro componente de matéria que constitui o Universo, a chamada matéria escura. Os modelos teóricos observacionais indicam que a principal parcela da matéria escura é formada de partículas de baixas velocidades que é a chamada matéria escura fria. Assim como para a matéria bariônica a pressão também é zero, de forma que a evolução com fator de escala é dado por

$$\rho_{dm} = \rho_{dm,0} a^{-3}, \quad (2.52)$$

onde $\rho_{dm,0}$ denota o valor atual da densidade de energia da matéria escura.

Podemos ainda somar $\rho_m = \rho_b + \rho_{dm}$, isto é

$$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3}. \quad (2.53)$$

Nesse ponto, fazendo um comparativo entre as equações (2.48) e (2.53), vemos que a radiação possui um decaimento mais acentuado, de forma que em algum instante ao longo da história do universo a matéria passaria a ser o constituinte dominante. No entanto, recentemente descobriu-se que o Universo está em uma expansão acelerada, tal descoberta modificou nossa visão do cosmo, e um modelo com apenas radiação e matéria (bariônica e escura) não seria consistente com a realidade. Diante dessas novas descobertas, foi necessária a inclusão de uma nova componente que foi denominada energia escura, que seria a responsável por tal expansão.

Também podemos usar a equação de Friedmann (2.21), para estabelecermos a dependência temporal que o fator de escala possui, que para o caso da matéria é

$$a \sim t^{\frac{2}{3}}. \quad (2.54)$$

¹ Modelo mais simples e conhecido, e que está em boa concordância com as observações cosmológicas.

Podemos verificar que para esse caso $\dot{a} \sim t^{-\frac{1}{3}}$, ou seja o Universo se encontraria em uma fase de expansão, e o resultado $\ddot{a} \sim -t^{-\frac{4}{3}}$ implica que tal expansão seria desacelerada.

2.4.3 Energia Escura

Para entendermos melhor a necessidade de existir uma componente como a energia escura, observando a equação (2.23), é fácil deduzir que se o Universo está acelerado ($\rho + 3p < 0$) é uma condição necessária [4]. Assumindo que $\rho > 0$ então teremos

$$p < -\frac{1}{3}\rho, \quad (2.55)$$

ou seja, para um Universo que está em expansão acelerada a pressão deve ser negativa, fato que não está presente em um modelo de Universo contendo apenas radiação e matéria. A partir da descoberta de que Universo está em expansão acelerada, foi necessário adicionar uma constante cosmológica Λ nas equações de Einstein para que as equações de Friedmann fossem de acordo com esse fato.

O candidato mais simples à energia escura é a constante cosmológica. No estudo em cosmologia, presume-se que a energia escura seja constituída de um fluido ideal homogêneo que possui uma equação de estado dada por[4]

$$\omega \equiv p_{\Lambda}/\rho_{\Lambda} = -1, \quad (2.56)$$

onde usando a equação (2.46), mostramos que a densidade de energia é uma constante em toda a evolução do Universo

$$\rho_{\Lambda} = \rho_{\Lambda,0} = \text{Constante}. \quad (2.57)$$

Podemos identificar a densidade de energia escura na equação de Friedmann como sendo

$$\rho_{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.58)$$

escrevendo a equação de Friedmann (2.21) em termos dos parâmetros de densidade atual e com $k = 0$ temos

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \Omega_{\Lambda,0} \right], \quad (2.59)$$

usando a relação $a^{-1} = 1 + z$, e sabendo que na fase atual a contribuição da radiação na equação acima pode ser desprezada (utilizando essas duas considerações), o modelo cosmológico se reduz para

$$H = H_0[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}, \quad (2.60)$$

onde $\Omega_{m,0} = 8\pi G\rho_{m,0}/3H_0^2$ e $\Omega_{\Lambda,0} = 8\pi G\rho_{\Lambda,0}/3H_0^2$,

esse modelo é conhecido como modelo Λ CDM plano e está em boa concordância com as observações cosmológicas, de forma que o consideramos como uma boa descrição do Universo observado [16]. O modelo Λ CDM considera o Universo dominado na fase atual por energia escura na forma de constante cosmológica, além disso a constante cosmológica seria o mecanismo causador da expansão acelerada que observamos na fase atual do Universo.

2.5 Idade do Universo

Nos modelos cosmológicos a idade do universo é o tempo entre o Big Bang e o tempo atual. Quando estudamos os modelos cosmológicos através de parâmetros específicos podemos calcular a chamada idade do Universo. Ao longo do tempo, os cientista tem constatado através dos modelos cosmológicos, que a idade do universo é grande o suficiente para acomodar a idade do que está dentro dele. Com técnicas de datação geológica, é possível determinar a idade do planeta Terra, o que nos permite obter um primeiro parâmetro para obtermos limites mínimos para a idade do nosso Universo. No contexto astronômico a simples determinação do redshift de objetos distantes pode estabelecer forte conexão com a idade do universo. [3]

Podemos fazer o seguinte procedimento para obter uma expressão que representa a idade do Universo: usando a equação (2.32) considerando $a_0 = 1$ e derivando tal expressão com respeito ao tempo temos

$$\frac{da}{dt} = \frac{-dz}{(1+z)^2 dt}, \quad (2.61)$$

ou

$$\dot{a} = \frac{-dz}{(1+z)^2 dt}, \quad (2.62)$$

comparando com (2.24) podemos fazer

$$aH = \frac{-dz}{(1+z)^2 dt}, \quad (2.63)$$

ou

$$a = \frac{-dz}{(1+z)^2 H dt}, \quad (2.64)$$

usando (2.32) temos

$$\frac{1}{(1+z)} dt = \frac{-dz}{(1+z)^2 H}, \quad (2.65)$$

assim

$$dt = \frac{-dz}{(1+z)H}, \quad (2.66)$$

logo podemos obter uma expressão que nos dará a idade do Universo para qualquer z

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{-dz'}{(1+z')H(z')}. \quad (2.67)$$

Como já vimos $H(z')$, depende dos parâmetros de densidade dos componentes que constitui o universo, assim, a idade do universo dependerá do modelo cosmológico em questão.

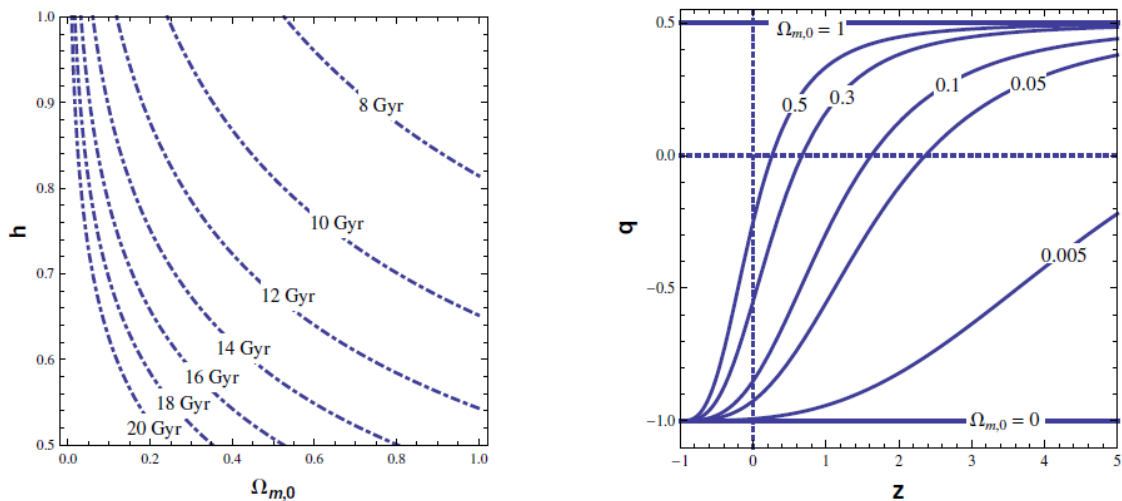


Figura 3 – A Figura mostra as isócronas para o modelo Λ CDM plano. Do lado esquerdo o plano $\Omega_{m,0}$ vs h . Do lado direito, o parâmetro de desaceleração (2.34) em função do redshift. Fonte[3]

Na figura acima vemos isócronas no plano $\Omega_{m,0}$ vs h para o modelo Λ CDM plano ($k = 0$).

2.6 Distâncias em Cosmologia

Nessa parte do trabalho discutiremos algumas definições de distância utilizadas em cosmologia.

2.6.1 Distância Própria

A distância própria entre dois objetos que denotaremos por D_p , é definida como o comprimento geodésico entre dois pontos no espaço para um fator de escala fixo, logo, o tempo também será fixo. Da métrica FRW com $dt = 0$. É conveniente realizar a mudança da coordenada χ na métrica FRW, através da relação $d\chi(r) = dr/\sqrt{1 - kr^2}$. Onde

$$\chi(r) = \begin{cases} \sin^{-1} r, & k = 1 \\ r, & k = 0 \\ \sinh^{-1} r, & k = -1, \end{cases}$$

se usarmos $d\chi^2 = dr^2/(1 - kr^2)$ podemos escrever a métrica como,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (2.68)$$

onde $S_k(\chi)$ é chamada de distância métrica, e é definida como

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & k = 1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases}$$

Sendo a distância própria dada por

$$dD_p^2 = a^2(t) (d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (2.69)$$

para essa equação podemos analisar dois casos específicos

- **Distância própria radial**, onde fizemos $d\theta = d\phi = 0$, tal que $dD_p = ad\chi$. Logo

$$D_p = a\chi, \quad (2.70)$$

- **Distância própria transversa**, onde fixamos $d\chi = d\phi = 0$ obtendo

$$dD_p = aS_k(\chi)d\theta \rightarrow D_p = aS_k(\chi)\Delta\theta, \quad (2.71)$$

onde $\Delta\theta$ é a separação angular entre dois pontos.

2.6.2 Distância Comóvel

A distância comóvel, é a distância medida por um observador que participa da expansão do Universo. Que é definida como [17]

$$D_c \equiv \frac{D_p}{a}, \quad (2.72)$$

quando o fator de escala equivale a 1 ela é equivalente a distância própria entre os objetos, e permanece constante à medida que o tempo evolui. Podemos imaginar um feixe de luz emitido na distância comóvel χ chegando radialmente na origem do sistema de referência, sem variação angular ($d\theta = d\phi = 0$). Pela métrica FRW temos

$$d\chi = \frac{c}{a} dt, \quad (2.73)$$

considerando $a_0 = 1$ na equação (2.32), diferenciando com respeito ao tempo, e identificando com (2.24) temos: $dt/a = -dz/H$.

Definindo a função

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0}, \quad (2.74)$$

podemos reescrever

$$\frac{dt}{a} = -\frac{1}{H_0} \frac{dz}{E(z)}, \quad (2.75)$$

integrando a equação (2.73), obtemos a distância comóvel percorrida pelos fótons desde a emissão t_1 até a observação em t_0

$$\int_0^\chi d\chi' = c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a} = -\frac{c}{H_0} \int_z^0 \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.76)$$

assim, obteremos

$$\chi = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.77)$$

onde D_H é a distância de Hubble.

2.6.3 Distância de Diâmetro Angular

Essa distância é definida baseada na geometria Euclidiana, é definida pela razão entre o diâmetro D à linha de distância transversa e o tamanho angular $\Delta\theta$ do objeto em radianos [18]

$$D_A = \frac{D}{\Delta\theta}, \quad (2.78)$$

a quantidade D pode ser obtida a partir da equação (2.71) que mede a distância própria do objeto, logo

$$D_A = \frac{aS_k(\chi)\Delta\theta}{\Delta\theta}, \quad (2.79)$$

logo é fácil perceber que

$$D_A = \frac{S_k(\chi)}{1+z}. \quad (2.80)$$

2.6.4 Distância Luminosa

A distância luminosa faz uso da chamada luminosidade absoluta L de uma supernova do tipo Ia, que dentro da cosmologia observacional é chamada de vela padrão, através desse fato podemos mensurar o afastamento de um objeto luminoso comparando a intensidade observada com a que foi emitida pela fonte.

No espaço tempo de Minkowski, a relação entre luminosidade absoluta e fluxo observado é [18]

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2}, \quad (2.81)$$

onde χ é a distância comóvel entre o observador e a fonte. É conveniente supor que a luz que acompanha o fluxo de fótons advindo dessas supernovas, tem um formato esférico e tem sua área dada por

$$A_s = 4\pi S_k^2(\chi). \quad (2.82)$$

Nesse ponto é interessante nos atermos a dois aspectos importantes: O primeiro é que a taxa de fótons que deixa a fonte, é maior que a dos fótons que chegam a ser observados, por um fator de $\frac{1}{1+z}$. A segunda, é que a energia dos fótons é diminuída por um fator de $\frac{1}{1+z}$, devido a expansão do espaço-tempo [19].

De forma que considerando esses dois pontos temos

$$F = \frac{L}{4\pi S_k^2(\chi)(1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi D_L^2}, \quad (2.83)$$

onde definimos a distância luminosa como sendo

$$D_L = (1 + z)S_k(\chi), \quad (2.84)$$

para um Universo plano temos

$$D_L = \chi(r)(1 + z). \quad (2.85)$$

2.6.4.1 Relação entre distância luminosa e redshift

A partir das observações do telescópio Hubble, e utilizando as supernovas do tipo Ia para medir as distâncias cosmológicas, descobriu-se um valor negativo para q_0 (parâmetro de desaceleração), o que mostrou que o Universo está em uma expansão acelerada, contrariando assim as expectativas dos pesquisadores. O experimento foi possível de ser realizado pois, foi descoberto uma relação entre o pico de luminosidade absoluta das supernovas do tipo Ia (SNIa) e a variação temporal das respectivas curvas de luminosidade. Ao medir a variação da curva de luz gerada por uma supernova distante, é possível determinar a sua luminosidade aparente, podemos calcular a distância em que está situada [1].

Através do cálculo de distância de supernovas mais próximas, as quais possui luminosidade conhecida, a linearidade entre o redshift z e a distância de luminosidade D_L , válida nesse regime, nos permite estabelecer o parâmetro de Hubble H_0 , e posteriormente determinar o valor de q_0 [1].

Foi com as supernovas do tipo Ia que os astrônomos construíram o diagrama de Hubble com um alto nível de precisão.

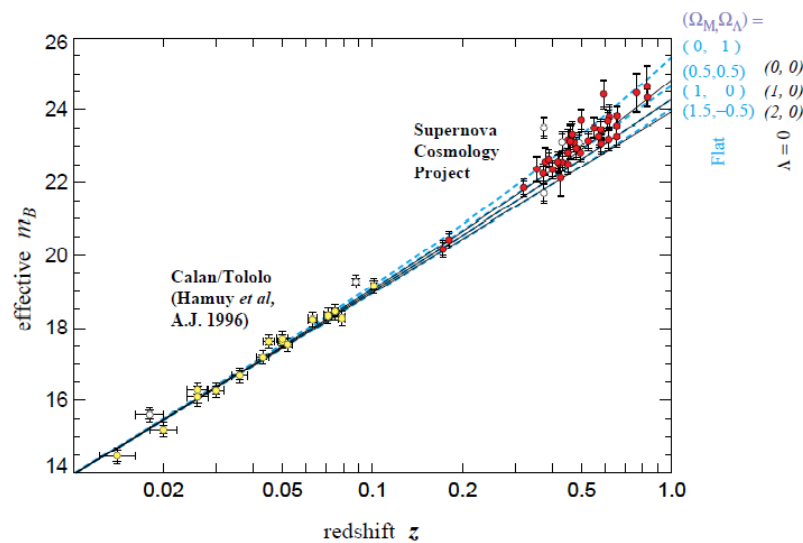


Figura 4 – Diagrama de Hubble obtido pelo grupo Supernova Cosmology Project. Fonte[1]

Na última década, o tamanho das amostras de Supernovas do tipo Ia aumentaram muito. Segundo a amostra Constitution, 397 supernovas desse tipo já foram catalogadas, onde os redshifts estão entre $0.25 < z < 1.8$. [20]

3 Instabilidade Gravitacional Newtoniana

A partir das medições da Radiação Cósmica de Fundo foi possível determinar que o Universo foi muito homogêneo e isotrópico na época de recombinação¹. Hoje, entretanto, o Universo desenvolveu uma estrutura não linear, estrutura essa que podemos observar na forma de galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias e etc. A hipótese de homogeneidade somente pode ser evocada em certo domínio espaço temporal, ou seja, para uma dada escala [3].

No nosso estudo da teoria de perturbação cosmológica trataremos de dois regimes, onde os comprimentos de ondas físicos das perturbações serão maiores que o raio de Hubble: $\lambda > H^{-1}$. E onde os comprimentos de ondas físicos das perturbações serão menores que o raio de Hubble: $\lambda < H^{-1}$. Os comprimentos de ondas das perturbações se relacionam com o número de onda comóvel através de: $k = \frac{2\pi a}{\lambda}$.

A explicação mais simples sobre como as estruturas não lineares podem ser desenvolvidas a partir de pequenas perturbações iniciais, é baseada no fato da instabilidade gravitacional. Nesse capítulo estudaremos a instabilidade gravitacional na teoria Newtoniana da gravidade de forma que os resultados serão tomados como limite de aproximação da relatividade geral. Esta teoria só é aplicável a escalas que fiquem dentro do raio de Hubble .

Para esse contexto o primeiro passo será encontrarmos como as inhomogeneidades evoluem em um fluido não relativístico estático (que não se expande). Depois consideraremos as perturbações lineares em um universo expandindo.

3.1 Teoria de Jeans

Aqui estudaremos a instabilidade gravitacional na teoria Newtoniana. Esta teoria só é aplicável a escalas que fiquem dentro do raio de Hubble, onde os efeitos de curvatura de espaço-tempo são desprezíveis. Além disso, aqui podemos analisar apenas as perturbações da densidade da componente não relativista; perturbações que excedam o raio de Hubble devem ser avaliadas do ponto de vista da teoria completa de perturbação cosmológica e nesse caso, deve ser utilizado a teoria da Relatividade Geral.

Primeiramente, vamos encontrar como inhomogeneidades crescem em um fluido não relativístico que não se expande. Em grandes escalas a matéria pode ser descrita em uma aproximação como um fluido perfeito, o qual é descrito pela densidade de matéria

¹ Uma das épocas iniciais do Universo onde houve o surgimento de átomos neutros, que interagem menos com a radiação. Essa época ocorreu aproximadamente 378.000 anos após o Big-Bang.

$\rho(\vec{x}, t)$, pela entropia por unidade de massa $S(\vec{x}, t)$ e pelo vetor de campo de 3-velocidade $v(\vec{x}, t)$ [8]. Tais quantidades satisfazem as equações hidrodinâmicas newtonianas, que são a equação da continuidade, a equação de Euler da matéria, a equação de conservação da entropia e a equação de Poisson do campo gravitacional. A seguir apresentamos cada uma dessas equações.

Equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.1)$$

Equação de Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \Phi = 0, \quad (3.2)$$

Conservação da Entropia

$$\frac{dS(\vec{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) S = 0, \quad (3.3)$$

Equação de Poisson

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho, \quad (3.4)$$

estas equações hidrodinâmicas, tomadas junto com a equação de estado

$$p = p(\rho, S), \quad (3.5)$$

formam um conjunto completo de 5 equações, que em princípio permitem determinar as 7 funções não conhecidas $\rho, \vec{v}, S, \Phi, p$.

3.2 A instabilidade de Jeans

Vamos primeiramente considerar um universo estático e não expansível, assumiremos a parte de fundo do fluido como sendo isotrópica e homogênea com densidade de matéria constante e independente do tempo: $\rho_0 = cte$. Essa suposição está em óbvia contradição com as equações hidrodinâmicas.

Considerando perturbações sob esta solução estática

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t), \quad (3.6)$$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \Phi_0 + \delta\Phi(\vec{x}, t), \quad (3.7)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}_0 + \delta\vec{v} = \delta\vec{v}(\vec{x}, t), \quad (3.8)$$

$$S(\vec{x}, t) = S_0 + \delta S(\vec{x}, t), \quad (3.9)$$

onde $\delta\rho \ll \rho_0$, $\delta\Phi \ll \Phi_0$, $\delta\vec{v} \ll \vec{v}_0$ e $\delta S \ll S_0$. A pressão é igual a

$$p(\vec{x}, t) = p(\rho_0 + \delta\rho, S_0 + \delta S) = p_0 + \delta p(\vec{x}, t). \quad (3.10)$$

Na aproximação linear, a perturbação δp pode ser expressa em termos das perturbações da densidade de energia e da entropia como

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho + \sigma \delta S, \quad (3.11)$$

onde c_s^2 é a velocidade de som, e σ é definido como: $\sigma \equiv (\partial p / \partial S)$. Para nosso caso de matéria não relativística ($p \ll \rho$) a velocidade do som assim como δv são muito menores que a velocidade da luz.

Substituindo eqs (3.6)-(3.9) e (3.11) em (3.1)-(3.4), e mantendo só termos lineares nas perturbações, [8] obtemos

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla(\delta\vec{v}) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta\rho + \frac{\sigma}{\rho_0} \nabla \delta S + \nabla \delta\Phi = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} = 0, \quad (3.14)$$

$$\Delta \delta\Phi = 4\pi G \delta\rho. \quad (3.15)$$

Tomando a divergência de (3.13), e usando as equações de continuidade e de Poisson para expressar $\nabla \delta v$ e $\delta\Phi$ em termos de $\delta\rho$, obtemos

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta\rho - 4\pi G \rho_0 \delta\rho = \sigma \Delta \delta S, \quad (3.16)$$

esta é uma equação linear compacta para $\delta\rho$, onde a perturbação da entropia serve como uma fonte determinada.

Assumindo que as perturbações da entropia estão ausentes (serão assumidas perturbações adiabáticas), isto é $\delta S = 0$, e como os coeficientes da equação (3.16) não dependem das coordenadas espaciais, podemos tomar uma transformada de Fourier para as perturbações da densidade que tem sua propagação como de onda plana

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \int \delta\rho_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k}\vec{x}) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (3.17)$$

obtemos um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes para os coeficientes de Fourier dependentes do tempo $\delta\rho_{\vec{k}}$

$$\delta\ddot{\rho}_{\vec{k}} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_0)\delta\rho_{\vec{k}} = 0, \quad (3.18)$$

onde o ponto denota derivada com respeito ao tempo, e $k = \|\vec{k}\|$ é o módulo do vetor de onda.

A equação (3.18) tem duas soluções independentes

$$\delta\rho_{\vec{k}} = \exp(\pm iw(k)t), \quad (3.19)$$

onde

$$w(k) = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_0}, \quad (3.20)$$

ou

$$w^2(k) = k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_0. \quad (3.21)$$

O comportamento destas perturbações, chamadas de adiabáticas, depende do sinal na expressão acima, onde definimos o comprimento de onda de Jeans tal que $w(k_j) = 0$

$$\lambda_j = \frac{2\pi}{k_j} = c_s \left(\frac{\pi}{G\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (3.22)$$

O comprimento de onda (λ_j) representa o comprimento de onda crítico. Onde teremos dois regimes possíveis:

- 1- $\lambda > \lambda_j$ onde as perturbações irão crescerem exponencialmente.
- 2- $\lambda < \lambda_j$ onde as perturbações irão oscilarem como uma onda acústica.

3.3 Análise Perturbativa: Fluido em expansão

Nessa seção consideraremos um Universo homogêneo e isotrópico em expansão. Consideraremos pequenas perturbações ao redor de um fundo homogêneo e isotrópico. Realizaremos perturbações na forma

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad (3.23)$$

$$p = p_0 + \delta p, \quad (3.24)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v}, \quad (3.25)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi, \quad (3.26)$$

onde $\delta\rho, \delta p, \delta\vec{v}, \delta\Phi$, representam uma pequena perturbação para a densidade de matéria, velocidade, pressão e campo gravitacional, respectivamente.

Substituindo (3.23 e 3.25) em (3.1) e mantendo apenas termos de primeira ordem, obtemos

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\nabla\delta\vec{v} + \nabla(\delta\rho \cdot \vec{v}_0) = 0, \quad (3.27)$$

substituindo (3.23-3.26) em (3.2), e mantendo apenas termos de primeira ordem, obtemos

$$\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\delta\vec{v} + (\delta\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}_0 + \frac{c_s^2}{\rho_0}\nabla\delta\rho + \nabla\delta\Phi = 0, \quad (3.28)$$

e ainda substituindo (3.26) em (3.4), e mantendo apenas termos de primeira ordem, obtemos

$$\Delta\delta\Phi = 4\pi G\delta\rho, \quad (3.29)$$

como estamos considerando um fluido em expansão, é conveniente usar um sistema de coordenadas comóveis \vec{q} no lugar das coordenadas próprias \vec{x} , que se relaciona como sendo

$$\vec{x} = a(t)\vec{q}, \quad (3.30)$$

a derivada parcial em relação ao tempo no parâmetro \vec{x} é diferente da derivada parcial obtida para o parâmetro \vec{q} . Para uma função geral $f(x, t)$, temos

$$\left(\frac{\partial f(\vec{x} = a\vec{q}, t)}{\partial t}\right)_{\vec{q}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \dot{a}q^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_t, \quad (3.31)$$

assim, com o auxílio da relação conhecida $\vec{v}_0 = H \cdot \vec{x}$ (Lei de Hubble), podemos escrever

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{q}} - (\vec{v}_0 \cdot \nabla_{\vec{x}}). \quad (3.32)$$

As derivadas espaciais são simplesmente relacionadas por [8]

$$\nabla_{\vec{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\vec{q}}. \quad (3.33)$$

Substituindo as derivadas em (3.27) – (3.29), e introduzindo o chamado contraste de densidade $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho_0}$, nós obteremos finalmente

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right) + \frac{1}{a} \nabla\delta\vec{v} = 0, \quad (3.34)$$

$$\left(\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t}\right) + H\delta\vec{v} + \frac{c_s^2}{a} \nabla\delta + \frac{1}{a} \nabla\delta\Phi = 0, \quad (3.35)$$

$$\Delta\delta\Phi = 4\pi G a^2 \rho_0 \delta, \quad (3.36)$$

onde $\nabla \equiv \nabla_{\vec{q}}$ e Δ , são derivadas em relação as coordenadas comóveis \vec{q} .

Agora podemos combinar esses termos chegando a uma equação diferencial de segunda ordem, que descreve a evolução linear do contraste de densidade. Usando a equação (3.34), e tomando sua derivada e ainda utilizando (3.35) e (3.36) encontramos

$$\ddot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \Delta\dot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0\delta = 0, \quad (3.37)$$

essa equação descreve a instabilidade gravitacional de um universo em expansão. Fisicamente a equação (3.37) é uma equação de onda com dois termos extras, um devido a expansão do Universo e o outro devido a gravidade.

Tomando a transformada de Fourier da equação (3.37), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_0\right) \delta_{\vec{k}} = 0, \quad (3.38)$$

essa equação determinará a evolução do k -ésimo modo perturbativo. Quando: $4\pi G\rho_0 \ll c_s^2 k^2/a^2$ a pressão de suporte domina, por outro lado, quando temos: $4\pi G\rho_0 \gg c_s^2 k^2/a^2$ a gravidade dominará.

3.3.1 Solução para um Fluido de matéria

Agora que obtivemos a equação que descreve a instabilidade gravitacional, procuraremos a solução para um fluido de matéria. Considerando um Universo dominado por matéria (isto é $p = 0 = c_s^2$) e considerando as escalas menores que o raio de Hubble, onde o tratamento Newtoniano que descrevemos anteriormente é válido, vamos usar o

comprimento de Jeans (3.22) e a seguinte igualdade válida para o comprimento de onda físico $\lambda = \frac{2\pi}{k}a$.

Agora usando (3.38) com δ_m para esse caso temos:

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_{0,m} \right) \delta_m = 0, \quad (3.39)$$

do comprimento de Jeans podemos fazer

$$c_s = \frac{2\pi}{k_j} \sqrt{\frac{G\rho_{0,m}}{\pi}} \rightarrow \frac{c_s^2 k^2}{a^2} = \frac{4\pi G\rho_{0,m} k^2}{k_j^2 a^2}. \quad (3.40)$$

Como

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}a \rightarrow k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}a^2, \quad (3.41)$$

e

$$k_j^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_j^2}, \quad (3.42)$$

através dessas relações e com o auxílio de (3.40), temos

$$\frac{c_s^2 k^2}{a^2} = 4\pi G\rho_{0,m} \left(\frac{\lambda_j^2}{\lambda^2} \right). \quad (3.43)$$

De (3.43) em (3.39) temos

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\rho_{0,m} \left(1 - \frac{\lambda_j^2}{\lambda^2} \right) \delta_m = 0, \quad (3.44)$$

utilizando as quantidades para o Universo homogêneo $a \sim t^{\frac{2}{3}}$, $H = \frac{2}{3t}$, de forma que usando a equação de Friedmann podemos obter

$$\rho_0 = 1/6\pi Gt^2, \quad (3.45)$$

assim substituindo em (3.44), temos

$$\ddot{\delta}_m + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_m - \frac{2}{3}t^2 \left(1 - \frac{\lambda_j^2}{\lambda^2} \right) \delta_m = 0, \quad (3.46)$$

para os modos dentro do horizonte, e admitindo uma solução polinomial do tipo $\delta \sim t^b$, a solução será

$$\delta_m = c_1 t^{\frac{2}{3}} + c_2 t^{-1}, \quad (3.47)$$

e dado que $a \sim t^{\frac{2}{3}}$, temos

$$\delta_m = c_1 a + c_2 a^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.48)$$

sendo essa a solução para a evolução do contraste de densidade. Assim vemos que há duas soluções, uma crescente e uma em decaimento. Apenas os modos de crescimento contribuem na formação de estruturas. Estes modos, como podemos ver, crescem proporcionalmente ao crescimento do fator de escala a .

3.3.2 Fluido de várias componentes

Se estivermos tratando de um fluido de várias componentes, primeiramente precisamos generalizar a expressão (3.38), pois até o momento só consideramos um fluido com uma só componente, as perturbações na componente não-relativística evoluem de acordo com

$$\ddot{\delta}_i + 2H\dot{\delta}_i + \left[\frac{(c_s^2)_i k^2}{a^2} \delta_i - 4\pi G \rho_0 \sum_j \epsilon_j \delta_j \right] = 0, \quad (3.49)$$

onde o índice i refere-se à componente em questão, e $\epsilon_j = \rho_0/\rho$ fornece uma medida de distribuição de cada componente para a densidade total não perturbada $\rho_0 = \sum_i \rho_{0i}$.

De forma geral, podemos expressar o crescimento de uma perturbação de densidade como [21]

$$\text{Crescimento} = (\text{Gravidade} - \text{Pressão}) - \text{Expansão}, \quad (3.50)$$

o termo relacionado a gravidade vai atuar tentando produzir o colapso e formar a estrutura. O termo de pressão sempre funciona como suporte, podendo suprimir a formação da estrutura para o caso $\lambda < \lambda_j$ [21]. O termo de expansão "suprime" o crescimento. Esses fatores agirão conjuntamente e determinarão a evolução da perturbação de densidade.

4 Teoria de Perturbação Relativística

No capítulo 2 desse trabalho, nós consideramos um Universo homogêneo e isotrópico, mas sabemos que na realidade o nosso Universo não é perfeitamente homogêneo e isotrópico. No capítulo anterior vimos uma análise newtoniana do comportamento das inhomogeneidades, porém como já havíamos dito ela é limitada e só é válida em escalas menores que o raio de Hubble. Nesse capítulo usaremos a teoria geral da relatividade para analisar as instabilidades gravitacionais nessa teoria. Através do uso da RG teremos uma descrição unificada para todas as escalas. Infelizmente, a interpretação física dos resultados obtidos é menos transparente na Relatividade Geral do que na teoria newtoniana [8]

Começamos analisando a métrica. A métrica do nosso Universo pode ser escrita como uma métrica de fundo mais pequenas perturbações.

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é a métrica de fundo e $\delta g_{\mu\nu}$ é a parte perturbada da métrica. Assumiremos que $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^{(0)}|$. Descreveremos a métrica diretamente em termos do tempo conforme $\eta = \int a^{-1} dt$. Consideraremos perturbações cosmológicas sobre a métrica.

Também usaremos o chamado parâmetro de Hubble conforme dado por

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = Ha. \quad (4.2)$$

Considerando as perturbações cosmológicas sobre a métrica, temos

$$ds^2 = (g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu, \quad (4.3)$$

a componente δg_{00} se comporta como um escalar sob rotação espacial então [8]

$$\delta g_{00} \equiv 2a^2\Phi, \quad (4.4)$$

onde Φ é um escalar.

As componentes δg_{0i} podem ser decompostas como sendo a soma de um gradiente de um escalar (B) e vetor (S_i), de divergência nula

$$\delta g_{0i} \equiv a^2(\partial_i B + S_i), \quad (4.5)$$

onde $\partial_i S^i = 0$. Da mesma maneira, para o tensor δg_{ij} , temos sua decomposição [8]

$$\delta g_{ij} \equiv a^2(2\Psi\delta_{ij} + 2\partial_j\partial_i E + \partial_i F_j + \partial_j F_i + h_{ij}), \quad (4.6)$$

onde Ψ , e E são funções escalares $\partial_i F^i = 0$ (vetor transverso), h_{ij} é um tensor que satisfaz as seguintes contrações [8]

$$\partial_i h_j^i = 0 \quad (\textit{transverso}), \quad (4.7)$$

$$h_i^i = 0 \quad (\textit{traçonulo}), \quad (4.8)$$

com isso o número de funções independentes usadas para formar $\delta g_{\mu\nu}$ são 10 equações linearmente independentes, divididas em 3 categorias: escalares, vetoriais e tensoriais.

Perturbações Escalares: quatro perturbações (Φ, Ψ, B, E). Tais perturbações são as mais importantes porque mostram as instabilidades gravitacionais que dão origem às estruturas do Universo.

Perturbações Vetoriais: duas perturbações (F_i, S_i), fornecendo 4 graus de liberdade, duas para cada. Tais perturbações estão relacionadas aos movimentos do fluido, responsáveis por produzir campos magnéticos e costumam decair rapidamente, não tendo assim interesse cosmológico.

Perturbações Tensoriais: uma perturbação (h_{ij}), fornecendo dois graus de liberdade, pois a simetria elimina três, a condição de traço nulo elimina uma e a condição transversalidade elimina três. São perturbações que descrevem as ondas gravitacionais. Na aproximação linear, as ondas gravitacionais não induzem nenhuma perturbação no fluido perfeito.

A métrica (4.3) se torna

$$ds^2 = a^2(\eta)(-(1 + 2\Psi)d\eta^2 - 2(\partial_i B + S_i)dx^i d\eta) + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j - (2\partial_i\partial_j E + \partial_j F_i + \partial_i F_j + h_{ij})dx^i dx^j. \quad (4.9)$$

4.1 A Fixação do Gauge

A fim de analisarmos as perturbações cosmológicas, precisamos estudar a diferença da evolução destas perturbações num mesmo ponto não homogêneo e anisotrópico, onde ocorrem as perturbações, e no espaço tempo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de fundo.

A relatividade geral é uma teoria invariante por transformações generalizadas de coordenadas, ou seja, temos total liberdade para redefinir as réguas e relógios, assim como as trajetórias dos observadores dos sistemas de coordenadas. Assim é necessário introduzir uma transformação de coordenadas entre dois referenciais, ou seja, uma transformação de gauge.

Uma transformação infinitesimal pode ser expressa como

$$x^a \rightarrow \tilde{x}^a = x^a + \xi^a, \quad (4.10)$$

e as perturbações são definidas como

$$\delta M(\eta, x^\mu) = M(\eta, x^\mu) - \tilde{M}(\eta, x^\mu), \quad (4.11)$$

onde \tilde{M} é a quantidade não perturbada.

Sob as transformações de gauge, as perturbações de um escalar s , um 4-vector v^μ , e os tensores $T_{\mu,\nu}$ (covariante) e $T^{\mu\nu}$ (contravariante) são definidas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta s|_{(X)} &= \delta s|_{(Y)} - \partial_\mu \bar{s} \delta \xi^\mu, \\ \delta v^\mu|_{(X)} &= \delta v^\mu|_{(Y)} - \partial_\lambda \delta \xi^\mu \bar{v}^\lambda - \partial_\lambda \bar{v}^\lambda \delta \xi^\lambda, \\ \delta T_{\mu\nu}|_{(X)} &= \delta T_{\mu\nu}|_{(Y)} - \partial_\nu \delta \xi^\beta \bar{T}_{\mu\beta} - \partial_\mu \delta \xi^\alpha \bar{T}_{\alpha\nu} - \partial_\rho \bar{T}_{\mu\nu} \delta \xi^\rho, \\ \delta T^{\mu\nu}|_{(X)} &= \delta T^{\mu\nu}|_{(Y)} + \partial_\beta \delta \xi^\nu \bar{T}^{\mu\beta} + \partial_\alpha \delta \xi^\mu \bar{T}^{\alpha\nu} - \partial_\rho \bar{T}^{\mu\nu} \delta \xi^\rho, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\delta T^{\mu\nu}|_{(X)} = \delta T^{\mu\nu}|_{(Y)} + \partial_\beta \delta \xi^\nu \bar{T}^{\mu\beta} + \partial_\alpha \delta \xi^\mu \bar{T}^{\alpha\nu} - \partial_\rho \bar{T}^{\mu\nu} \delta \xi^\rho, \quad (4.13)$$

onde \bar{s} , \bar{v}^μ , $\bar{T}_{\mu\nu}$ e $\bar{T}^{\mu\nu}$ são definidas conforme a métrica de fundo FRW e (X) e (Y) são sistemas de coordenadas perturbados genéricos.

Utilizando a transformação de gauge no tensor métrico perturbado $g_{\mu\nu}$, vemos que no novo sistema de coordenadas as perturbações também podem ser divididas em escalares, vetoriais e tensoriais. [8]

No nosso estudo vamos focar nas perturbações escalares, pois elas desempenham um papel dinâmico e importante na formação de estruturas cosmológicas.

4.2 Perturbações Escalares

Se nós considerarmos apenas as contribuições das perturbações escalares na métrica (4.3), descritas pelos campos (Φ, Ψ, B, E) , teremos

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-(1 + 2\Psi)d\eta^2 - 2\partial_i B dx^i d\eta + (2\partial_i \partial_j E + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}) dx^i dx^j \right). \quad (4.14)$$

Impondo condições na métrica, o que corresponde às de coordenadas para quatro indicadores [9]. Escolheremos $E = B = 0$. Isso finalmente deixa a métrica perturbada com o que chamamos de gauge Newtoniano.

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right). \quad (4.15)$$

Para derivarmos as equações de Einstein perturbativas, decomponemos o tensor de Einstein G^μ_ν e o tensor energia-momento T^μ_ν , na parte homogênea e na parte perturbada: $G^\mu_\nu = G^\mu_{\nu(0)} + \delta G^\mu_\nu$ e $T^\mu_\nu = T^\mu_{\nu(0)} + \delta T^\mu_\nu$.

As equações de Einstein perturbativas são dadas por

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi G \delta T^\mu_\nu. \quad (4.16)$$

Os símbolos de Christoffel perturbados são dados por

$$\delta \Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \delta g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\delta g_{\alpha\nu,\lambda} + \delta g_{\alpha\lambda,\nu} - \delta g_{\nu\lambda,\alpha}). \quad (4.17)$$

Para a métrica (4.15), os termos não nulos dos símbolos perturbados de Christoffel são

$$\delta \Gamma^0_{ij} = \delta_{ij} [2\mathcal{H}(\Phi - \Psi) + \Phi'], \quad (4.18)$$

$$\delta \Gamma^0_{00} = \Psi', \quad (4.19)$$

$$\delta \Gamma^0_{0i} = \delta \Gamma^i_{00} = \Psi_{;i}, \quad (4.20)$$

$$\delta \Gamma^i_{j0} = \delta^i_j \Phi'. \quad (4.21)$$

O próximo passo é derivar as perturbações no tensor de Ricci e no escalar de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \delta \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \delta \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \delta \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \delta \Gamma^\beta_{\alpha\nu}, \quad (4.22)$$

e

$$\delta R = \delta g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} + g^{\mu\alpha} \delta R_{\alpha\mu}, \quad (4.23)$$

e finalmente o tensor de Einstein perturbado será dado por

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta R, \quad (4.24)$$

onde

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = \delta g^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha} \delta G_{\alpha\nu}, \quad (4.25)$$

assim para a métrica (4.15) obteremos

$$\delta G_0^0 = 2a^{-2} \left(\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi - \Phi') + \nabla^2 \Phi \right), \quad (4.26)$$

$$\delta G_i^0 = 2a^{-2} (\Phi' - \mathcal{H}\Psi)_{|i}, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i &= \left((\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi + \mathcal{H}\Psi' - \Phi'' - 2\mathcal{H}\Phi' \right) \delta_j^i, \\ &+ a^{-2} \left(\nabla^2 (\Psi + \Phi) \delta_j^i - (\Psi + \Phi)_{|j}^i \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde o subscrito "||" representa a derivada covariante com a métrica.

Uma vez que já obtemos as perturbações para o tensor de Einstein (δG_{ν}^{μ}), precisamos agora, a fim de obtermos as equações da dinâmica cósmica perturbada, obtermos também as perturbações para o tensor energia momento (δT_{ν}^{μ}), o que nos dará um conjunto de equações diferenciais acopladas que regem a dinâmica perturbativa.

A 4-velocidade total perturbada é dada por [9]

$$u^u = \left(\frac{1}{a}(1 - \Psi), \frac{v^i}{a} \right), \quad (4.29)$$

$$u_u = g_{\mu\nu} u^{\nu} = (-a(1 + \Psi), av_i), \quad (4.30)$$

$$u_u u^u = 1, \quad (4.31)$$

onde $v^i = \frac{dx^i}{d\eta}$ é a velocidade peculiar da matéria com relação à expansão geral [9].

4.3 Modelo cosmológico com Fluido Único

Consideraremos um modelo de fluido único com tensor de energia momento $T_{\mu\nu}$. No decorrer dessa seção, consideraremos as seguintes grandezas como representantes das quantidades perturbadas

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad \theta \equiv \nabla_i v^i, \quad (4.32)$$

onde $\delta\rho/\rho \equiv (\rho(x) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ é o contraste de densidade ($\rho(x)$ é o campo de densidade e $\bar{\rho}$ é a média espacial da densidade), e θ é a divergência da velocidade.

Para um fluido perfeito, o tensor energia momento perturbado com a equação de estado $\omega = \frac{p}{\rho}$ pode ser escrito como [15]

$$\delta T_{\nu}^{\mu} = \rho \left(\delta(1 + c_s^2) u_{\nu} u^{\mu} + (1 + \omega)(\delta u_{\nu} u^{\mu} + u_{\nu} \delta u^{\mu}) + c_s^2 \delta \delta_{\nu}^{\mu} \right), \quad (4.33)$$

onde δ_{ν}^{μ} não deve ser confundido com o contraste de densidade δ .

Introduzimos a velocidade do som como sendo

$$c_s^2 \equiv \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}, \quad (4.34)$$

A pressão é uma função da densidade de energia e da entropia, $p(\rho, S)$, mas as perturbações observadas na CMB são compatíveis com a previsão de perturbações adiabáticas, desta forma podemos descartar os termos relacionados a entropia. Consideraremos apenas fluidos barotrópicos, ou seja, $p(\rho)$ onde a pressão é uma função apenas da densidade.

Com o auxílio das equações (4.29 - 4.31), podemos determinar as componentes do tensor energia momento que são

$$\delta T_0^0 = -\delta\rho, \quad (4.35)$$

$$\delta T_i^0 = -\delta T_0^i = (1 + \omega)\rho v^i, \quad (4.36)$$

$$\delta T_1^1 = \delta T_2^2 = \delta T_3^3 = c_s^2 \delta p, \quad (4.37)$$

usando as quantidades do tensor de Einstein perturbado obtidos em (4.16), teremos as seguintes relações

$$3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi - \Phi') + \nabla^2\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho, \quad (4.38)$$

$$\nabla^2(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 (1 + \omega)\rho\theta, \quad (4.39)$$

$$\Psi = -\Phi, \quad (4.40)$$

$$\Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' - \mathcal{H}\Psi' - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi = -4\pi G a^2 c_s^2 \delta\rho. \quad (4.41)$$

Agora que obtivemos esse conjunto de equações, podemos derivar algumas equações úteis usando a equação da continuidade $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$. A parte de primeira ordem da equação da continuidade será

$$\delta T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0, \quad (4.42)$$

de forma que sua expressão linearizada para $\nu = 0$ ficará

$$\delta T_{\nu;\mu}^{\mu} - \delta\Gamma_{0\beta}^{\alpha} T_{\alpha}^{\beta} + \Gamma_{0\beta}^{\alpha} \delta T_{\alpha}^{\beta} + \delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} T_0^{\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} \delta T_0^{\beta} = 0, \quad (4.43)$$

substituindo os termos dos símbolos de Christoffel e do tensor energia momento perturbados, vemos que a equação acima se reduz para expressão,

$$(\delta\rho)' + 3\mathcal{H}(\delta\rho - \delta p) = -(\rho + p)(\theta + 3\Phi'), \quad (4.44)$$

onde $\theta = \nabla_i v^i$ é a divergência da velocidade.

Utilizando a equação de conservação não perturbada dada por

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0, \quad (4.45)$$

juntamente com $w = \frac{p}{\rho}$ e $c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta\rho}$, podemos reescrever (4.44) como sendo

$$(\delta)' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta = -(1 + \omega)(\theta + 3\Phi'), \quad (4.46)$$

Essa última equação é chamada de equação da continuidade perturbada.

Para a matéria não relativística consideramos $\omega = 0$ e $c_s^2 = 0$, dessa forma a equação da continuidade perturbada se reduz para

$$(\delta)' = -\theta - 3\Phi', \quad (4.47)$$

de forma análoga ao procedimento anterior, a equação da continuidade $\delta T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ para $\nu = i$ nos fornecerá [9]

$$\delta q' + 3\mathcal{H}\delta q = -a\delta p - (\rho + p)a\Psi, \quad (4.48)$$

onde $\delta q \equiv a(\rho + p)v$ e v é o potencial da velocidade relacionada a v^i através de $v^i = \nabla^i v$. Escrevendo a equação anterior com relação a v^i e tomando a divergência ∇_i , teremos

$$\theta' + \left(\mathcal{H}(1 - 3\omega) + \frac{\omega'}{1 + \omega} \right) \theta = -\nabla^2 \left(\frac{c_s^2}{1 + \omega} + \Psi \right), \quad (4.49)$$

tal equação descreve a evolução da velocidade de um fluido cosmológico.

Para matéria não relativística, a equação anterior se reduz para

$$\theta' + \mathcal{H}\theta = -\nabla^2\Psi - \nabla^2(c_s^2\delta), \quad (4.50)$$

Com o intuito de facilitarmos as nossas manipulações, trabalharemos com o formalismo de Fourier, para isso expandiremos as perturbações em funções de suas transformadas de Fourier

$$\Phi = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Phi_k, \quad \Psi = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Psi_k, \quad (4.51)$$

$$\delta = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad \theta = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \theta_k, \quad (4.52)$$

o subscrito k representa um modo de Fourier para cada número de onda k . No espaço de Fourier assumiremos que as variáveis de perturbação ($\Phi, \Psi, \delta, \theta, etc.$) são somas de ondas planas $\delta_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Devido ao fato dessas equações serem lineares, cada onda plana obedece a equações idênticas, mas com números de onda comóveis k diferentes. Durante a evolução linear, a escala física λ_p da perturbação expande-se devido a expansão cósmica de acordo com $\lambda_p = (\frac{2\pi}{k})a$. Para o caso em que as perturbações entrarem em um regime não-linear, então o tratamento que estamos descrevendo deixa de ser válido e as perturbações se desacoplam da expansão do Universo.

Na prática, considerando o espaço de Fourier, cada quantidade de perturbação Φ e seus derivados podem ser substituídos da seguinte forma

$$\Phi(x, \eta) \rightarrow e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Phi(\eta), \quad (4.53)$$

$$\nabla\Phi(x, \eta) \rightarrow i e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} k \Phi(\eta), \quad (4.54)$$

$$\nabla^2\Phi(x, \eta) \equiv \nabla_i \nabla^i \Phi(x, \eta) \rightarrow -e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} k^2 \Phi(\eta), \quad (4.55)$$

Note que somamos sobre dois índices espaciais sem o uso dos coeficientes da métrica g_{ij} (mais exatamente, usamos a métrica tridimensional espacial induzida pela simetria do espaço-tempo homogêneo e isotrópico, que para espaços planos, é igual à métrica euclidiana).

Através das equações (4.38)-(4.41), (4.46) e (4.49) podemos obter as seguintes expressões para cada modo no espaço de Fourier

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 \rho \delta, \quad (4.56)$$

$$k^2(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = -4\pi G a^2 (1 + \omega) \rho \theta, \quad (4.57)$$

$$\Psi = -\Phi, \quad (4.58)$$

$$\Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' - \mathcal{H}\Psi' - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi = -4\pi G a^2 c_s^2 \rho \delta, \quad (4.59)$$

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta = -(1 + \omega)(\theta + 3\Phi'), \quad (4.60)$$

$$\theta' + \left[\mathcal{H}(1 - 3\omega) + \frac{\omega'}{1 + \omega} \right] \theta = k^2 \left(\frac{c_s^2}{1 + \omega} \delta + \Psi \right), \quad (4.61)$$

onde teremos

$$\theta = i\vec{k} \cdot \vec{v}. \quad (4.62)$$

As equações que obtemos acima não são independentes, mas são muito úteis para entendermos a evolução das perturbações lineares.

Agora, podemos utilizar as equações (4.56) e (4.57) para obtermos

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho (\delta + 3\mathcal{H}(\omega + 1)\theta/k^2) = 4\pi G a^2 \rho \delta^*, \quad (4.63)$$

que é chamada equação relativística de Poisson e onde definimos a variável de matéria total [9]

$$\delta^* \equiv \delta + 3\mathcal{H}(\omega + 1)\theta/k^2. \quad (4.64)$$

Utilizando as equações (4.56), (4.58) e (4.59) obtemos uma equação em termos de Φ

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + (c_s^2 k^2 + 3\mathcal{H}^2 c_s^2 + 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 0. \quad (4.65)$$

Podemos utilizar a equação de Poisson relativística (4.63), de forma que essa nossa última expressão se torna [9]

$$(\delta^*)'' + \mathcal{H}(1 + 3c_s^2 - 6\omega)(\delta^*)' - \left(\frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1 - 6c_s^2 - 3\omega^2 + 8\omega) - c_s^2 k^2 \right) \delta^* = 0, \quad (4.66)$$

onde c_s^2 e ω são funções arbitrárias do tempo e onde utilizamos a expressão

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}(1 + 3\omega)\mathcal{H}^2. \quad (4.67)$$

4.4 Escalas Maiores que o raio de Hubble

Na Seção anterior obtemos as equações para as perturbações. Nas discussões subsequentes vamos resolver essas equações analiticamente para entendermos fisicamente o que elas representam. Nesse ponto teremos que fazer algumas considerações, em princípio trabalharemos no limite de larga escala, isto é, $k \ll \mathcal{H} = aH$. Isso corresponde à escala na qual o comprimento de onda físico $\lambda_p = (2\pi/k)a$ das perturbações é muito maior do que o raio de Hubble, isto significa que as escalas físicas estão fora do horizonte. Se a pressão depender somente da densidade de energia e a equação de estado ω for uma constante,

então temos que $c_s^2 = \omega$, o que é válido para o caso da matéria e da radiação. Considerando essas condições, a equação (4.65) com o auxílio de (4.67), torna-se

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' = 0, \quad (4.68)$$

podemos ver claramente que $\Phi' = 0$ é uma solução para a equação anterior. Utilizando a equação (4.58) e substituindo a solução $\Phi' = 0$ em (4.56) obteremos

$$3\mathcal{H}^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho \delta, \quad (4.69)$$

podemos utilizar a equação de Friedmann na forma $3\mathcal{H}^2 = 8\pi G a^2 \rho$, o que implicará em

$$\delta = 2\Phi, \quad (4.70)$$

isso nos diz que $\Phi = \text{constante}$, no limite de larga escala de forma que $\delta = \text{constante}$. A equação (4.68) é uma equação diferencial de segunda ordem, portanto deve ter duas soluções. Porém, temos que $\Phi = \text{constante}$, é solução dominante (pelo menos para $c_s^2 > -1$). Logo, podemos concluir que o potencial gravitacional mantém-se constante fora do raio de Hubble sempre que temos $c_s^2 = \omega$ para o fluido total que descreve o conteúdo material do Universo. Veremos mais a frente que durante a fase de transição da radiação para a matéria, esta condição será violada.

4.5 Escalas Menores que o raio de Hubble

Na seção anterior estudamos o caso em que o comprimento de onda físico λ_p era maior que o comprimento de Hubble, nessa seção estudaremos o caso oposto, onde $k \gg \mathcal{H}$, ou seja, escalas dentro do raio de Hubble. Aqui vamos derivar as equações para um fluido que não tenha pressão ($\omega = 0$) na ausência de perturbações, mas que tenha uma pequena velocidade do som no nível perturbativo,

$$c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho} \ll 1, \quad (4.71)$$

assim a equação (4.57) nos diz que $\Phi' - \mathcal{H}\Psi \simeq 0$, de forma que a equação (4.56) corresponde à equação de Poisson

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \rho \delta = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta, \quad (4.72)$$

se fizermos a derivada da equação anterior e substituir em (4.60), teremos

$$\delta' = -\theta - \frac{9\mathcal{H}^2}{2k^2}\delta \left(2\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} + \frac{\delta'}{\delta} \right) \simeq -\theta. \quad (4.73)$$

Assim, as equações perturbadas, no limite em que as tais perturbações estão dentro do horizonte, e um vez que estamos tratando do caso onde $k \gg \mathcal{H}$, são

$$\delta' = -\theta, \quad (4.74)$$

$$\theta' = -\mathcal{H}\theta + c_s^2 k^2 \delta - k^2 \Phi. \quad (4.75)$$

Diferenciando a equação (4.73) com respeito a η , e usando a equação (4.74), podemos escrever

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H} \right) \delta = 0. \quad (4.76)$$

Se estivermos tratando no espaço de Minkowski, $\mathcal{H} \rightarrow 0$, essa equação reduz-se na equação clássica de fluido $\delta'' + c_s^2 k^2 \delta = 0$, onde c_s é a velocidade do som. Da equação (4.76) notamos que as perturbações não crescerão se

$$c_s^2 k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 > 0, \quad (4.77)$$

isso ocorre quando o comprimento de onda físico $\lambda_p = (2\pi/k)a$ é menor que o comprimento que denominamos comprimento de Jeans [9]

$$\lambda_j = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}. \quad (4.78)$$

Para escalas menores que λ_j , as perturbações estão sujeitas a uma oscilação amortecida. Para partículas da matéria escura, a velocidade de dispersão é sempre desprezível se estivermos tratando do regime linear. Para os fótons, temos que $c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$, de modo que

$$\lambda_p \approx \frac{1}{H}, \quad (4.79)$$

assim, vemos que o crescimento das perturbações não ocorre para todas as escalas menores que o raio de Hubble.

Quando $c_s k \ll \mathcal{H}$, as perturbações crescem livremente, assim a expressão que descreve as perturbações para um fluido único é

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta = 0, \quad (4.80)$$

para esse tipo de equação podemos usar o número de e-folding, definindo como $N = \ln a$. Assim podemos escrever a equação anterior como sendo

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \left(\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{dN} + 1 \right) \frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2}\delta = 0. \quad (4.81)$$

De forma que a equação (4.67), pode ser reescrita como sendo

$$\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{dN} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\omega, \quad (4.82)$$

Assim, para um fluido único com $\omega = 0$ a equação (4.81) torna-se

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} - \frac{1}{2} \frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2}\delta = 0, \quad (4.83)$$

cujas soluções são do tipo: $\delta = Ae^{\lambda N}$, o que nos dá a solução $\lambda = 1, -3/2$. Logo, teremos que a evolução do modo crescente e decrescente durante a era da matéria é

$$\delta_+ = Aa, \quad \delta_- = Ba^{-3/2}, \quad (4.84)$$

e em termos do tempo cósmico t , a solução crescente evolui com $\delta_+ \approx t^{2/3}$.

O modo decrescente logo se torna desprezível com respeito ao modo crescente e pode ser desconsiderado [9]. Se inserirmos δ_+ na equação de Poisson, vemos que $\Phi \approx a^2 H^2 \delta_+ \approx \text{constante}$. Vemos então que o potencial gravitacional é constante durante a era dominada pela matéria, dentro ou fora do raio de Hubble.

4.6 Modelo cosmológico com dois Fluidos

Nessa parte do trabalho trataremos o caso de um Universo contendo radiação ($\omega_r = c_s^2 = 1/3$) e matéria ($\omega_r = c_s^2 = 0$), onde a matéria é composta por matéria escura e matéria bariônica que possuem a mesma equação de estado, de forma que interagem apenas gravitacionalmente. Nós encontramos um conjunto de equações para as perturbações e velocidade das duas componentes seguindo a mesma abordagem feita para o caso de apenas um fluido. No espaço de Fourier temos que o sistema de equações para as perturbações será

$$\delta'_m = -(\theta_m + 3\Phi'), \quad (4.85)$$

$$\theta'_m = -\mathcal{H}\theta_m - k^2\Phi, \quad (4.86)$$

$$\delta_r = -\frac{4}{3}(\theta_r + 3\Phi'), \quad (4.87)$$

$$\theta'_r = k^2\left(\frac{3}{4}c_s^2\delta_r - \Phi\right), \quad (4.88)$$

$$k^2(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = -4\pi G(1 + \omega_{eff})a^2\rho_t\theta_t, \quad (4.89)$$

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi Ga^2\rho_t\delta_t, \quad (4.90)$$

onde o sub-índice t denota a quantidade total

$$\rho_t\delta_t = \rho_m\delta_m + \rho_r\delta_r, \quad (4.91)$$

$$\omega_{eff} = \frac{\rho_r/3}{\rho_m + \rho_r}, \quad (4.92)$$

$$\theta_t = \frac{(1 + \omega_m)\Omega_m\theta_m + (1 + \omega_r)\Omega_r\theta_r}{1 + \omega_{eff}}, \quad (4.93)$$

$$\delta_t = \Omega_m\theta_m + \Omega_r\theta_r. \quad (4.94)$$

A equação de estado efetiva ω_{eff} é

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (4.95)$$

Para a escala em que as perturbações são muito menores do que o horizonte de Hubble, $k \gg \mathcal{H}$, e considerando matéria e radiação, temos

$$k^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}(\Omega_m\delta_m + \Omega_r\delta_r), \quad (4.96)$$

de forma análoga aos procedimentos para obtenção da equação (4.76), nós encontramos as equações para as perturbações para o regime $k \gg \mathcal{H}$, das componentes de matéria e radiação

$$\delta''_m + \mathcal{H}\delta'_m - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(\Omega_m\delta_m + \Omega_r\delta_r) = 0, \quad (4.97)$$

$$\delta''_r + \frac{k^2}{3}\delta_r = 0. \quad (4.98)$$

Durante a época dominada pela radiação, temos que $\Omega_m \simeq 0$ e $\Omega_r \simeq 1$. Já que estamos tratando de $k \gg \mathcal{H}$, a segunda equação nos diz que o contraste de densidade da radiação oscila ao redor de zero, assim podemos tomar a média do contraste de radiação como sendo $\langle \delta_r \rangle$ [9], e quando aplicada na primeira equação temos: $\Omega_m\delta_m + \Omega_r\delta_r \simeq 0$, o que implica em

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' = 0, \quad (4.99)$$

cuja solução é dada por [9]

$$\delta_m'' = C_1 + C_2 \int d\eta/a \quad (4.100)$$

Notamos então que essa solução nos fornece uma correção logarítma ao resultado que obtivemos com somente um fluido, fazendo com que as perturbações de matéria evoluam apenas levemente durante a era da radiação.

Na fase de dominação da matéria temos: $|\Omega_m \delta_m| \gg |\Omega_r \delta_r|$ de forma que teremos uma solução semelhante à (4.84).

De forma análoga, podemos considerar o caso de matéria sem pressão com uma constante cosmológica Λ . Contudo, ρ_Λ é constante por definição e $\delta_\lambda = 0$, assim a equação (4.80) pode ser escrita como:

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\delta_m = 0, \quad (4.101)$$

usando novamente o número de e-Folding $N = \ln a$, podemos reescrever a equação anterior como sendo

$$\frac{d^2\delta_m}{dN^2} + \left(\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{dN} + 1 \right) \frac{d\delta_m}{dN} - \frac{3}{2}\Omega_m\delta_m = 0, \quad (4.102)$$

se considerarmos $\Omega_m = \text{constante}$, então temos que a solução para a equação anterior é

$$\delta_m \sim a^{\lambda_\pm}, \quad (4.103)$$

com [9]

$$\lambda_\pm = \frac{1}{4} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 24\Omega_m} \right), \quad (4.104)$$

esse caso ocorre quando a fração $1 - \Omega_m$ da matéria do Universo estar na forma de uma densidade de energia que tem $w = 0$, mas que, ao contrário da matéria escura fria, não pode se aglomerar em escalas menores que o horizonte.

No caso em que temos a equação de estado da energia escura $\omega = -1$, pode-se encontrar uma solução aproximada para a perturbação de densidade da matéria que é dada pelo que chamamos de taxa de crescimento f , que é definida de acordo com [22] [9]

$$f \equiv \frac{d \ln \delta_m}{d \ln a} = \Omega_m^\gamma, \quad (4.105)$$

de forma que a solução aproximada é

$$\delta_m = \delta_m(a_i) \exp \left(\int_{a_i}^a \Omega_m(\tilde{a})^\gamma \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}} \right). \quad (4.106)$$

A taxa de crescimento para o modelo Λ CDM, é dado por $\gamma \approx 0,55$ [23]. Dado esse comportamento, vemos que o termo $\mathcal{H}^2 \delta_m$ na equação de Poisson (4.96), não é mais constante, assim, o potencial gravitacional Φ em escalas menores que o horizonte de Hubble também não é mais constante.

Após analisar esses resultados vemos que para o modelo Λ CDM, o potencial é aproximadamente constante durante a era da matéria, no entanto começa a decrescer depois que o Universo entra na era de dominação da energia escura.

5 Conclusões

Neste trabalho discutimos vários aspectos e conceitos do estudo em cosmologia, conceitos esses que nos permite um entendimento mais profundo sobre o Universo em que vivemos. Começamos utilizando as quantidades da relatividade geral e a métrica de Friedmann para obtermos as equações que regem a dinâmica para um Universo homogêneo e isotrópico, tais equações (Friedmann, Fluido e aceleração) são de fundamental importância no estudo cosmológico de modelos de universo que possuem equações de estado do tipo $p = w\rho$. Vimos a aplicação a um caso geral, onde resolvemos as equações da dinâmica obtidas a partir da métrica para definir o modelo Λ CDM. Obtivemos e estudamos também quantidades importantes como a idade do Universo e as relações de distância em cosmologia, que é de relevância para estudos em cosmologia, pois no nosso trabalho vimos que o Universo se encontra em expansão e as distâncias entre objetos estão mudando constantemente.

No geral, no capítulo 2 revisamos como através do princípio cosmológico (hipótese em que os observadores terrestres não ocupam uma posição observacional privilegiada dentro do Universo), e que é expresso matematicamente na forma da métrica de Friedmann, foi possível expandir o conhecimento em cosmologia que se sabia antes da relatividade geral.

Nos capítulos posteriores, 3 e 4 estudamos a teoria de perturbação cosmológica linear dado que as inomogeneidades estão presentes no nosso Universo. Primeiramente (capítulo 3) usamos a abordagem da instabilidade gravitacional na teoria Newtoniana da gravidade, através do formalismo de Jeans obtivemos a equação para o contraste de densidade que descreve a instabilidade gravitacional em um universo em expansão naquele contexto. Através dos parâmetros (a e H), obtidos para o Universo homogêneo, obtivemos a solução para a equação que descreve a instabilidade para um fluido de matéria em modos dentro do horizonte de Hubble, e da solução vimos que apenas os modos de crescimento contribuem na formação de estruturas.

No capítulo 4 estudamos a teoria de perturbação cosmológica linear mas agora no contexto da relatividade geral onde temos um formalismo mais complexo. Começamos vendo a fixação do gauge newtoniano e as classificações das perturbações, onde para tais classificações dividimos em perturbações escalares (as mais importantes) e perturbações vetoriais e tensoriais.

Fizemos os cálculos perturbativos nas quantidades da relatividade geral e do tensor fluido perfeito, a fim de chegarmos nas equações que regem a dinâmica para as perturbações, e através delas obtivemos as soluções que descrevem a física dessas perturbações. Através

dessa abordagem foi possível obter a solução para o contraste de densidade no modelo de fluido único nas escalas em que o comprimento de onda físico é muito maior que o raio de Hubble. Vimos que para esse caso temos uma solução constante e que o potencial gravitacional também se mantém constante fora do raio de Hubble. Posteriormente vimos a solução para as escalas dentro do raio de Hubble, ainda para um fluido de matéria, solução essa familiar e que já tínhamos obtidos no capítulo 3 através da instabilidade gravitacional newtoniana. Depois consideramos um modelo com dois fluidos. Para o caso da matéria e radiação, vimos que a solução nesse caso nos fornece uma correção logarítmica ao resultado que obtivemos com somente um fluido de matéria, e também vimos a solução para o caso em que consideramos matéria sem pressão com uma constante cosmológica Λ .

Por fim, notamos que esse trabalho fornece uma base para que esse estudo possa ser ampliado, de forma que podemos considerar outros conceitos relacionados para um estudo mais profundo sobre a formação das estruturas. Devemos observar que os fenômenos físicos presentes nessa área tão importante para a física atualmente, são grandes, e há inúmeras conexões com outras observações cosmológicas. Assim uma abordagem mais completa sobre o tema seria merecedora de anos de pesquisa.

Apêndices

APÊNDICE A – Ferramentas Estatísticas para Teoria de Perturbação Cosmológica

Para entendermos a natureza e formação das estruturas de larga escala que vemos hoje, as quais foram originadas de flutuações quânticas na era inflacionária do Universo, é de fundamental importância quantificar a distribuição observada de matéria no Universo, e uma ferramenta estatística chamada função de correlação tem sido de grande importância para esse fim.

As ferramentas estatísticas apresentadas nessa seção são de grande relevância no estudo da cosmologia observacional, uma vez que são de grande importância para confrontarmos modelos de energia escura com os dados observacionais.

A.1 A função de Correlação

Em cosmologia, uma função de correlação descreve a distribuição de galáxias no Universo. Para medir o agrupamento de uma distribuição de objetos, uma das medidas quantitativas mais comumente usada é a função de correlação de dois pontos.

A função de correlação de dois pontos é definida pela probabilidade conjunta P de encontrar um objeto em cada elemento de volume dV_1, dV_2 separando por uma distância \vec{r}_{12} , e é dado por [24]

$$\delta P = \rho_0^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(\vec{r}_{12})], \quad (\text{A.1})$$

onde $\rho_0 = N/V$ é a densidade numérica média, e N é um conjunto de pontos em um volume V . O fator ρ_0^2 torna $\xi(\vec{r}_{12})$ sem dimensão. Assumimos implicitamente que $\vec{r}_{12} > 0$, ou seja, os dois volumes não coincidem. Em um processo aleatório uniforme de Poisson (sem qualquer preferência em relação ao local), a probabilidade de encontrar objetos nos elementos de volume dV_1 e dV_{12} é independente, de forma que a probabilidade conjunta será o produto das probabilidades em cada um desses volumes, ou seja

$$\delta P = \rho_0^2 dV_1 dV_2, \quad (\text{A.2})$$

assim, notamos que ξ desaparece. Se ξ é diferente de zero dizemos que as partículas estão correlacionadas. Se houver um agrupamento a uma distância \vec{r} , então $\xi > 0$. Se os pontos são anti-correlacionados, então $\xi < 0$. ξ é uma medida de agrupamento de primeira ordem, que nos fornece uma visão analítica de quanto o nosso conjunto de dados se desvia

de uma distribuição uniforme. No caso de aglomerados de galáxias, ξ é geralmente maior que 0 dentro de um determinado intervalo ($1 - 200h^{-1}Mpc$)[24].

Então a função de correlação pode ser escrita como uma média espacial do produto do contraste de densidade. Para dois pontos teremos

$$\xi(\vec{r}_{12}) = \frac{\delta P}{\rho_0^2 dV_1 dV_2} - 1 = \langle \delta(\vec{r}_1) \rangle \langle \delta(\vec{r}_2) \rangle = 0. \quad (\text{A.3})$$

De forma geral a média de todas as posições possíveis é dada por

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{y}) \delta(\vec{y} + \vec{r}) dV_{\vec{y}}, \quad (\text{A.4})$$

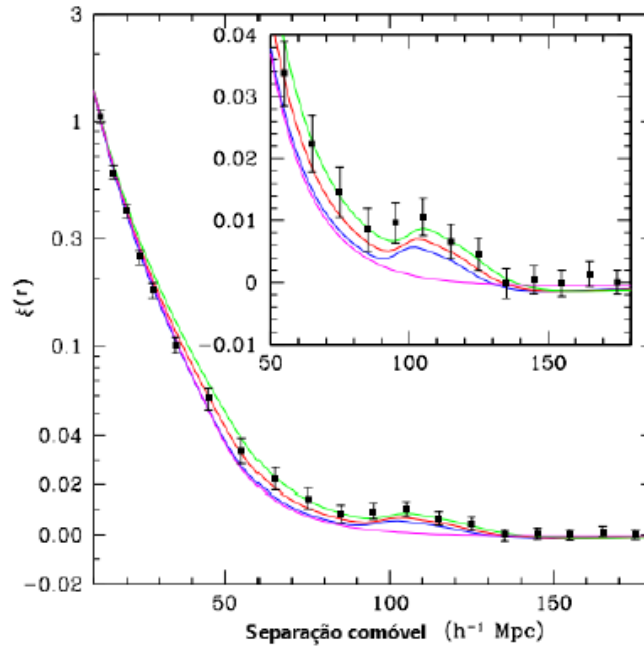


Figura 5 – Função de correlação de larga escala com amostra de 46748 galáxias com redshifts entre $0,72 < z < 0,47$ construída com dados do SDSS. Fonte [4]

O SDSS (Sloan Digital Sky Survey) através de um levantamento que cobriu uma região de $0,72h^{-3}Gpc^3$, com uma amostra contendo 46.748 galáxias cujo redshift se encontram em $0,16 < z < 0,47$, construiu uma função de correlação de larga escala onde vemos um pico bem definido em uma separação comóvel de $100h^{-1}Mpc$ com exceção da linha magenta, como mostrado na figura [25].

Isso nos diz que: dada uma galáxia formada em um pico de densidade, existe uma probabilidade maior de encontrarmos uma outra galáxia a uma distância de $100h^{-1}Mpc$, podemos ver que a função de correlação possui um valor maior em separações comóveis inferiores a $50h^{-1}Mpc$, isso ocorre devido a força gravitacional, que atrai as estruturas

para o pico de densidade, fazendo com que exista um excesso de probabilidade de encontrar uma galáxia mais próxima do pico. [16]

A.1.1 Os n-pontos da função de correlação

Podemos estudar as definições de função de correlação para ordem superiores. Por exemplo a função de correlação de três pontos é

$$\begin{aligned}\zeta_{1,2,3}(r_1, r_2, r_3) &= \left\langle \left(\frac{n_1}{\rho_0 dV_1} - 1 \right) \left(\frac{n_2}{\rho_0 dV_2} - 1 \right) \left(\frac{n_3}{\rho_0 dV_3} - 1 \right) \right\rangle, \\ &= \frac{\langle n_1 n_2 n_3 \rangle}{\rho_0^3 dV_1 dV_2 dV_3} - \xi(r_{12}) - \xi(r_{23}) - \xi(r_{13}) - 1,\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

de forma que podemos obter a seguinte informação útil

$$\langle n_1 n_2 n_3 \rangle = \rho_0^3 dV_1 dV_2 dV_3 (1 + \xi(r_{12}) + \xi(r_{23}) + \xi(r_{13}) + \zeta_{1,2,3}), \quad (\text{A.6})$$

onde $\zeta_{1,2,3}$ é chamada de parte desconectada da função de correlação de terceira ordem. Dizemos que um campo aleatório é gaussiano quando $\zeta_{1,2,3} = 0$ [9].

A.2 O Espectro de potência

No espaço de Fourier, qualquer função quadrática real de uma variável de perturbação é definida como um espectro de potência [9].

$$P(k) \equiv A \langle |\delta_k|^2 \rangle, \quad (\text{A.7})$$

onde δ_k é chamado de coeficiente de Fourier do contraste de densidade e A uma constante qualquer. Aqui $k = \|\vec{k}\|$ é a amplitude do vetor de onda \vec{k} , e $\langle \rangle$ denota a média dos conjuntos. O espectro de potência é de longe o descritor mais comum de agrupamento no regime linear e levemente não linear, e desempenha um papel fundamental na cosmologia.

O espectro de potência é a versão espacial de Fourier da função de correlação. Temos que a convenção de normalização para transformação de Fourier tridimensional para uma função $f(x)$ é

$$f(\vec{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}, \quad (\text{A.8})$$

$$f_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}, \quad (\text{A.9})$$

Essas funções $f(\vec{x})$ e $f_{\vec{k}}$ têm as mesmas dimensões.

A função delta de Dirac pode ser definida como[9]

$$\delta_D(\vec{x}) = (2\pi)^{-3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}, \quad (\text{A.10})$$

de forma que pode ser definida no espaço de fourier como sendo

$$\delta_D(\vec{k}) = (2\pi)^{-3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}, \quad (\text{A.11})$$

assim, para o contraste de densidade $\delta(\vec{x})$, a transformada de fourier será

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dV. \quad (\text{A.12})$$

O espectro de potência é definido como

$$P(\vec{k}) = V |\delta_{\vec{k}}|^2 = V \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^*, \quad (\text{A.13})$$

podemos ver que o espectro de potência tem dimensão de um volume. Usando (A.12) em (A.13), podemos obter a seguinte expressão

$$P(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{x}) \delta(\vec{y}) e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} dV_x dV_y. \quad (\text{A.14})$$

Se definirmos $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$, o espectro de potência se reduz para

$$P(\vec{k}) = \int \xi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} dV, \quad (\text{A.15})$$

onde $\xi(\vec{r})$ é definido como sendo

$$\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{y} + \vec{r}) \delta(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{y} + \vec{r}) \delta(\vec{y}) dV_y, \quad (\text{A.16})$$

portanto, podemos perceber que o espectro de potência é a transformada de Fourier da função de correlação

$$\xi(\vec{r}) = (2\pi)^{-3} \int P(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k}, \quad (\text{A.17})$$

assumindo isotropia espacial, ou seja, que a função de correlação depende apenas do módulo $r = |\vec{r}|$, o espectro de potência só dependerá apenas de $k = |\vec{k}|$. Fazendo uma integração angular, podemos reescrever o espectro de potência como sendo

$$P(k) = 4\pi \int \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr, \quad (\text{A.18})$$

já que o espectro de potência tem dimensão de volume, ele também pode ser dado em termos da função adimensional

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2}, \quad (\text{A.19})$$

a quantidade $\Delta^2(k)$ é chamada espectro adimensional e é uma função importante na teoria da formação de estrutura, $\Delta^2(k)$ mede a contribuição de perturbações por unidade de intervalo logarítmico no número de onda k para a variação de densidade de flutuação de matéria.

Em princípio ξ (função de correlação) e P (espectro de potência), contêm exatamente as mesmas informações. Isso só é verdade, no entanto, para a forma analítica dessas quantidades, e não será necessariamente válida quando forem estimados diretamente a partir de dados. O espectro de potência e a função de correlação são os sinais que tentamos medir através dessas expressões [26].

Referências

- 1 HENRIQUES, A. Teoria da relatividade geral: Uma introdução. *Instituto Superior Técnico*, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 11, 20 e 35.
- 2 LIDDLE, A. *An introduction to modern cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 11, 17, 20, 21, 25, 27 e 28.
- 3 MIRANDA, W. L. de A. *A Radiação Cósmica de Fundo e a Interação entre Energia e Matéria Escuras*. 144 p. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 11, 30, 31 e 37.
- 4 COSTA, F. E. M. Compreendendo o universo numa perspectiva newtoniana. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 11, 29 e 66.
- 5 VILLELA, T.; FERREIRA, I.; WUENSCHÉ, C. A. Cosmologia observacional: a radiação cósmica de fundo em microondas. *Revista USP*, n. 62, p. 104–115, 2004. Citado na página 17.
- 6 TORT, A. Tópicos de física contemporânea o efeito doppler relativístico. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 25.
- 7 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado na página 18.
- 8 MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado 7 vezes nas páginas 18, 38, 39, 42, 45, 46 e 47.
- 9 AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark energy: theory and observations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 11 vezes nas páginas 19, 48, 49, 51, 53, 55, 56, 57, 58, 67 e 68.
- 10 SOUZA, R. E. D. *Introdução à cosmologia*. [S.l.]: Edusp, 2004. Citado na página 20.
- 11 CARROLL, S. M. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997. Citado na página 22.
- 12 RYDEN, B. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado na página 25.
- 13 DODELSON, S. *Modern cosmology*. [S.l.]: Elsevier, 2003. Citado na página 25.
- 14 AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv preprint arXiv:1807.06209*, 2018. Citado na página 26.
- 15 WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. 1972. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 49.
- 16 NETO, S. et al. Estimando parametros cosmologicos a partir de dados observacionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 67.

- 17 SILVA, L. C. da; CALVAO, M. Distâncias em cosmologia. Citado na página 33.
- 18 MORAIS, E. M. de. *Ajustes dos Parâmetros Cosmológicos de um Modelo de Unificação de Matéria Escura e Energia Escura*. 198 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- 19 BAUMANN, D. Cosmology, part iii mathematical tripos. *University lecture notes*, v. 56, 2014. Citado na página 34.
- 20 OLIVEIRA, F. A. *Reduzindo o Setor Escuro do Universo: Uma Nova Cosmologia Acelerada com Criação de Matéria Escura Fria*. 108 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Citado na página 36.
- 21 SANOJA, A. *Evolução Cosmológica de Perturbações de Densidade Inhomogêneas*. 89 p. Tese (Doutorado em Física) — Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista, 2010. Citado na página 44.
- 22 PEEBLES, P. J. E. *The large-scale structure of the universe*. [S.l.]: Princeton university press, 1980. v. 98. Citado na página 58.
- 23 LINDER, E. V. Cosmic growth history and expansion history. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 4, p. 043529, 2005. Citado na página 59.
- 24 SRIDHAR, S. Statistical analysis of the galaxy cluster distribution from next generation cluster surveys. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.
- 25 EISENSTEIN, D. J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 633, n. 2, p. 560, 2005. Citado na página 66.
- 26 SECCO, L. F. *Estimadores do Espectro de Potência em Levantamentos de Galáxias*. 112 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade de São Paulo Instituto de Física, São Paulo, 2015. Citado na página 69.