



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

# **Estudo da Cosmologia Inflacionária em um Cenário Violando a Invariância de Lorentz**

JÚLIO CÉZAR DA SILVA RAMOS FARIAS

Campina Grande, PB

17 de março de 2020

**ESTUDO DA COSMOLOGIA INFLACIONARIA EM UM CENÁRIO VIOLANDO A INVARIÂNCIA  
DE LORENTZ**

JÚLIO CÉZAR DA SILVA RAMOS FARIAS

*Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação  
do Programa de Pós-Graduação em Física da Uni-  
versidade Federal de Campina Grande como parte  
dos requisitos para a obtenção de grau de mestre em  
Física*

Orientador: Prof. Dr. EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS

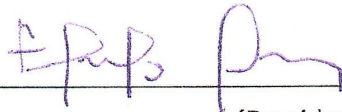
Campina Grande, PB  
17 de março de 2020

**JÚLIO CÉZAR DA SILVA RAMOS FARIAS**

**ESTUDO DA COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA EM UM CENÁRIO  
VIOLANDO A INVARIÂNCIA DE LORENTZ**

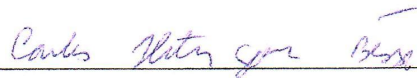
Dissertação aprovada em 31/01/2020

**BANCA EXAMINADORA**



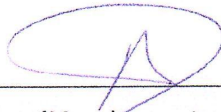
(Presidente)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa  
Programa de Pós-Graduação em Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Alex da Silva  
Departamento de Física - UEPB

F224e Farias, Júlio César da Silva Ramos.  
Estudo da cosmologia inflacionária em um cenário violando a invariância de Lorentz / Júlio César da Silva Ramos Farias. - Campina Grande, 2020.  
26 f.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.  
"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos.  
Referências.

1. Cosmologia Inflacionária. 2. Violação da Invariância de Lorentz.  
3. Limites Fenomenológicos. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos.  
II. Título.

CDU 523043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO GUSTAVO DINIZ DO NASCIMENTO CRB-15.515

---

*Dedico este trabalho a minha família, que muito me apoiou e me incentivou a realizá-lo*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, por está sempre presente em minha vida;

Eu gostaria de começar agradecendo aos meus pais Rita e Josemir, e à minha irmã Alice por sempre estarem presentes ao longo de minha vida e pelo apoio;

Por todo apoio e suporte para ter conseguido trilhar este longo caminho até aqui, e me guiando de forma a nunca desviar de meus objetivos;

Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos pela orientação, pela sugestão do tema, pelas discussões produtivas, pelo apoio e por confiar em mim;

Agradeço também aos Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida pela co-orientação, discussões e apoio;

Agradeço ao Prof. Dr. Eugênio Maciel pela co-orientação, discussões, direcionamentos e sugestões;

Aos professores da banca examinadora: Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa e a Prof. Dr. Alex da Silva, pelo apoio e prontidão;

Meus sinceros agradecimentos à CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou esta etapa da minha vida;

Ao secretário da pós-graduação, Sr. Hélio Pereira, pelo atendimento prestado;

Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física-UAF pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.

# Resumo

Nesta dissertação, consideramos um cenário cosmológico com o campo escalar descrevendo um Inflaton na presença de um redshift dependente de um campo de fundo tipo-tempo que viola a invariância de Lorentz para abordar o regime inflacionário e outras fases do Universo. Também mostramos que o regime de energia escura a grandes distâncias (baixos desvios para o vermelho) é essencialmente dominado pela presença do campo de fundo que controla a Violação da Invariância de Lorentz.

**Palavras-chave:** Cosmologia Inflacionária, Violação da Invariância de Lorentz, Limites Fenomenológicos.

# Abstract

In this dissertation, we consider a cosmological setup with inflaton field in the presence of background field dependent redshift time-like to address the inflationary regime and other phases of the Universe. We also show that the regime of dark energy at large distances (low redshifts) is essentially dominated by the presence of the Lorentz-violating background.

**Keywords:** Inflationary Cosmology, Lorentz Invariance Violation, Phenomenological Limits.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Dinâmica Inflacionária: uma breve revisão</b>	<b>4</b>
1.1 Equação de Movimento: setor do campo de Inflaton . . . . .	5
1.2 Equações de Einstein-Hilbert . . . . .	5
1.3 Equações de Friedmann . . . . .	7
1.4 Aproximação de Rolagem Lenta . . . . .	8
1.4.1 Parâmetro de Rolagem Lenta . . . . .	9
<b>2 Cosmologia Inflacionária Violando a Invariância de Lorentz</b>	<b>11</b>
2.1 A Relação de Dispersão e o Índice de Refração da Luz . . . . .	12
2.2 Impactos sobre o Regime Inflacionário . . . . .	13
2.3 Energia Escura . . . . .	15
2.3.1 Exemplo: Potencial Quadrático; $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ . . . . .	16
2.3.2 Impactos no Regime Inflacionário . . . . .	16
2.3.3 Espectro de Potência . . . . .	18
<b>3 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>21</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>23</b>



# Introdução

Um dos principais feitos na cosmologia inflacionária foi o de explicar o problema do horizonte, planitude e monopólo magnético. Um dos objetivos iniciais da cosmologia foi o de explicar os problemas do horizonte, planitude e monopolos magnéticos, que foi explicado com sucesso com o advento da fase inflacionaria no universo primordial [1, 2, 3]. Esta fase acelerada deve terminar com o reaquecimento do universo coincidindo com o início de uma era dominada pela radiação e então depois uma era denominada pela matéria (escura) para formar as primeiras estruturas, como as galáxias e os aglomerados. Estas são as conhecidas, fases desaceleradas. No entanto, no ano de 1998, Riess et al. [4] e Perlmutter et al. [5] relataram independentemente uma aceleração presente do Universo. E, a fonte dessa aceleração é denominada de energia escura. Desde então, vários modelos foram considerados na literatura para explicar essa nova observação na cosmologia padrão. Embora sua origem ainda não seja conhecida, alguns aspectos são similares à fase inflacionária, como por exemplo, sua pressão deve ser negativa para equilibrar a força gravitacional e, então, proporcionar uma expansão acelerada. O candidato mais simples para a energia escura é a constante cosmológica com a equação de estado:  $\omega = -1$ . Entretanto, é possível que a origem da energia escura não seja devido a uma constante cosmológica. Nesse caso, é necessário explorar modelos alternativos para explicar a atual aceleração da expansão do universo. No entanto, como na fase inflacionária, pode-se modelar a fonte da energia escura através de campos escalares (tipo um inflaton,  $\phi(x, t) \sim \phi(t)$ ).

A principal diferença entre as descrições de constante cosmológica e os modelos de inflaton é a diferença nas escalas. A escala da constante cosmológicas é muito baixa em comparação com a escala que rege o campo de Inflaton e que os potenciais escalares devem ser planos o suficiente para impulsionar a atual expansão acelerada do universo. Os modelos com campos escalares descrevendo a energia escura são basicamente aqueles chamados de quintessência [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] e k-essência [14, 15, 16]. No primeiro caso, foca-se no uso do campo escalar com potenciais que variam bem lentamente, enquanto no último caso é a parte cinética que impulsiona a presente fase de aceleração do universo. Deve-se mencionar também que estes não são os únicos a modelar a energia escura. Para citar as principais alternativas recentes, destacam-se os modelos de gravidade modificada tais como a gravidade  $f(R)$  [17, 18, 19], a gravidade  $f(R, T)$  [20, 21], teorias escalares-tensoriais [22, 23, 25, 26] e modelos de mundos de branas [27, 28].

Pode-se considerar nesta classe de teorias o modelo  $\Lambda$ CDM (uma descrição da radiação cósmica de fundo) que é baseado na gravidade de Einstein ou na própria  $f(R)$  com a inserção da constante cosmológica. Atualmente, todos esses modelos podem ser distinguidos uns dos outros através do uso de dados observacionais, como a análise combinada de SN Ia, CMB e BAO [4, 5, 29, 30]. Essas observações têm impostas certas restrições na equação de estado da energia escura ao limite inferior de  $-1,097 < \omega < -0,858$  com 95% de confiança [29,30]. Isto favorece que a constante cosmológica seja um bom candidato à energia escura, e ao mesmo tempo, desfavorece vários outros tipos de modelos encontrados na literatura. Contudo, futuras observações experimentais devem confirmar o modelo  $\Lambda$ CDM como essencial para lançar uma nova luz na origem da energia escura.

O estudo de vários cenários cosmológicos no contexto da violação da invariância de Lorentz (LIV) na fase inflacionária também têm sido abordados na literatura [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38]. Entre tais trabalhos podemos destacar, por exemplo, as motivações principais para o desenvolvimento de linha de pesquisa: as abordagens de Gasperini [31] e de Donnelly e Jacobson [38]. Em seu trabalho, Gasperini propõe que a fase primordial da expansão acelerada do Universo poderia ser alcançada se, em alguma época muito nova, as interações gravitacionais sejam descritas por uma teoria invariante de Lorentz não-local. Também é sugerido que esse mecanismo adicional de produção de inflação poderia ser usado para resolver alguns problemas do cenário inflacionário padrão. Além disso, no trabalho de Jacobson, considera-se uma teoria de LIV, formada por uma teoria de Einstein-éter acoplada a uma Lagrangeana de campos escalares. Neste caso, o autor determina parâmetros cosmológicos que são afetados pela LIV, mas ainda permitem um fim natural para inflação. Por outro lado, a aplicação de tal cenário também pode ser encontrada em energia escura, onde é mostrado que os efeitos da LIV induz termos que são capazes de conduzir a aceleração atual do universo [39, 40]. A primeira e a última abordagem, tratam da LIV em pequenas e grandes distâncias [41].

O objetivo geral desse trabalho de dissertação é o de compreender como um exemplar mais simples dessas teorias LIV-cosmologia funciona, e usa-la como um guia no estudo de um cenário cosmológico em que se pode examinar o fluxo inflacionário de pequenas a grandes distâncias (baixos e pequenos redshifts) na presença dos efeitos da LIV (a referência principal é de Almeida, et. al.[42]. Como discutiremos a seguir, este cenário apresenta como fundamental, as equações de estado do regime inflacionário e da energia escura em limites assintóticos, o que confirma os esforços acima mencionados de produzir Universo acelerado devido aos efeitos da LIV. Especificamente, nosso foco será direcionado à abordagem teórica que lida com o campo escalar dependente do tempo, campo de inflaton, capaz de descrever um universo inicial inflacionário e depois acelerado. A motivação associada a este estudo, tem a ver com a idealização de campo de fundo efetivo que caracteriza a LIV permeando todo espaço-tempo, e que é responsável pela dinâmica da energia escura a grandes distâncias ou baixos redshifts (desvio da luz para o vermelho).

A estrutura desta dissertação está descrita a seguir: no Cap.1, apresentamos uma breve revisão da dinâmica inflacionária no universo da métrica de FRW. Apresentamos o modelo e através do qual estudamos o método de obtenção das equações de movimento relacionadas: setor do campo escalar, setor do campo gravitacional (equação de Einstein- Hilbert) e as equações de Friedmann. Aproveitamos o momento para abordar a ideia do regime de rolagem lenta para dinâmica do campo de inflaton. No Cap.2, consideramos o modelo cosmológico estendido por um simples campo de fundo que controla a LIV na parte cinética do campo escalar. Inicialmente, estudamos quais os impactos da LIV sobre o índice de refração. Analisamos também, os impactos da LIV no regime inflacionário até o regime da energia escura. Aproveitamos este estudo, para impor limites para ocorrência dos efeitos da LIV através de recentes medidas da CMB. No Cap.3, apresentamos nossos comentários e conclusões.

# Capítulo 1

## Dinâmica Inflacionária: uma breve revisão

Utilizaremos este capítulo para fazer uma breve revisão do ferramental envolvendo uma teoria de campo escalar que descreve a dinâmica de um campo de Ínflaton homogêneo (isto equivale a afirmar que o campo escalar tenha apenas dependência temporal, ou seja,  $\phi = \phi(t)$ ) no espaço-tempo curvo em  $(3 + 1)$  dimensões, descrito pelo universo de FRW o qual o elemento de área, numa descrição de espaço plano, é dada por :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.1)$$

Onde  $a(t)$  é o fator (ou parâmetro) de escala, ela é uma função cósmica no tempo  $t$  relacionada com a distância no cosmos. Considerando um campo escalar  $\phi$ , minimamente acoplado a gravidade, o que pode ser representado pela ação [43]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \kappa R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (1.2)$$

Onde  $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  (com  $R_{\mu\nu}$ , sendo o tensor de Riemann),  $\kappa = 1/16\pi G$  e  $g = -a^6(t)$ , é determinante da métrica:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

Associado a Eq.(1.1) e  $V(\phi)$  é o potencial do campo de ínflaton. Neste sentido, estudamos as equações de movimento para cada setor da Eq.(1.2) e conseqüentemente as equações de Friedmann usando os seguintes ingredientes: *i*) considerar o setor do campo gravitacional da Eq.(1.2) e associar ao princípio variacional; *ii*) usar o elemento de linha de FRW dado pela Eq.(1.1); *iii*) usar a definição do tensor energia-momento.

## 1.1 Equação de Movimento: setor do campo de Ínflaton

O campo escalar que estamos considerando admite uma dinâmica que é descrita pela equação de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.4)$$

Desta forma, combinando Eq.(1.2) e Eq.(1.4) determinamos:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V_\phi = 0. \quad (1.5)$$

Onde  $V_\phi = \frac{dV}{d\phi}$ . Entretanto, as derivadas aqui utilizadas não são derivadas comuns, mas sim derivadas covariantes. Então:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi), \quad (1.6)$$

e a equação de movimento Eq.(1.5) é reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + V_\phi = 0. \quad (1.7)$$

Sendo assim, vamos reescrever Eq.(1.7) como:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) \partial^\mu \phi + V_\phi = 0 \quad (1.8)$$

Como  $\phi = \phi(t)$ , temos:

$$\partial_0 \partial^0 \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 (\sqrt{-g}) \partial^0 \phi + V_\phi = 0 \quad (1.9)$$

Lembrando ainda que  $g = -a^6 \iff -g = a^6 \iff \sqrt{-g} = a^3$  e que  $\partial_0$  é a derivada temporal, temos que:

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{a^3} 3a^2 \dot{a} \dot{\phi} + V_\phi = 0 \iff \ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + V_\phi = 0 \quad (1.10)$$

E podemos fazer a identificação  $H \equiv \dot{a}/a$  como o parâmetro de Hubble. A descoberta de Hubble teve um profundo impacto na Cosmologia da época, principalmente por sua análise sobre a origem do Universo. Desta forma, ao considerarmos a métrica FRW, chegamos à equação de movimento do campo escalar, na forma:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0 \quad (1.11)$$

de segunda ordem na derivada temporal.

## 1.2 Equações de Einstein-Hilbert

Nesta seção, pretendemos obter as equações de Friedmann da Cosmologia. Para esta finalidade, devemos inicialmente considerar o setor gravitacional da ação, Eq. (1.2), conhecida como ação de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Como conhecido, o princípio da mínima ação, requer que a variação da ação seja nula ( $\delta S = 0$ ). Assim:

$$\int [\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + (\delta R_{\mu\nu})g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + \delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}]d^4x = 0. \quad (1.13)$$

Por outro lado, a variação do determinante da métrica pode ser dado pela identidade:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

Logo a Eq.(1.13) pode ser reescrita na forma:

$$\int [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int [(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}\sqrt{-g}]d^4x = 0. \quad (1.15)$$

Como  $g^{\mu\nu}$  e seu determinante são quantidades arbitrárias, obtemos a equação de Einstein-Hilbert no vácuo (na ausência de fontes externas), escrita na forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (1.16)$$

E, o segundo termo da Eq.(1.15) é identicamente nulo pelo teorema da divergência ( $\int_V \nabla_\alpha A^\alpha d^4x = 0$ ).

Neste ponto, obtemos a equação de Einstein na sua forma completa. Consideramos a variação da ação, Eq.(1.2) como,

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_\phi \quad (1.17)$$

Onde  $S_\phi$  é a ação correspondente ao setor da matéria. A parte de Einstein-Hilbert pode ser reescrita como

$$\int \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^4x = \int [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (1.18)$$

tal que obtemos a identidade.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.19)$$

Então, a variação da ação total é da forma:

$$\frac{\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (1.20)$$

Pela definição do tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.21)$$

E, a relação dada pela Eq.(1.22), a familiar equação de Einstein que relaciona a curvatura do espaço-tempo e o termo de matéria é dada finalmente como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Note que pela métrica adotada,  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho_\phi, p_\phi, p_\phi, p_\phi)$ , com  $\rho_\phi$  e  $p_\phi$  sendo a densidade de energia e momento respectivamente.

### 1.3 Equações de Friedmann

Para obtermos as equações de Friedmann através da Eq.(1.22), primeiramente usamos a definição do tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} \quad (1.23)$$

Onde  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$  é o símbolo de Christoffel que representa uma conexão sem torção e compatível com a métrica.

Segue a sua definição:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}). \quad (1.24)$$

Aqui,  $g_{\mu\nu} = (g_{00} = -1, g_{ii} = a^2)$  é o tensor métrico definido na Eq.(1.3), e seu inverso,  $g^{\mu\nu} = (g^{00} = -1, g^{ii} = a^{-2})$ , para o universo de FRW.

Então, temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= g^{00}(-\partial_0 g_{11}) = \frac{\partial_0(a^2)}{2} = a\dot{a}; \\ \Gamma^1_{01} &= g^{11}(\partial_0 g_{11}) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial_0(a^2)}{2} = \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

De forma similar, devemos obter:  $\Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = a\dot{a}$ ;  $\Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \dot{a}/a$ . Note também que o ponto em  $\dot{a}$ , significa a derivada da função em relação ao tempo. Portanto, o tensor de curvatura dado pela Eq.(1.23) deve oferecer o resultado para as suas componentes na forma:

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3R^1_{010} \\ &= -\partial_0\Gamma^1_{10} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \end{aligned} \quad (1.26)$$

e

$$\begin{aligned} R_{11} &= R^1_{101} + R^2_{121} + R^3_{131} \\ &= -\partial_0\Gamma^0_{11} - \Gamma^0_{\lambda 1}\Gamma^{\lambda}_{01} + \Gamma^2_{2\lambda}\Gamma^{\lambda}_{11} + \Gamma^3_{3\lambda}\Gamma^{\lambda}_{11} \\ &= a\ddot{a} + 2\dot{a}^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Com os resultados obtidos acima, podemos resolver a equação de Einstein-Hilbert, Eq.(1.22). A princípio obteríamos dez equações diferenciais acopladas devido aos dez termos independentes do tensor simétrico energia-momento, porém devido as simetrias já mencionadas, obteremos apenas duas equações linearmente independentes. A primeira delas é a componente:  $\mu = \nu = 0$  tal que  $R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R_{00} = -8\pi GT_{00}$ , que deve nos oferecer:

$$3\frac{\ddot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho_{\phi}, \quad (1.28)$$

A componente  $\mu = \nu = 1$  da equação,  $R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R^{11} = -8\pi GT_{11}$ , tal que:

$$-2\frac{\ddot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G p_\phi. \quad (1.29)$$

Note que podemos utilizar a primeira das equações para reescrever a segunda como:

$$\frac{\ddot{a}^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{3}(p_\phi + 3p_\phi). \quad (1.30)$$

Assim, obtemos as equações de Friedmann para um universo plano. Por outro lado, o parâmetro que caracteriza a taxa de expansão do universo é o parâmetro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.31)$$

Manipulando as duas equações de Friedmann, Eqs. (1.28) - (1.30) e usando a Eq.(1.31) devemos obter a equação da continuidade:

$$\dot{\rho}_\phi = -3H(p_\phi + p_\phi). \quad (1.32)$$

Notando ainda que ao combinar a equação Friedmann, Eq.(1.28) com o parâmetro de Hubble, obtemos a expressão para a densidade crítica do universo plano:

$$\rho_c = -\frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.33)$$

Essa equação é importante para analisar o problema do caráter planar (ou planitude) do universo.

## 1.4 Aproximação de Rolagem Lenta

O regime de Rolagem Lenta trata apenas dos efeitos da velocidade e, assim, desconsiderando todos os efeitos de aceleração. Essa ideia diz que durante o regime inflacionário podemos assumir que o Ínflaton varia lentamente em um potencial  $V(\phi)$ , tal que:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (1.34)$$

Sendo assim, a densidade de energia  $\rho$  seria diretamente proporcional ao potencial, ou seja,  $\rho \approx V$ , o que nos leva a relação  $\rho \approx p$ , implicando em  $\omega \approx -1$ . Nesse caso, o Ínflaton passa a desempenhar o papel de uma constante cosmológica, gerando uma rápida expansão do Universo primitivo, o que permite resolver o problema das condições iniciais do Universo, que passam agora a ser determinadas pelo ínflaton. Esta hipótese permite escrever a equação de Friedmann Eq.(1.24), com a ajuda da equação Eq.(1.21), como:

$$H^2 \simeq \frac{2}{3}V \quad (1.35)$$



Por outro lado, o requisito de rolagem lenta sobre a equação de movimento do Ínflaton nos leva a descartar o termo de aceleração  $\ddot{\phi}$  frente a derivada do potencial  $V_\phi$ , sendo o termo de resistência  $3H\dot{\phi}$ , que lentifica a rolagem do campo em direção ao mínimo do potencial, dado por:

$$3H\dot{\phi} \simeq -V_\phi \quad (1.36)$$

Em um regime inflacionário, a rápida expansão do Universo primordial nos leva a uma condição de superresfriamento e, portanto, a inflação deve incluir um processo de reaquecimento que precede a nucleossíntese e a formação de estruturas. Diferentes formas de gerar um processo de reaquecimento foram apresentadas na literatura. No modelo original de [1], conhecido como velha inflação, esse processo é decorrente de uma transição de fase em Teorias de Grande Unificação, em que atingida a temperatura crítica  $T_{TGU}$ , uma quebra espontânea de simetria geraria bolhas inflacionárias que eventualmente colidem e reaquecem o Universo a partir da conversão da energia cinética das paredes das bolhas em energia térmica. Guth não leva em consideração que a região entre as bolhas também inflacionárias e impede a percolação. O modelo de nova inflação, preconizado por [2], propõe que a inflação apenas ocorre após a transição de fase e, portanto, temos um única bolha em que o processo de reaquecimento é agora associado a criação de pares de partículas, a partir da oscilação do Ínflaton em torno do mínimo de potencial. No entanto, a condição da transição de fase inicial do Universo primitivo pode ser relaxada e abre espaço para a elaboração do modelo de inflação caótica, onde o Ínflaton é escolhido para assumir qualquer condição inicial, em especial o modelo de inflação caótica para potencial quadrático é compatível com os dados observacionais [52]. Outros modelos inflacionários de interesse como a inflação eterna, a inflação natural, a inflação hilltop são bastante exploradas na literatura e apresentam diferentes alternativas no estudo da inflação cósmica [52].

### 1.4.1 Parâmetro de Rolagem Lenta

As condições de rolagem lenta são convencionalmente expressadas em termos dos parâmetros de rolagem, definidos por:

$$\varepsilon_\phi \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 \quad (1.37)$$

e

$$\eta_\phi \equiv M_{pl}^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} \quad (1.38)$$

Onde  $V_\phi$  e  $V_{\phi\phi}$  representam a primeira e a segunda derivada do potencial em relação a  $\phi$ . Embora as condições  $\varepsilon_\phi \ll 1$  e  $\eta_\phi \ll 1$  sejam necessárias, elas não são suficientes para a validade do procedimento, sendo também exigido que  $\phi$  se aproxime de uma solução atrator, descrita por Eq.(1.36). A inflação termina

quando as condições de rolagem lenta são violadas:

$$\varepsilon(\phi_{end}) \equiv 1, \quad (1.39)$$

O número de "dobras" antes do final da inflação é definida por:

$$N(\phi) \equiv \ln \frac{a_{end}}{a} = \int_t^{t_{end}} H dt = \int_{\phi}^{\phi_{end}} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{V}{V_{\phi}} d\phi \quad (1.40)$$

Usando as Eqs. (1.37)–(1.40), obtemos o seguinte resultado:

$$N(\phi) = \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\varepsilon}} \quad (1.41)$$

Para resolver o problema de horizonte e de planicidade, é necessário que o número total de "dobras" exceda 60.

$$N_{tot} \equiv \ln \frac{a_{final}}{a_{inicial}} \quad (1.42)$$

O valor preciso depende da escala energética da inflação e dos detalhes do reaquecimento pós inflação. As flutuações observadas no CMB variam com  $N_{CMB} \approx 40 - 60$  dobras antes e no final da inflação. A seguinte restrição integral fornece o valor do campo correspondente  $\phi_{cmb}$ .

$$\int_{\phi_{end}}^{\phi_{cmb}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\varepsilon}} = N_{cmb} \approx 40 - 60. \quad (1.43)$$

## Capítulo 2

# Cosmologia Inflacionária Violando a Invariância de Lorentz

Neste capítulo, estudamos os efeitos causados por um único campo de fundo tipo-tempo Violando a Invariância de Lorentz na dinâmica inflacionária. O principal ponto levantado é o de que um campo de fundo tipo-tempo Violando a Invariância de Lorentz possa permear o espaço-tempo responsável pela energia escura em grandes distâncias (baixo redshifts).

Nosso ponto de partida, considera uma teoria de campos no espaço-tempo de (3+1)-dimensões, a qual um campo de Ínflaton têm sua dinâmica modificada por um campo de fundo que desempenha um papel de controlar a simetria de Lorentz. A Lagrangeana mais simples para descrever esse cenário é descrita pela expressão:

$$e^{-1}\mathcal{L} = \frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + \xi_i k_{\mu\nu}^i)\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

Onde  $e = \sqrt{-g}$ ,  $\xi_1$  sendo um acoplamento,  $V(\phi)$  é o potencial do Ínflaton e o tensor tipo-tempo  $k_{\mu\nu}^i$   $i = 1, 2, 3 \dots$ , a princípio, seria acoplado a outros campos em uma Lagrangeana mais geral de modo que  $k_{00}^i \neq 0$ , isto é,

$$k_{\mu\nu}^i = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Vamos convencionar que o tensor  $k_{\mu\nu}^i$  esteja relacionado com o campo de ínflaton. Observamos também, através de Eq. (2.1), que o Campo de ínflaton está acoplado como o parâmetro de violação de Lorentz  $\xi_i > 0$ . É esperado que para pequenas distâncias  $\beta_1 \rightarrow 0$  a dinâmica inflacionária se mantenha, dependendo apenas do campo de ínflaton, por outro lado para  $\beta_1 \rightarrow -1$  a Violação de Lorentz torna-se mais efetiva à grandes distâncias desenvolvendo energia escura, como veremos brevemente. As questões cosmológicas deste modelo serão estudadas considerando a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), dada em um Universo plano (ver a Eq.(1.3)). Note que o elemento de linha efetivo, resultante da presença

do acoplamento  $\xi_1 k_{\mu\nu}$  é dada por:

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (g_{\mu\nu} + \xi_1 k_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \\ &= -(1 + \xi_1 \beta_1) C^2 dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Onde  $C$  é a velocidade da luz (diferentemente do capítulo anterior que adotamos o  $C = 1$  no sistema de unidades naturais).

## 2.1 A Relação de Dispersão e o Índice de Refração da Luz

A relação de dispersão (ou equação de onda) Co-variante relacionada ao setor do campo de Ínflaton modificado dado pela Eq.(2.1), pode ser obtida como resultado da seguinte expressão no espaço dos momentos e na ausência de potencial:

$$k_\mu k_\nu \bar{g}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.4)$$

Onde  $k_\mu = (E, \vec{k})$  é o quadri-momento e  $\bar{g}^{\mu\nu}$  é a inversa da métrica de FRW efetiva, com  $\bar{g}^{00} = -1/(1 + \xi_1 \beta_1) c^2$  e  $\bar{g}^{ii} = 1$  na ausência do parâmetro de aceleração. Assim, a eq.(2.4) se reduz à:

$$E = |\vec{k}| \sqrt{1 + \xi_1 \beta_1} C. \quad (2.5)$$

A velocidade de grupo:  $v_1 = v_g = \partial E / \partial |\vec{k}|$  e a velocidade de fase:  $v_f = E / |\vec{k}|$  efetivas para o Ínflaton na presença do acoplamento  $\xi_1 \beta_1$  são equivalentes e dadas por:

$$\nu_1 = \sqrt{1 + \xi_1 \beta_1} C. \quad (2.6)$$

A escolha do parâmetro de violação de Lorentz  $\xi_1$  muda o boost de Lorentz porque afeta a velocidade. Desta forma, neste sentido podemos definir um índice de refração análogo sentido pelo Ínflaton como:

$$n \equiv \frac{C}{\nu_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1 \beta_1}}. \quad (2.7)$$

Isso ocorre porque o índice de refração é em geral um comprimento de onda dependente dado quantitativamente por:

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \sum_{i=1}^N B_i \frac{\lambda_{0i}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0i}^2} \\ &= 1 + N B_0 \frac{\lambda_0^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Onde assumimos na última igualdade que todas as "moléculas" ressoam com a mesma frequência, o que significa a igualdade  $B_i = B_0$ . Isto é um análogo a equação de dispersão de Sellmeier [44] bem definida em

ótica [46]. Na fórmula original,  $B_i$  são os coeficientes de Sellmeier, os quais são determinados experimentalmente. Por uma perspectiva cosmológica podemos fazer a identificação  $\lambda_0/\lambda \equiv a_0/a(t)$ , para variações temporais pequenas, onde  $\lambda_0$  e  $\lambda$  são comprimentos de onda observados no agora e depois, respetivamente. Lembrando que a definição de redshift é:  $z + 1 = \lambda_0/\lambda$ , com  $\lambda \leq \lambda_0$ , encontramos:

$$n^2 = 1 - \frac{C_1}{1 - (z + 1)^2} \quad (2.9)$$

Onde  $C_1 = NB_0\lambda_0^2$ . O sinal de menos antes de  $C_1$  que apenas para manter a analogia com a equação de Sellmeier normalmente aplicada, por exemplo, considere  $\lambda \geq \lambda_0$ . Agora comparando Eq.(2.9) com a Eq.(2.7) estabelecemos uma relação entre o parâmetro de violação de Lorentz e o redshift cosmológico, a saber:

$$\xi_1\beta_1(z) = -\frac{C_1}{z(z + 2) + C_1}. \quad (2.10)$$

Observe que combinado Eq.(2.10) com a Eq.(2.6) o campo de Ínflaton possui velocidade  $v(z) \approx 0$  para  $z \rightarrow 0$  (para redshift pequeno) e por outro lado,  $v(z) \approx c$  para  $z \rightarrow \infty$  (para redshift grande). Portanto, é esperado que na fase de reaquecimento (em UV) o ínflaton desenvolve uma fase dominada pela radiação, entretanto no regime atual (em IR) espera-se que Ínflaton seja responsável pela energia escura.

## 2.2 Impactos sobre o Regime Inflacionário

Analisemos agora o regime onde o Ínflaton é uma espécie dominante. As equações de campo de Einstein leva-nos a equação de Friedmann  $H^2 = (8\pi G/3)\rho_\phi$ , cuja densidade do Ínflaton  $\rho_\phi$  é governada pelo campo de Ínflaton com tensor energia-momento modificado dado pela combinação da seguinte expressão:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi \quad (2.11)$$

e o setor do campo de Ínflaton da Eq.(2.1) com  $\mathcal{L}_\phi$  sendo escrito como

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + \xi_1\kappa_{\mu\nu}^1)\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - V(\phi), \quad (2.12)$$

Além disso, assinatura da métrica implica que  $T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho_\phi, p_\phi, p_\phi, p_\phi)$  e  $p_\phi$  é a componente pressão do tensor Energia-Momento relativo ao campo escalar  $\phi$ . A partir de agora, neste capítulo, vamos considerar que  $c = 1$  e uma vez que o objetivo é trabalhar com o campo de Ínflaton homogêneo temos que  $\phi \equiv \phi(t)$ , assim podemos escrever a densidade de energia  $\rho_\phi$  e a pressão  $p_\phi$  ( $i = 1, 2, 3$ ) como segue:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}(1 - \xi_1\beta_1)\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.13)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}(1 + \xi_1\beta_1)\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.14)$$

Onde o ponto representa o derivada com respeito a derivada temporal. A equação de estado para o campo de Ínflaton pode ser facilmente encontrado e é dado por:

$$\omega \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{(1/2)(1 + \xi_1\beta_1)\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{(1/2)(1 - \xi_1\beta_1)\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (2.15)$$

Observamos que quando a parte potencial é dominante na expressão acima encontramos  $\omega \simeq -1$  e um regime inflacionário toma seu lugar, e isto também ocorre no limite  $\xi_1\beta_1 \rightarrow 0$ . Por outro lado, quando a energia cinética é dominante nas expressões acima, encontramos a seguinte equação de estado:

$$\omega \simeq \frac{1 + \xi_1\beta_1}{1 - \xi_1\beta_1} \quad (2.16)$$

Ao tomarmos o limite  $\xi_1\beta_1 \rightarrow -1/2$  temos que  $\omega \rightarrow 1/3$ , o qual representa o regime inflacionário dominado pela radiação, já o regime dominado pela matéria,  $\omega \rightarrow 0$ , se dá quando tomamos na Eq.(2.15) o limite  $\xi_1\beta_1 \rightarrow -1$ . Estes valores obtidos concordam com a equação Eq.(2.10) uma vez que  $\xi_1\beta_1 \in (-1, 0)$ . Além disso, outra análise interessante a ser considerada na equação de estado, Eq.(2.15), é observar o comportamento, via expansão de Taylor, em torno de  $z = 0$  (IR) e  $z = \infty$  (UV). Das equações (2.10) e (2.15) segue que:

$$\omega(z) = \frac{\frac{1}{2} \frac{z(z+2)}{z(z+2)+C_1} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \frac{z(z+2)+2C_1}{z(z+2)+C_1} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (2.17)$$

Em torno de  $z = 0$ , a expansão em Taylor é dada por:  $\omega_0(z) = \omega(0) + (z - 0)\omega'(z) + \frac{1}{2}(z - 0)^2\omega''(z) + \dots$ , como  $\omega(0) = -\frac{V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + V(\phi)}$ , teremos que:

$$\omega_0(z) = -\frac{V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + V(\phi)} + \mathcal{O}(z) \quad (2.18)$$

Observe que quando  $z \rightarrow \infty$  temos que  $\frac{1}{z} \rightarrow 0$ . Daí, vamos expandir em Taylor a função  $\omega(1/z)$  nas vizinhanças de  $\bar{z} = 0$ , onde  $\bar{z} = 1/z$ . Portanto:

$$\omega(\bar{z}) = \frac{\frac{1}{2} \frac{1+2\bar{z}}{(1+2\bar{z})+C_1\bar{z}^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \frac{(1+2\bar{z})+2C_1\bar{z}}{(1+2\bar{z})+C_1\bar{z}} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (2.19)$$

Daí,

$$\omega_0(\bar{z}) = \omega(0) + (\bar{z} - 0)\omega'(\bar{z}) + \frac{1}{2}(\bar{z} - 0)^2\omega''(\bar{z}) + \dots, \quad (2.20)$$

Como, neste caso,  $\omega(0) = -\frac{(1/2)\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{(1/2)\dot{\phi}^2 + V(\phi)}$ , temos que:

$$\omega_0(\bar{z}) = \frac{(1/2)\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{(1/2)\dot{\phi}^2 + V(\phi)} + \mathcal{O}(\bar{z}). \quad (2.21)$$

Entretanto,  $\omega_0(\bar{z}) \equiv \omega_\infty(z)$ . Logo,

$$\omega_\infty(z) = \frac{(1/2)\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{(1/2)\dot{\phi}^2 + V(\phi)} + \mathcal{O}(1/z). \quad (2.22)$$

Note que das Eqs. (2.18)–(2.22), observamos que  $\omega_0(z) \in (-1, 0)$  e  $\omega_\infty(z) \in (-1, 1)$ , o que significa que no regime de rolagem lenta, onde  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ , a equação de estado está em um regime inflacionário  $\omega_\infty(z) \simeq -1$ , e de alguma forma é conduzido ao regime de *energia escura*  $\omega_0(z) \simeq -1$ .

## 2.3 Energia Escura

Vamos calcular a equação de movimento para o Ínflaton considerando a Lagrangeana, Eq.(2.12), submetida à métrica FRW modificada definida pela Eq.(2.3). Ao considerarmos a equação Eüler-Lagrange para a teoria em questão, obtém a seguinte expressão:

$$(g_{\mu\nu} + \xi_1 \kappa_{\mu\nu}^1) \partial^\mu \partial^\nu \phi - V_\phi = 0 \quad (2.23)$$

Entretanto, podemos encontrar uma melhor expressão para a equação acima:

$$\begin{aligned} (g_{\mu\nu} + \xi_1 \kappa_{\mu\nu}^1) \partial^\mu \partial^\nu \phi - V_\phi = 0 &\iff \\ (g_{\mu\nu} + \xi_1 \kappa_{\mu\nu}^1) \left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g} \partial^\nu \phi) \right] - V_\phi = 0 &\iff \\ (g_{\mu\nu} + \xi_1 \kappa_{\mu\nu}^1) \left[ \partial^\mu \partial^\nu \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu (\sqrt{-g}) \partial^\nu \phi \right] - V_\phi = 0 \end{aligned}$$

Como estamos considerando que o Ínflaton é homogêneo,  $\phi = \phi(t)$ , além disso, notemos que  $g^{00} = -1$  e que  $g \equiv \det g_{\mu\nu} = -a^6$ . Logo:

$$\begin{aligned} (g_{00} + \xi_1 \kappa_{00}^1) \left[ \partial^0 \partial^0 \phi + \frac{1}{a^3} \partial^0 (a^3) \partial^0 \phi \right] - V_\phi = 0 &\iff \\ -(1 + \xi_1 \beta_1) \left[ \ddot{\phi} + \frac{1}{a^3} 3(a^2) \dot{a} \dot{\phi} \right] - V_\phi = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, a equação de movimento é dada por:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \left( \frac{1}{1 + \xi_1 \beta_1} \right) V_\phi = 0 \quad (2.24)$$

A equação de Friedmann é dada por:  $H^2 = (2/3)\rho$  é modificada para o nosso modelo para:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2} (1 - \xi_1 \beta_1) \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (2.25)$$

Portanto, a presença do parâmetro de invariância de Lorentz nas Eqs. (2.23)–(2.24) indicará novos efeitos. Na equação de movimento, Eq.(2.24), o regime de rolagem lenta acontece quando o termo  $3H\dot{\phi}$  domina o termo de aceleração, isto é,

$$3H\dot{\phi} + \left( \frac{1}{1 + \xi_1 \beta_1} \right) V_\phi \simeq 0. \quad (2.26)$$

Para a equação de Friedmann modificada, a condição de rolagem lenta, resulta em

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \iff H \equiv \frac{d \ln a}{dt} \simeq \sqrt{\frac{8\pi G}{3} V(\phi)} \quad (2.27)$$

tal que

$$H \equiv \frac{d \ln a}{dt} \simeq \sqrt{\frac{8\pi G}{3} V(\phi)} \quad (2.28)$$

### 2.3.1 Exemplo: Potencial Quadrático; $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$

Vamos agora considerar um exemplo simples de um potencial de ínflaton. Seja o potencial quadrático nosso objeto de estudo:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.29)$$

Para o regime de rolagem lenta,  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ , a equação de Friedmann, é dada por:

$$H = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}m\phi \quad (2.30)$$

e as Eqs.(2.26)–(2.27) conduzem a:

$$\dot{\phi} = -\frac{m}{\sqrt{12\pi G}(1 + \xi_1\beta_1)} \quad (2.31)$$

Integrando a equação acima em relação ao tempo, obtemos que:

$$\int_0^t \frac{d\phi}{dt} ds = - \int_0^t \frac{m}{\sqrt{12\pi G}(1 + \xi_1\beta_1)} ds$$

O que é equivalente a:

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{m}{\sqrt{12\pi G}(1 + \xi_1\beta_1)}t \quad (2.32)$$

O fator de escala  $a(t)$  é obtido a partir da equação:

$$\int H ds = \int_0^t \frac{d}{dt} \ln a(s) ds = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}m\phi_0 \int_0^t ds - \frac{m^2}{3(1 + \xi_1\beta_1)} \int_0^t s ds \iff$$

$$\ln a(t) - \ln a_0 = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}m\phi_0 t - \frac{m^2}{3(1 + \xi_1\beta_1)} \frac{t^2}{2} \iff$$

$$\ln \frac{a(t)}{a_0} = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}m\phi_0 t - \frac{m^2}{6(1 + \xi_1\beta_1)}t^2$$

Portanto, a expressão para o fator de escala segue:

$$a(t) = a_0 \exp \left[ \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}m\phi_0 t - \frac{m^2}{6(1 + \xi_1\beta_1)}t^2 \right] \quad (2.33)$$

### 2.3.2 Impactos no Regime Inflacionário

Para entendermos o efeito da Violação de Lorentz sob um regime inflacionário de um universo, precisamos usar o número de e-dobras definido por:

$$N_e \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \quad (2.34)$$

Assim, como:

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{3H} \left( \frac{1}{1 + \xi_1\beta_1} \right) V_\phi \iff \frac{1}{\dot{\phi}} = -\frac{3H(1 + \xi_1\beta_1)}{V_\phi}$$



Desta forma:

$$N_e = -3(1 + \xi_1\beta_1) \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \frac{H^2}{V_\phi} d\phi = -8\pi G(1 + \xi_1\beta_1) \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \frac{V}{V_\phi} d\phi$$

Para o potencial quadrático, temos que:

$$N_e - 4\pi G(1 + \xi_1\beta_1) \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \phi d\phi = 2\pi G(1 + \xi_1\beta_1)[\phi(t_i)^2 - \phi(t_f)^2] \quad (2.35)$$

Agora, assumindo que  $\phi(t_f) \cong 0$ , obtemos que:

$$N_e = 2\pi G(1 + \xi_1\beta_1)\phi(t_i)^2 \quad (2.36)$$

Implicando que  $N_e = 2\pi G\xi_1\beta_1\phi(t_i)^2 + 2\pi G\phi(t_i)^2$ , sendo assim:

$$\xi_1\beta_1 = \frac{N_e - 2\pi G\phi(t_i)^2}{2\pi G\phi(t_i)^2} = \frac{N_e}{2\pi G\phi(t_i)^2} - 1 \quad (2.37)$$

Para  $N_e \cong 60$ ,  $\phi(t_i)^2 \approx 20M_{Pl}^2$  e  $G \simeq 1/M_{Pl}^2$ . Portanto:

$$\beta_1 \approx \left( \frac{60}{2\pi \frac{1}{M_{Pl}^2} 20M_{Pl}^2} - 1 \right) \xi_1^{-1} = \left( \frac{60}{40\pi} \right) \xi_1^{-1} \approx -0,5225\xi_1^{-1} \quad (2.38)$$

Note que este resultado concorda com o final do regime Inflacionário (Início da fase cosmológica de radiação), onde o campo de fundo na Invariância de Lorentz assume o valor  $\xi_1\beta_1 \approx -1/2$ . Além da abordagem acima, existem várias outras propriedades cosmológicas que podem ser obtidas a partir dos parâmetros de rolagem lenta, bem como da potência do espectro de perturbação. Inicialmente, vamos observar as consequências deste modelo Inflacionário para os dois primeiros parâmetros de rolagem lenta são dados nessa condição por:

$$\varepsilon = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 \quad (2.39)$$

e

$$\eta = \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{\phi\phi}}{V}. \quad (2.40)$$

Como,  $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ , segue que:  $V_\phi = m^2\phi$  e que  $V_{\phi\phi} = m^2$ . Daí:

$$\varepsilon = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 = \frac{1}{4\pi G\phi^2} \quad (2.41)$$

e

$$\eta = \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{\phi\phi}}{V} = \frac{1}{4\pi G\phi^2}. \quad (2.42)$$

Portanto:

$$\varepsilon = \eta = \frac{1}{4\pi G\phi^2}. \quad (2.43)$$

Este resultado é consistente com um regime inflacionário caótico a partir de um potencial quadrático.

### 2.3.3 Espectro de Potência

Em um cenário Inflacionário padrão, a força das perturbações do tensor é diretamente relacionado com a amplitude da densidade de energia. Sabemos que o espectro da potência para perturbação escalar é dado por [45].

$$P_\zeta = \frac{H^4}{4\phi^2\dot{\phi}^2}, \quad (2.44)$$

Onde  $\phi$  é o campo escalar. Observamos que todas as quantidades são determinadas em um horizonte cruzado [45], [46]. Tal parâmetro nos permite calcular o chamado *índice espectral escalar*, o qual é dado em [45].

$$n_s - 1 \equiv \frac{1}{HP_\zeta} \frac{dP_\zeta}{dt}, \quad (2.45)$$

e este parâmetro é muito importante como um teste para modelos cosmológicos, uma vez que é medido diretamente na CMB. Uma maneira equivalente de representar  $n_s$  é considerando a expressão:

$$n_s = -6\varepsilon + 2\eta = -4\varepsilon \quad (2.46)$$

Onde usamos o fato de que  $\varepsilon = \eta$  devido a aproximação de rolagem lenta. Considerando a Eq.(2.2), temos que:

$$n_s = -4\varepsilon = -\frac{4}{4\pi G\phi(t)^2} = -\frac{2\pi G(1 + \xi_1\beta_1)}{\pi GN_e} = -\frac{2}{N_e} - \frac{2}{N_e}\xi_1\beta_1$$

Assim, somando  $-1$  em ambos os membros, teremos que:

$$n_s - 1 = -\frac{2}{N_e} - 1 - \frac{2}{N_e}\xi_1\beta_1$$

colocando a condição:  $-2/N_e > -1$ , teremos que:

$$n_s - 1 \approx -\frac{2}{N_e} - \delta_{n_s}, \quad (2.47)$$

Onde  $\delta_{n_s} = (2/N_e)\xi_1\beta_1$  com,  $N_e > 2$  e consideramos  $\phi(t) = \phi(t_i)$ . Recentemente em "Planck 2015 results XIII. Cosmological Parameters"[32] foi obtido um valor para o índice espectral escalar  $n_s = 0.9655 \pm 0.0062$ ; portanto podemos estabelecer um limite para o termo  $\xi_1\beta_1$  relativo ao dado CMB. Esse limite é mais forte do que o obtido em:

$$\xi_1\beta_1 = \frac{N_e}{2\pi G\phi(t)^2} - 1, \quad (2.48)$$

Uma vez que não precisamos impor qualquer valor inicial para  $\phi(t_i)$ . Seguindo o procedimento adotado em [47], podemos assumir as igualdades:

$$n_s = 1 - \frac{2}{N_e} = 0.9655 \quad (2.49)$$

e

$$\delta_{n_s} = \frac{2}{N_e}\xi_1\beta_1 \simeq -10^{-3}, \quad (2.50)$$

Onde associamos o parâmetro de quebra de Lorentz com a ordem do erro experimental para  $n_s$ . Portanto, encontramos  $N_e \simeq 57.97$  e  $\xi_1\beta_1 \simeq -10^{-2}$ . A partir das Eqs.(2.30)–(2.32)–(2.45), obtemos  $n_s$  como função do tempo:

$$\begin{aligned}
n_s - 1 &= \frac{1}{HP_\zeta} \cdot \frac{dP_\zeta}{dt} = \frac{4\pi^2\dot{\phi}^2}{H^5} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{4H^3\dot{H}\dot{\phi}^2 - 2\dot{\phi}\ddot{\phi}H^4}{\dot{\phi}^4} = \\
&= \frac{\dot{\phi}^3 H^3 (4\dot{H}\dot{\phi} - 2\ddot{\phi}H)}{H^5 \dot{\phi}^4} = \frac{1}{H^2} \cdot \frac{4\dot{H}\dot{\phi} - 2\ddot{\phi}H}{\dot{\phi}} = \\
&= \frac{3}{4\pi G m^2 \phi^2} \cdot \left( 4\dot{H} - 2\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} \right) = \frac{3\dot{H}}{\pi G m^2 \phi^2} \\
n_s - 1 &= \frac{3\dot{H}}{\pi G m^2 \phi^2} \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$\dot{H} = -\frac{m^2}{3(1 + \xi_1\beta_1)} \tag{2.52}$$

sendo assim:

$$\begin{aligned}
n_s - 1 &= -\frac{3m^2}{3(1 + \xi_1\beta_1)} \cdot \frac{12\pi G(1 + \xi_1\beta_1)^2}{\pi G m^2 (mt - \sqrt{12\pi G}(1 + \xi_1\beta_1)\phi_0)^2} \\
&= -\frac{36(1 + \xi_1\beta_1)}{(\sqrt{3}mt - 6\sqrt{\pi G}\phi_0(1 + \xi_1\beta_1))^2}, \tag{2.53}
\end{aligned}$$

Segue que:

$$n_s = 1 - \frac{36(1 + \xi_1\beta_1)}{(\sqrt{3}mt - 6\sqrt{\pi G}\phi_0(1 + \xi_1\beta_1))^2}. \tag{2.54}$$

Este último resultado é útil para determinar a relação existente entre o índice escalar espectral com o denominado raio tensor-escalar, cuja definição é dada por:

$$r = \frac{P_T}{P_\zeta}; \quad P_T = 64\pi G \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2. \tag{2.55}$$

Desta forma, tomando Eq.(2.30) e Eq.(2.32), a dependência explícita de  $r$  é:

$$\begin{aligned}
r &= 64\pi G \frac{H^2}{4\pi^2} \cdot \frac{4\pi^2\dot{\phi}^2}{H^4} = 64\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = 64\pi G \frac{3\dot{\phi}^2}{4\pi G m^2 \phi^2} = \\
&= 48 \frac{m^2}{m^2 12\pi G(1 + \xi_1\beta_1)^2} \cdot \frac{36\pi G(1 + \xi_1\beta_1)^2}{(\sqrt{3}mt - 6\sqrt{\pi G}\phi_0(1 + \xi_1\beta_1))^2},
\end{aligned}$$

segue então que:

$$r = \frac{144}{(\sqrt{3}mt - 6\sqrt{\pi G}\phi_0(1 + \xi_1\beta_1))^2}. \tag{2.56}$$

Portanto, combinando  $n_s$  com  $r$  encontramos a relação:

$$r = 144 \cdot \frac{1 - n_s}{36(1 + \xi_1\beta_1)} = \frac{4(1 - n_s)}{1 + \xi_1\beta_1}, \tag{2.57}$$

fazendo uma expansão em  $\xi_1\beta_1$  na última expressão, obtemos que:

$$r = 4(1 - n_s)(1 - \xi_1\beta_1). \quad (2.58)$$

Além disso, a partir da relação  $n_s - 1 \approx -(2/N_e) - (2/N_e)\xi_1\beta_1$ , obtemos que:

$$r = \frac{8}{N_e}(1 + \xi_1\beta_1)(1 - \xi_1\beta_1) = \frac{8}{N_e}(1 - (\xi_1\beta_1)^2) \quad (2.59)$$

então, usando os valores anteriormente encontrados para  $N_e$  e para  $\xi_1\beta_1$  ( $N_e \approx 60$  e  $\xi_1\beta_1 \approx -10^{-2}$ )

$$r = \frac{8}{60}(1 - 10^{-4}) \approx \frac{4}{3}(10^{-1} - 10^{-5}) \approx 10^{-1}. \quad (2.60)$$

O valor obtido na equação acima é compatível com o experimento da colaboração do Planck para os parâmetros cosmológicos [30].

## Capítulo 3

# Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, dissertamos sobre os tópicos da dinâmica inflacionária no contexto da Violação da Invariância de Lorentz. Nosso estudo gira em torno do trabalho desenvolvido por Almeida, *et. al.*, [42] o qual adota um simples modelo com LIV para abordar o problema da energia escura. Esse modelo modifica a parte cinética do setor do campo de Ínflaton através de um campo de fundo que controla a LIV, caracterizando um meio que modifica a velocidade do Ínflaton (ver Eq.(2.6)). Verificamos que tal comportamento pode ser responsável por mudanças no tempo de um longo processo inflacionário. Ao identificar um índice de refração análogo, foi possível relacionar esse meio anisotrópico com o redshift cosmológico. Tal relação nos leva a concluir que um meio violando a invariância de Lorentz tipo-tempo possa ser responsável pela energia escura em baixas energias (baixo redshift). Além disso, isso concorda com o fato acima mencionado em que foi demonstrado que a violação da invariância de Lorentz induz Lagrangianas que podem conduzir a atual aceleração do universo.

Resultados interessantes também são obtidos para a dinâmica cosmológica. Note que ao combinar o regime de rolagem lenta com o campo de fundo violado a Invariância de Lorentz, isto desenvolve-se uma equação de estado para a energia escura que se aproxima da equação de estado da constante cosmológica. Esse recurso é notavelmente consistente com a fase de expansão pela qual nosso Universo está passando. Outro resultado interessante levantado por esse trabalho, é que essa investigação foi capaz de determinar o índice espectral escalar  $n_s$  e da razão tensor-escalar ( $r$ ), para este cenário cosmológico. Observe que o parâmetro de LIV mudou a relação entre os dois parâmetros cosmológicos. Além disso, o limite para o produto  $\xi_1\beta_1$  derivado de  $n_s$  resultou em um valor para a razão tensor-escalar que concorda com os dados de Planck para parâmetros cosmológicos. Esse teste reforça o potencial do nosso trabalho, e mais estudos devem ser abordados em outros lugares.

Uma perspectiva imediata, é a de revisitar todos os pontos abordados neste trabalho de dissertação em um cenário de LIV mais complexo, tal como a abordagem de se introduzir os efeitos da LIV via uma

métrica de arco-íris (ou Rainbow metric) proposta por Magueijo e Smolin (ver refs. [50, 51]). Na tentativa de abordar problemas de uma possível relatividade não inercial, essa métrica modifica fortemente a relação de dispersão que por sua vez, é capaz de gerar velocidade para as partículas com dependência da energia. Aqui estamos usando a potencial quadrático para ser compatível com o regime de rolagem lenta.

# Referências Bibliográficas

- [1] GUTH, A. H. **The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems** *Phys. Rev. D* 23, 347 (1981).
- [2] LINDE, A.D. **A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems** , *Phys. Lett. B* 108, 389 (1982).
- [3] LINDE, A. **Inflationary cosmology after Planck**, *Post-Planck Cosmology Lecture Notes of the Les Houches Summer School*: Vol. 100, Chap. 6 (2013), [hep-th/1402.0526].
- [4] RIESS, A. G.; et. al., [Supernova Search Team], **Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant** , *Astron. J.* 116, 1009 (1998), [astro-ph/9805201].
- [5] PERLMUTTER, S.; et. al., [Supernova Cosmology Project Collaboration], **Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae**, *Astrophys. J.* 517, 565 (1999), [astro-ph/9812133].
- [6] FERREIRA, P. G.; JOYCE, M. **Cosmology with a primordial scaling field**, *Phys. Rev. D* 58, 023503 (1998), [astro-ph/9711102].
- [7] CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. **Cosmological imprint of an energy component with general equation - ofstate**, *Phys. Rev. Lett.* 80, 1582 (1998), [astro-ph/9708069].
- [8] CARROLL, S. M. **Quintessence and the rest of the world**, *Phys. Rev. Lett.* 81, 3067 (1998), [astro-ph/9806099].
- [9] COPELAND, E. J.; LIDDLE, A. R.; WANDS, D. **Exponential potentials and cosmological scaling solutions** , *Phys. Rev. D* 57, 4686 (1998), [gr-qc/9711068].
- [10] ZLATEV, I.; WNAG, L. M.; STEINHADARDT, P. J. **Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant**, *Phys. Rev. Lett.* 82, 896 (1999), [astro-ph/9807002].
- [11] STEINHARDT, P. J.; WANG, L. M.; ZLATEV, I. **Cosmological tracking solutions** , *Phys. Rev. D* 59, 123504 (1999), [astro-ph/9812313].

- [12] HEBECKER, A.; WETTERICH, C. **Quintessential adjustment of the cosmological constant**, *Phys. Rev. Lett.* 85, 3339 (2000).
- [13] HEBECKER, A.; WETTERICH, C. **Natural quintessence**, *Phys. Lett. B* 497, 281 (2001), [hep-ph/0008205].
- [14] CHIBA, T.; OKABE, T.; YAMAQUECHI, M. **Kinetically driven quintessence**, *Phys. Rev. D* 62, 023511 (2000), [astro-ph/9912463].
- [15] ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV V. F.; STEINHARDT, P. J. **A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration**, *Phys. Rev. Lett.* 85, 4438 (2000), [astro-ph/0004134].
- [16] ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V. F.; STEINHARDT, P. J. **Essentials of k-essence**, *Phys. Rev. D* 63, 103510 (2001), [astro-ph/0006373].
- [17] CAPOZZIELLO, S. **Curvature Quintessence**, *Int. J. Mod. Phys. D* 11, 483 (2002), [gr-qc/0201033].
- [18] CAPOZZIELLO, S.; CARDONE, V. F.; CARLONI, S.; TROISI, A. **Curvature quintessence matched with observational data**, *Int. J. Mod. Phys. D* 12, 1969 (2003), [astro-ph/0307018].
- [19] CARROLL, S. M.; DUVVURI, V.; TRODDEN, M.; TURNER, M. S. **Is cosmic speed-up due to new gravitational physics**, *Phys. Rev. D* 70, 043528 (2004), [astro-ph/0306438].
- [20] HARKO, T.; LOBO, F. S. N.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.  **$f(R, T)$  gravity**, *Phys. Rev. D* 84, 024020 (2011), [gr-qc/1104.2669].
- [21] MORAES, P. H. R. S.; SANTOS, J. R. L. **A complete cosmological scenario from  $f(R, T, \phi)$  gravity theory**, *Eur. Phys. J. C* 76, 60 (2016), [gr-qc/1601.02811].
- [22] AMENDOLA, L. **Scaling solutions in general non-minimal coupling theories**, *Phys. Rev. D* 60, 043501 (1999), [astro-ph/9904120].
- [23] UZAN, J. P. **Cosmological scaling solutions of non-minimally coupled scalar field**, *Phys. Rev. D* 59, 123510 (1999), [gr-qc/9903004].
- [24] CHIBA, T. **Quintessence, the gravitational constant, and gravity**, *Phys. Rev. D* 60, 083508 (1999), [gr-qc/9903094].
- [25] BARTOLO, N.; PIETRONI, M. **Scalar tensor gravity and quintessence**, *Phys. Rev. D* 61, 023518 (2000), [hep-ph/9908521].



- [26] PERROTTA, F.; BACCIGALUPI, C.; MATARRESE, S. **Extended quintessence**, *Phys. Rev. D* 61, 023507 (2000), [astro-ph/9906066].
- [27] DVALI, G. R.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. **4D gravity on a brane in 5D Minkowski space**, *Phys. Lett. B* 485, 208 (2000), [hep-th/0005016].
- [28] SAHNI, V.; SHTANOV, Y. **Brane world models of dark energy**, *JCAP* 0311, 014, (2003), [astro-ph/0202346].
- [29] KOMATSU, E.; et. al., [WMAP Collaboration], **Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation**, *Astrophys. J. Suppl.* 180, 330 (2009), [astro-ph/0803.0547].
- [30] ADE, P. A. R.; et. al., [Planck Collaboration], **Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters**, *A & A* 594, A 13 (2016), [astro-ph/1502.01589].
- [31] GASPERINI, M. **Inflation and broken Lorentz symmetry in the very early universe**, *Phys. Lett. B* 163, 84 (1985).
- [32] LIM, E. A. **Can we see Lorentz-violating vector fields in the CMB**, *Phys. Rev. D* 71, 063504 (2005), [astro-ph/0407437].
- [33] LI, B.; FONSECA MOTA, D.; BARROW, J. D. **Detecting a Lorentz-Violating Field in Cosmology**, *Phys. Rev. D* 77, 024032 (2008), [astro-ph/0709.4581].
- [34] ZUNTZ, J. A.; FERREIRA, P. G.; ZOLSNIK, T. G. **Constraining Lorentz violation with cosmology**, *Phys. Rev. Lett.* 101, 261102 (2008), [gr-qc/0808.1824].
- [35] ARMENDARIZ-PICON, C.; SIERRA, N. F.; GARRIGA, J. **Primordial Perturbations in Einstein-Aether and BPSH Theories**, *JCAP* 1007, 010 (2010), [astro-ph1003.1283].
- [36] KANNO, S.; SODA, J. **Violating Inflation**, *Phys. Rev. D* 74, 063505 (2006), [hep-th/0604192].
- [37] AVELINO, P. P.; BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R.; RODRIGUES, J. J. **Impact of Lorentz violation on the dynamics of inflation**, *Phys. Rev. D* 79, 123503 (2009), [astro-ph/0903.5297].
- [38] DONNELLY, W.; JACOBSON, T. **Coupling the inflation to an expanding aether**, *Phys. Rev. D* 82, 064032 (2010), [grqc/1007.2594].
- [39] BLAS, D.; SIBIRYAKOV S. *JCAP* 1107, 026 (2011), [arXiv:1104.3579 [hep-th]].

- [40] AUDREN, B.; BLAS D.; LESQOURQUES, J.; SIBIRYAKOV, S. *JCAP* 1308, 039 (2013), [arXiv:1305.0009 [astro-ph.CO]].
- [41] JACOBSON, T. *PoS QG-PH*, 020 (2007) [arXiv:0801.1547 [gr-qc]].
- [42] ALMEIDA, C. A. G.; et. al. **Cosmology in the Universe with Distance Dependent Lorentz-Violating Background**, *Adv.High Energy Phys.*, 5802352 (2017).
- [43] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**, *Oxford University Press, U.S.A.* (1990).
- [44] PASSOS, E.; ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; HOLANDA. O.; SOUZA G. B.; ZARRO, C. A. D. **Lorentz invariance violation and simultaneous emission of electromagnetic and gravitational waves**, *Phys. Lett. B* 772, 870 (2017), [hep-th/1612.02769].
- [45] KOSTELECKÝ, V. A.; MEWERS M. **Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension**, *Phys. Rev. D* 80, 015020 (2009), [hep-ph/0905.0031].
- [46] HECHT, E. **Optics**, 4th ed., Addison Wesley, San Francisco USA (2002).
- [47] ELLIS, J.; FAIRBAIRN, M.; SUEIRO, M. **Rescuing quadratic inflation**, *JCAP* 02, 044 (2014), [astro-ph/1312.1353].
- [48] MUKHANOV, V. **Physical Foundations of Cosmology**, Cambridge University Press, Cambridge UK (2005).
- [49] CASANA, R.; et al., **Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy**, *Phys. Rev. D* 78, 125013 (2008), [hep-th/0810.0306].
- [50] LAFBRANCE, R.; MYERS R. C. **Gravities rainbow: Limits for the applicability of the equivalence principle**, *Phys. Rev. D* 51, 2584 (1995).
- [51] MAGUEIJO, J.; SMOLIN L. **Gravities rainbow**, *Class. Quant. Grav.* 21, 1725 (2004).
- [52] SANTOS, J.J.G. **Tópicos em Cosmologia com Campos Escalares**, Tese de Doutorado, p.30, UFPB, 2011.