



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Dinâmica não-linear em vibrações flexurais de um
ressonador mecânico cantiléver**

por

Isaac Cazé Nunes

CAMPINA GRANDE - PARAÍBA - BRASIL

- Agosto 2020 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Dinâmica não-linear em vibrações flexurais de um
ressonador mecânico cantiléver**

Isaac Cazé Nunes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Não-Linear.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Arlen Buriti da Costa.

Co-orientador: Prof. Dr. Adriano de Albuquerque Batista.

CAMPINA GRANDE - PARAÍBA - BRASIL

- Agosto 2020 -

N513d Nunes, Isaac Cazé.
Dinâmica não-linear em vibrações exurais de um ressonador mecânico cantiléver. / Isaac Cazé Nunes. - Campina Grande, 2020.
89 f. : il. Color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.

"Orientação: Prof. Dr. Ricardo Arlen Buriti da Costa, Dr. Adriano de Albuquerque Batista".

Referências.

1. Física. 2. Ressonador mecânico. 3. Dinâmica não-linear. 4. Oscilador de Duffing. 5. Biestabilidade. I. Costa, Ricardo Arlen Buriti da. II. Batista, Adriano de Albuquerque. III. Título.

CDU 53(043)

DINÂMICA NÃO-LINEAR EM VIBRAÇÕES FLEXURAIS DE UM
RESSONADOR MECÂNICO CANTILÉVER

ISAAC CAZÉ NUNES

Aprovada em 08/09/2020.

BANCA EXAMINADORA

Assinatura digital via plataforma SEI/UFMG

Prof. Dr. Ricardo Arlen Buriti da Costa

Orientador

Assinatura digital via plataforma SEI/UFMG

Prof. Dr. Adriano de Albuquerque Batista

Co-orientador

Assinatura digital via plataforma SEI/UFMG

Prof. Dr. Wanderley Ferreira de Amorim Junior

Examinador Externo

Assinatura digital via plataforma SEI/UFMG

Prof. Dr. Marcos Cesar Santos Oriá

Examinador Externo

Dedicatória

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Adalmi Nunes e Maria Auxiliadora, e
a minha esposa, Raniza Carvalho.*

Agradecimentos

- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pela bolsa que proporcionou a dedicação exclusiva ao mestrado.
- Aos meus orientadores, Adriano Batista e Ricardo Buriti, por todo suporte dado ao longo desses dois anos e meio.
- Aos professores Lincoln e Rodrigo por ter emprestado alguns dos estágios de deslocamentos utilizados na bancada experimental.
- A Universidade Federal de Campina Grande, UFCG, e Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande, UAF-UFCG, pela concessão de todo suporte tecnológico e de infraestrutura, para a execução deste trabalho.
- A Cícero e Mário, técnicos da oficina mecânica da UFCG, pelo auxílio e execução da usinagem de algumas peças fundamentais para este trabalho.
- Aos meus pais, Adalmi e Maria, por proporcionar todo suporte emocional e financeiro, durante a execução deste trabalho.
- A minha esposa, Raniza, por toda compreensão e incentivo, durante a execução deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho construímos uma mesa inercial sobre a qual engastamos um ressonador mecânico tipo cantiléver feito de uma haste de aço delgada com o objetivo de obtermos altos valores do fator de qualidade e assim estudarmos vibrações não-lineares. Utilizamos o modelo de Euler-Bernoulli para obtermos os modos e frequências normais. Das medidas das frequências do modo fundamental em diferentes comprimentos obtemos o módulo de Young do aço do cantiléver. Também obtemos a massa e a constante elástica efetivas no modo fundamental próximo da ponta do cantiléver. Aproximamos a dinâmica de vibrações do modo fundamental por um modelo de um grau de liberdade. Com o objetivo de construirmos um oscilador de Duffing, acoplamos na extremidade livre do ressonador um ímã de neodímio e num suporte fixo um pouco acima da haste um outro ímã idêntico ao que foi acoplado no cantiléver. Quando distantes, os ímãs são alinhados no mesmo eixo vertical e orientados em sentidos opostos, mas quando reduzimos suficientemente a distância entre eles a haste flamba, formando um poço de potencial duplo. Caracterizamos os parâmetros desse oscilador medindo as duas posições de equilíbrio de cada poço e suas respectivas frequências de oscilação de pequena amplitude e correspondente taxa de amortecimento. Além de oscilações amortecidas, estudamos também oscilações forçadas. Encontramos curvas de biestabilidade para oscilações em cada poço. Nós ajustamos os dados experimentais das curvas de biestabilidade usando o método do balanço harmônico. Finalmente, excitamos vibrações flexurais de grande amplitude no ressonador de forma a obtermos vibrações com características caóticas tal como um espectro de Fourier continuamente distribuído, principalmente em baixas frequências. Finalmente, relatamos que os modelos teóricos que usamos ajustaram muito bem os dados experimentais desta dissertação.

Palavras-chave: Ressonador mecânico, teoria de vigas de Euler-Bernoulli, modos normais, dinâmica não-linear, oscilador de Duffing, método do balanço harmônico, biestabilidade, caos determinístico.

ABSTRACT

In this work, we built an inertia base on which we clamped a mechanical cantilever resonator made of a thin steel beam such that the resonator has a high quality factor and one can study its nonlinear flexural vibrations. We use the Euler-Bernoulli beam model to obtain normal modes and frequencies. By measuring the fundamental mode frequency for different lengths of the resonator we obtain the Young's modulus of the cantilever's steel. We also obtain the effective mass and elastic constant in the fundamental mode near the tip of the cantilever. In addition, we approximate the fundamental mode vibration dynamics by a one-degree-of-freedom model. Furthermore, with the objective of making a mechanical Duffing oscillator, we coupled one neodymium magnet to the free end of the resonator and another one, identical to the first one, on a fixed support just above the cantilever. When far apart, both magnets are in the same vertical axis and oriented in opposite directions to one another, but when the distance between them is sufficiently reduced, the cantilever buckles and forms a double well potential. We determined the parameters of this oscillator by measuring the two equilibrium positions of each well, the small amplitude oscillation frequencies and the corresponding damping rate. In addition to damped oscillations, we also studied forced oscillations. We found bistability curves for oscillations in each well. We fitted the data of this stationary response using the harmonic balance method. In the last experiment, we excited large amplitude flexural vibrations and obtained a nonlinear dynamics with chaotic characteristics such as the spread spectrum in the Fourier transform of the time series of the vibrations. Finally, we point out that the theoretical models we used fitted the experimental data very well throughout this work.

Keywords: Mechanical resonator, Euler-Bernoulli beam theory, normal modes, nonlinear dynamics, Duffing oscillator, harmonic balance method, bistability, deterministic chaos.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	APARATO EXPERIMENTAL	7
2.1	Mesa inercial	8
2.2	Aparato experimental eletro-eletrônico	15
2.3	Comparação com mesa inercial proposta pelo Moon e Holmes	16
3	ANÁLISE ESTÁTICA	19
3.1	Modelo estático de Euler-Bernoulli para vigas	20
3.1.1	Equações do equilíbrio estático da viga	22
3.1.2	Viga engastada sujeita a uma força puramente axial	25
3.1.3	Estabilidade de uma viga engastada	26
3.2	Ímãs permanentes	27
3.2.1	Campo magnético de um ímã cilíndrico	29
3.2.2	Força de repulsão magnética entre dois ímãs cilíndricos	30
3.3	Experimentos estáticos, resultados e discussão	33
3.3.1	Distância mínima de flambagem	33
3.3.2	Deflexão máxima de cada poço	34
3.3.3	Resultados e discussão	35
4	ANÁLISE DINÂMICA	38
4.1	Energia potencial de deformação e cinética de um segmento de viga	39
4.1.1	Energia potencial de deformação	40
4.1.2	Energia cinética	41
4.2	Vibrações flexurais de pequenas amplitudes de uma viga engastada	41
4.3	Modos normais de uma viga linear engastada	42

4.4	Aproximação das energias envolvidas para o modelo de um único grau de liberdade	43
4.5	Vibrações flexurais não-lineares de uma viga engastada	46
4.6	Experimento dinâmico, resultados e discussão	46
4.6.1	Série temporal da haste linear	46
4.6.2	Resultados e discussão	47
	5 O RESSONADOR MECÂNICO DE DUFFING	51
5.1	Oscilador de Duffing	52
5.1.1	Equação de Duffing	52
5.1.2	Solução estacionária do oscilador de Duffing forçado	54
5.2	Curva de biestabilidade	56
5.3	Haste não-linear engastada: modelagem e caracterização experimental	58
5.3.1	Constante de dissipação energética	59
5.3.2	Potencial assimétrico	60
5.3.3	Amplitude da força externa	62
5.4	Experimento do oscilador de Duffing e resultados	62
5.4.1	Série temporal da haste não-linear	62
5.4.2	Curva da bi-estabilidade	63
5.4.3	Resultados e discussão	65
	6 EM BUSCA DO CAOS DETERMINÍSTICO	70
6.1	Regime caótico	70
6.2	Análise caótica	71
6.2.1	Espaço de fase	72
6.2.2	Mapa de Poincaré	72
6.2.3	Exemplos de espaços de fases e mapa de Poincaré	73
6.3	Atrator Estranho	73

6.4	Ensaio caótico e resultados	77
6.4.1	Ensaio caótico	77
6.4.2	Resultados e discussão	78
7	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	86

Lista de abreviaturas e siglas

GDL Grau(s) de Liberdade

Lista de símbolos

a	Raio do ímã
b	Largura da haste
c	Constante de amortecimento
d	Distância entre as faces dos ímãs
d_1	Distância mínima entre os ímãs para flambar uma haste
E	Módulo de Young
f_σ	Força de corpo
f_0	Frequência fundamental em hertz
f_e	Amplitude da força externa escalada
f_n	n-ésima frequência dos modos normais em hertz
F_e	Amplitude da força externa
\vec{F}_m	Força magnética de repulsão
F_{cr}	Força crítica de flambagem
I	Momento de inércia de área
k	Constante de elasticidade

K	$\frac{F_m}{EI}$
l	Comprimento do ímã
ℓ_0	Comprimento livre da haste
m	Massa efetiva da viga
M_0	Constante de magnetização do ímã
t	Tempo
t_0	Tempo inicial
T	Período de tempo
u	Energia potencial elástica específica
x_+ e x_-	Posição de equilíbrio do poço mais próxima e distante da bobina, respectivamente
z_{\pm}	$z_0 \pm l/2$
α	Amolecimento ou endurecimento de mola
β	Amolecimento ou endurecimento de mola específico
γ	Constante de amortecimento específica
Γ_h	Constante de amortecimento
ϵ	Deformação
θ	Ângulo de deflexão
λ_m	$\frac{\pi\mu_0 a^2 M_0^2}{2}$
μ	Densidade de massa linear
μ_0	Permeabilidade magnética do meio

ρ_v	Densidade da viga
σ	Tensão
ω	Frequência da força externa
ω_+	Frequência angular natural do poço mais próxima da bobina
ω_-	Frequência angular natural do poço mais distante da bobina
ω_0	Frequência angular fundamental em radianos
ω_n	n-ésima frequência dos modos normais em radianos
Ω	$\omega_0^2 - \omega^2$
τ	Espessura da haste

Introdução

O foco deste trabalho de dissertação é o estudo de vibrações flexurais forçadas e amortecidas numa haste delgada de metal que é engastada em sua base. Esse tipo de ressonador mecânico começou a ser estudado no século XVII. O primeiro modelo matemático com predições quantitativas acuradas foi desenvolvido por Jacob Bernoulli e L. Euler [1, 2]. Eles investigaram tanto a parte estática como a dinâmica. Esse modelo ficou conhecido como a teoria de vigas de Euler e Bernoulli. Apesar da longa história, esse sistema físico ainda vem sendo estudado e tem tido muitas aplicações científicas e tecnológicas até os dias de hoje.

Se escolhermos um ponto material qualquer ao longo da haste e acompanharmos o seu movimento. Veremos que na sua forma mais simples, a dinâmica das vibrações de pequena amplitude desse ponto do ressonador mecânico pode ser entendida a partir de um modelo de um oscilador harmônico forçado e amortecido com 1 grau de liberdade. Os parâmetros desse ressonador são a massa efetiva, a constante elástica e o coeficiente de dissipação. Os dois primeiros parâmetros podem ser obtidos da teoria de Euler-Bernoulli para vigas delgadas [3]. A frequência de ressonância pode ser obtida pelo pico da transformada de Fourier de série temporal de oscilações amortecidas e o coeficiente de dissipação pode ser medido experimentalmente do ajuste da largura desse pico. Não há uma forma simples de se obter o coeficiente de dissipação da teoria porque ele tem basicamente 3 diferentes contribuições físicas: perdas pela base de engaste, perdas pelo atrito viscoso do ar e perdas por fricção interna. As perdas pela base de engaste são mais fáceis de reduzir, enquanto

as perdas pelo atrito viscoso são desprezíveis em baixas frequências. As perdas por fricção interna são intrínsecas do material utilizado para fazer a haste, da forma da haste e da frequência das oscilações.

Estudamos também as vibrações forçadas causadas por uma força externa senoidal que é um material ferromagnético. Neste trabalho utilizamos uma força magnética para excitar as vibrações. Para isso as hastes que usamos são constituídas de aço ferrítico. O campo magnético é gerado por uma bobina envolta por centenas de voltas de um fino fio esmaltado. No núcleo da bobina colocamos uma pilha de lâminas de ferro doce, material ferromagnético, com alto valor de permeabilidade magnética, comumente utilizado em transformadores. Essa bobina é ligada a um gerador de funções que a alimenta com uma diferença de potencial AC, que conseqüentemente gera uma corrente elétrica alternada. A bobina é colocada ao lado da haste, aproximadamente no meio da haste. O campo magnético gerado por essa bobina decai rapidamente com a distância da extremidade mais próxima da bobina. Essa variação espacial do campo magnético é que gera a força magnética sobre a haste.

Em um nível teórico um pouco mais complexo que o modelo de um grau de liberdade do oscilador harmônico, podemos utilizar a teoria da elasticidade para descrever o movimento de toda a haste. Para isso utilizamos o modelo de Euler-Bernoulli para vigas para descrever as vibrações flexurais da haste. O que procuramos é encontrar os modos normais de vibração da haste, quando todos os seus pontos materiais vibram numa mesma frequência. Consideramos apenas o movimento coerente e desprezamos os graus de liberdade internos, aqueles relacionados às flutuações térmicas e aos fônons cujas frequências de oscilação são em geral muito mais altas do que as das vibrações flexurais da haste. Embora a haste engastada na sua base tenha um número infinito de graus de liberdade, cada um correspondendo a um modo normal de vibração, no nosso estudo vamos considerar a excitação apenas do modo fundamental de vibração flexural. Isso é uma boa aproximação por que, como veremos mais adiante, o fator de qualidade das oscilações da haste é bem alto. Assim uma excitação senoidal só apresenta uma resposta apreciável quando a sua

frequência é bem próxima da frequência de um modo normal. No nosso caso esse modo normal é o modo fundamental.

Quando a amplitude de vibração se torna grande, as equações do movimento se tornam não-lineares. O modelo mais simples para entendê-la é o do oscilador de Duffing [4, 5]. Ao lado do oscilador de Van der Pol [6, 7, 8] e do oscilador de Rayleigh [9, 10], o oscilador de Duffing é um dos osciladores não-lineares mais conhecidos que há na literatura científica. Nesse modelo de oscilador a força elástica restauradora tem um termo cúbico no deslocamento da posição de equilíbrio. Esse é o oscilador não-linear mais simples que há e é globalmente estável. Mais adiante, vamos mostrar utilizando a teoria de Euler-Bernoulli para vigas como encontrar a equação de Duffing. Para completar a caracterização de nosso sistema físico, encontraremos o coeficiente do termo não-linear ao ajustarmos a curva de biestabilidade em função da frequência de excitação.

Segundo Strogatz [5], o caos determinístico é caracterizado pela sensibilidade que o sistema dinâmico não-linear tem nas condições iniciais. Quaisquer variações, por menor que sejam, são inicialmente amplificadas exponencialmente. Além disso, o espaço de fase acessível ao sistema dinâmico é limitado. Essas duas propriedades criam um comportamento não periódico exibido durante um grande intervalo de tempo. Essa órbita atratora não-periódica é conhecida como atrator estranho, sendo bastante diferente de atratores do tipo ponto fixo estável ou de ciclos limites, que apresentam soluções quiescentes ou órbitas periódicas, respectivamente. O primeiro sistema dinâmico a apresentar tal tipo de comportamento foi os oscilador de Lorenz [11].

Em 1979, Moon e Holmes publicaram, pela primeira vez na história, um artigo no qual modelaram, experimentalmente, a dinâmica caótica utilizando o oscilador de Duffing [12, 5]. Eles desenvolveram uma bancada experimental capaz de excitar senoidalmente uma haste delgada não-linear e avaliaram os resultados obtidos utilizando a equação de Duffing. O experimento proporcionou resultados satisfatórios e realísticos. Para maiores detalhes sobre esse experimento, consultar [13].

Há 50 anos atrás, os modelos matemáticos utilizados na resolução de problemas que

envolvem oscilações caóticas eram simples, pois não havia como resolver numericamente as equações que regiam a dinâmica desses sistemas, o que tornava os resultados dessas análises imprecisos e errôneos. Atualmente, graças aos avanços tecnológicos e à evolução da capacidade de processamento dos computadores, os estudos das vibrações não-lineares sujeitas ao caos tornaram-se bem mais acessíveis [14]. Além disso, graças aos bons resultados obtidos por Moon e Holmes, diversos outros estudos voltados para análise de vibrações não-lineares foram feitos. Atualmente, físicos, matemáticos e engenheiros tentam, cada vez mais, compreender os efeitos dessas vibrações. Um foco recente de interesse em vibrações flexurais é a geração de energia elétrica através da flexão de piezoelétricos ligados à base de *cantilevers*. Nesse caso o objetivo é recuperar energia das excitações mecânicas provenientes do meio ambiente, tais como dos ventos, oceanos ou até mesmo do corpo humano, com o intuito de alimentar dispositivos eletrônicos remotos para a internet das coisas [15, 16, 17].

Nos últimos 10 anos, bancadas experimentais vêm sendo construídas para testar diversos modelos de coleta de energia mecânica ambiental. Algumas são muito semelhantes à que foi construída por Moon e Holmes, diferindo basicamente no fato de que piezoelétricos estão diretamente acoplados às bases das hastes engastadas.

Desde o início deste trabalho de dissertação estamos construindo e aperfeiçoando uma bancada experimental com o objetivo final de excitar vibrações flexurais caóticas numa haste delgada de aço engastada em sua base. Desenvolvemos várias versões ao longo desse tempo com características cada vez mais robustas, precisas e reproduzíveis até finalmente conseguirmos excitar vibrações tipicamente caóticas.

Foi feita uma modelagem matemática que abrange desde a força magnética que provoca a não-linearidade nos ressonadores, até as vibrações caóticas sofridas por eles. Utilizamos o modelo de Euler-Bernoulli para vigas, a fim de avaliar a haste em condições estáticas. A equação de Duffing foi utilizada para analisar a dinâmica não-linear das vibrações flexurais da haste. Utilizamos os métodos matemáticos perturbativos para obter soluções aproximadas da equação de Duffing. Com essas soluções, analisamos a curva da bi-

estabilidade da haste. Avaliamos as oscilações caóticas da haste, o que nos permitiu entender um pouco mais sobre esse fenômeno. Além disso, a bancada experimental serve como um excelente instrumento didático para alunos que têm interesse no tema. Contudo, essa bancada nos proporcionará meios de avaliar e estudar, experimentalmente, o caos determinístico. O grande enfoque desse trabalho diz respeito à análise do caos em hastes delgadas não-lineares.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

Capítulo 2: Aqui explicamos a bancada experimental que foi desenvolvida durante esta dissertação. Abordamos todo aparato experimental necessário para realização dos experimentos. Expomos o ressonador que foi ensaiado e como ele foi produzido.

Capítulo 3: Neste capítulo estudamos a flexão de uma viga engastada, via teoria de Euler-Bernoulli para vigas. Dessa teoria obtivemos as condições para a perda de estabilidade de uma viga sujeita a uma carga puramente compressiva. Também Avaliamos o campo magnético gerado por um ímã cilíndrico que está uniformemente magnetizado na direção axial. Calculamos a força de repulsão magnética formada entre a superfície de dois ímãs cilíndricos com polarizações iguais e orientadas ao longo do mesmo eixo.

Capítulo 4: Aqui avaliamos a teoria da elasticidade para uma viga linear engastada que oscila livremente. Obtivemos os modos normais e os conceitos de constante elástica e massa efetiva. Na sequência, estudamos dinâmica oscilatória dela levando em conta um termo não-linear em sua energia potencial. Nas duas análises as forças dissipativas foram desprezadas. Essas duas análises foram fundamentais para compreendermos o oscilador de Duffing.

Capítulo 5: Neste capítulo investigamos a dinâmica de um oscilador de Duffing amortecido e forçado senoidalmente. Obtivemos, aproximadamente, as soluções estacionárias de sua equação através do método perturbativo do balanço harmônico. Avaliamos a resposta em frequência de um oscilador desse tipo. Utilizamos este modelo para avaliar a dinâmica de uma haste não-linear e expomos como definir seus parâmetros experimentais. Além disso, avaliamos as respostas tipicamente caóticas apresentadas por este modelo.

Capítulo 6: Aqui estudamos a teoria do caos. Durante alguns ensaios, conseguimos submeter a haste em um regime tipicamente caótico. Avaliamos estes resultados graficamente. Percebemos que as análises gráficas não são suficientes para determinar se o sistema está ou não sob regime caótico.

Conclusão: Finalizamos o trabalho apresentando nossas conclusões e perspectivas para o futuro.

Aparato Experimental

Nesse capítulo descrevemos a bancada experimental. Ela é basicamente constituída por um sensor óptico e uma mesa inercial, sobre a qual acoplamos um ressonador mecânico de Duffing, intuito desta dissertação. Além disso, apresentamos a haste que foi ensaiada. Mostramos todos os componentes eletro-eletrônicos necessários para realização dos experimentos. Expomos também a distribuição e montagem dos componentes para aquisição de dados.

O ressonador consiste em uma haste delgada. Ela foi engastada em uma de suas extremidades e ficou livre na outra. Em sua extremidade livre acoplamos um ímã de neodímio e logo acima dele, a uma distância pré-definida, fixamos um outro ímã também de neodímio. Devido a interação magnética repulsiva entre estes ímãs, as hastes tornaram-se não-lineares.

Estudamos em que condições a haste sofreu flambagem em consequência da ação magnética entre os ímãs. Avaliamos suas oscilações livre em condições lineares. Modelamos a dinâmica oscilatória não-linear utilizando o modelo do oscilador de Duffing. À medida que apresentarmos o desenvolvimento teórico nos próximos capítulos, modelaremos as hastes da bancada. Como veremos, serão utilizados conceitos físicos e matemáticos, além de análises numéricas, a fim de modelar, estática e dinamicamente, essas hastes. Contudo, em cada capítulo proposto, será feito um comparativo entre os resultados teóricos e/ou numéricos, com os experimentais que serão obtidos. Além disso, em alguns experimentos foi necessário automatizarmos todo o procedimento utilizando scripts em Python, como

veremos nos próximos capítulos.

Na seção 2.1 apresentamos a mesa inercial que foi construída ao longo do mestrado e descrevemos os seus principais subsistemas. Já na seção 2.2 exibimos todo aparato eletroeletrônico utilizado nos experimentos. Por fim, na seção 2.3 realizamos um comparativo entre a mesa inercial que foi construída nesta dissertação e a que foi proposta por Moon e Holmes.

2.1 Mesa inercial

Nesta seção nos restringiremos em descrever a mesa inercial propriamente dita, ou seja, naquilo que foi construído e desenvolvido dentro do Laboratório de Eletromagnetismo e Física Não-Linear (L.E.A.F.), localizado no departamento de Física, na Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), campus Campina Grande, pelo autor desta dissertação, sob a supervisão do Prof. Dr. Adriano Albuquerque Batista. Uma foto dela é mostrada na figura 2.1.



Figura 2.1 – Mesa inercial construída ao longo desta dissertação.

A mesa inercial é composta por cinco subsistemas fundamentais: conjunto de ímãs

que provocam a não-linearidade, subsistema de detecção das vibrações (sensor óptico) e excitador dos ressonadores (bobina), ressonador mecânico (haste) e base para engaste dos ressonadores. Mostramos eles na figura 2.2.

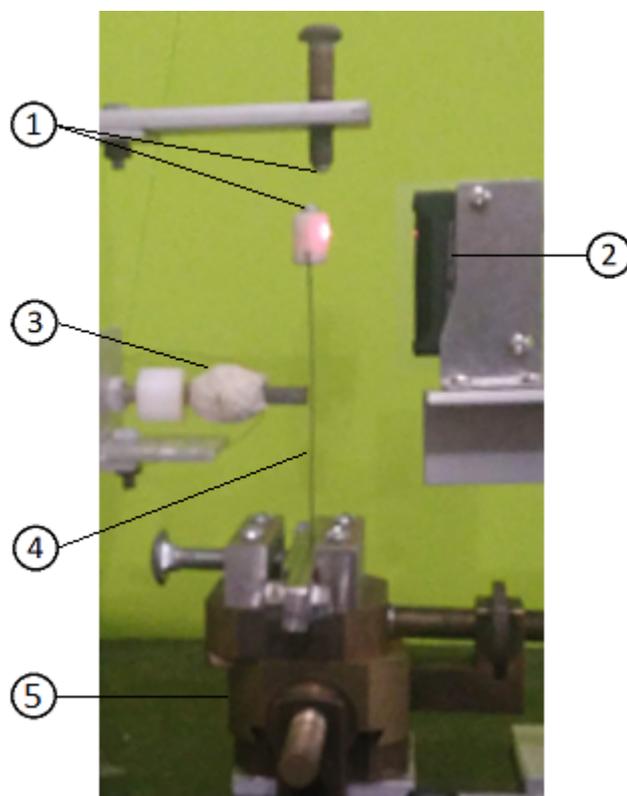


Figura 2.2 – Nesta foto mostramos os cinco principais subsistemas da versão final da mesa inercial construída, onde: 1 - ímãs de neodímio; 2 - detector da vibrações; 3 - subsistema de excitação; 4 - ressonador mecânico (haste); 5 - base de engaste dos ressonadores. Nessa imagem percebe-se que a haste está em um ponto de equilíbrio estável mais próximo da bobina.

O subsistema engaste do ressonador corresponde a um estágio de deslocamento xy (2 GDL) e está representado na figura 2.3. Nele foram fixadas duas peças de aço inox, capazes de fixar a base do ressonador firmemente, sem que haja a possibilidade dele se mover durante os experimentos. Graças ao ajuste de deslocamento em duas direções, podemos posicionar a haste de forma adequada em relação aos outros subsistemas. Além disso, esta base é de latão e está acoplada por parafusos diretamente a mesa de granito que sustenta toda a bancada, tornando-a imóvel e reduzindo as perdas energéticas no decorrer dos experimentos.

O ressonador mecânico corresponde a uma haste delgada de aço inoxidável ferrítico

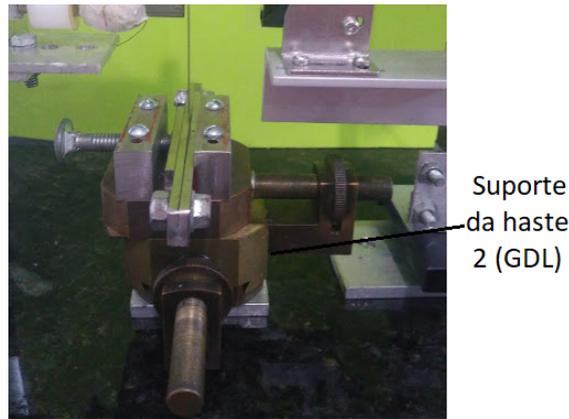


Figura 2.3 – Suporte de engaste da haste que possui 2 GDL com movimento nas direções dos eixos x e y .

com dimensões de $105.00 \times 8.50 \times 0.30$ mm e massa total de aproximadamente 2.1 g. Confeccionamos ele utilizando uma régua como chapa-base. Efetuamos o seu corte com um equipamento de eletroerosão nas dimensões de comprimento e largura especificadas acima. Em seguida reduzimos sua espessura utilizando uma máquina de retífica. Na sequência encaixamos um ímã de neodímio com comprimento, ℓ_m , de 9.75 mm e diâmetro, $2a$, de 4.90 mm, nela. Para isso construímos uma luva de polietileno que intermedeia este encaixe (ímã e a haste). Por fim, fixamos com cola Super Bonder Loctite, composta quimicamente por Etilcianoacrilato, a luva na haste e o ímã na luva. Mostramos este ressonador na figura 2.4a. Para engastar a haste na base de engaste, produzimos um calço. Basicamente são duas placas em aço inoxidável aparafusadas nas duas extremidades com parafusos e porcas. Posicionamos a haste entre as duas placas, encaixamos os parafusos e porcas em seus devidos lugares e apertamos as porcas ao máximo. Caso os calços fossem confeccionados em um material diferente do das hastes, haveriam perdas energéticas durante as oscilações, levando a resultados distorcidos e imprecisos. Na figura 2.4b representamos a haste com o calço, pronta para ser engastada na base de engaste. Esta haste é o objeto experimental desta dissertação.

O subsistema conjunto de ímãs é composto por dois ímãs de neodímios idênticos, sendo um deles o ímã que está fixado na haste. Na mesa inercial, o segundo ímã está posicionado logo acima do ímã que foi fixado na haste. Ele está fixo em um eixo rosqueado, como mostrado na figura 2.5. Também acoplamos ao eixo rosqueado um estágio de deslocamento

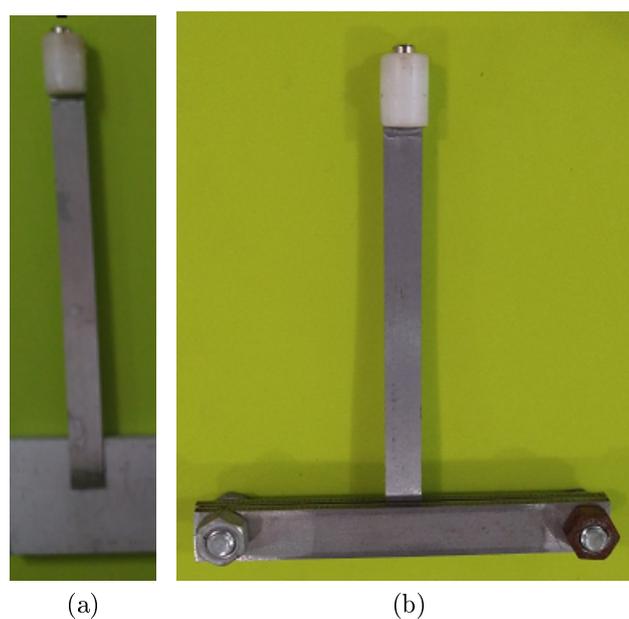


Figura 2.4 – (a) Haste delgada de aço inoxidável ferrítico com dimensões de $105.00 \times 8.50 \times 0.30$ mm, encaixada ao ímã de neodímio, utilizando a luva de polietileno na intermediação deste encaixe (haste e ímã); (b) subsistema ressonador, composto pela haste acoplada no calços.

capaz de se movimentar em uma direção (1 GDL). Ele nós permite mover o ímã superior com bastante precisão na direção de z . Dessa forma é possível aumentar ou reduzir a distância entre os dois ímãs. Além disso, o polo superior do ímã acoplado à haste e o



Estágio de deslocamento
(1 GDL)

Figura 2.5 – Suporte do ímãs acoplado a um estágio linear de deslocamento que possui 1 GDL, tornando possível o movimento do ímã superior na direção do eixo z .

polo inferior do ímã fixado ao eixo. Portanto, a partir de uma determinada distância, d , uma força magnética de repulsão passa atuar no sistema. Como o ímã superior está

bem firme, ele não sofre deslocamento em decorrência desta força. Já o ímã fixado na extremidade livre da haste, pode sofrer deslocamento em decorrência desta força. Logo, a medida que reduzimos a distância entre os ímãs, o módulo da força magnética de repulsão aumenta gradativamente. Em uma determinada distância, d_1 , ele atinge um determinado valor que resultar na flambagem da haste, tornando-a instável e não-linear. Representamos esta situação na figura 2.6. Este subsistema é responsável por provocar a maior parte da não-linearidade do sistema.

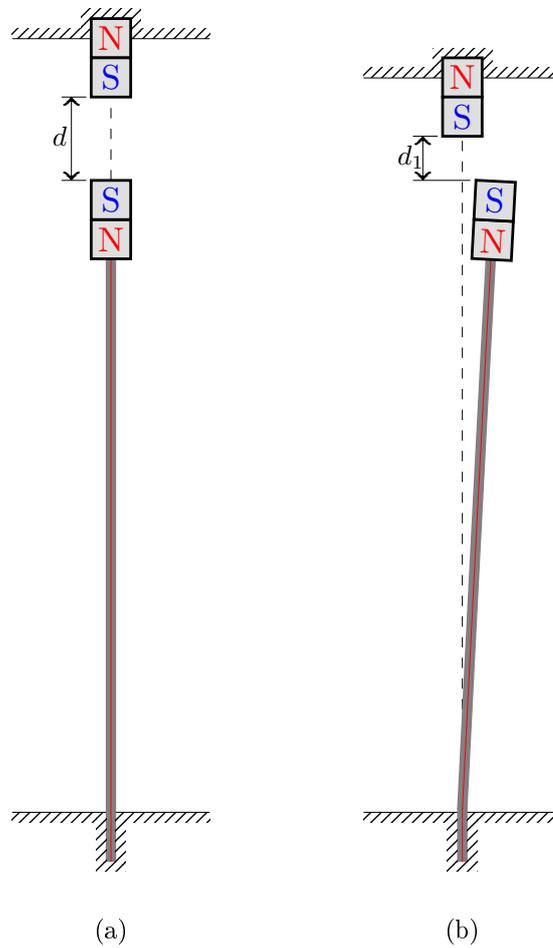


Figura 2.6 – Esquema da montagem do oscilador de Duffing desenvolvido nesta dissertação quando a haste está **(a)** linear e **(b)** defletida, onde, $d > d_1$.

Após flambada, a haste passará a possuir três pontos de equilíbrio. Dois deles são estáveis, nesse caso a haste estará mais distante ou mais próximo da bobina, e um instável, que corresponde à haste sem deflexão. As figuras 2.7a e 2.7b, representam, respectivamente, a haste em seu poço estável mais distante e mais próximo da bobina.

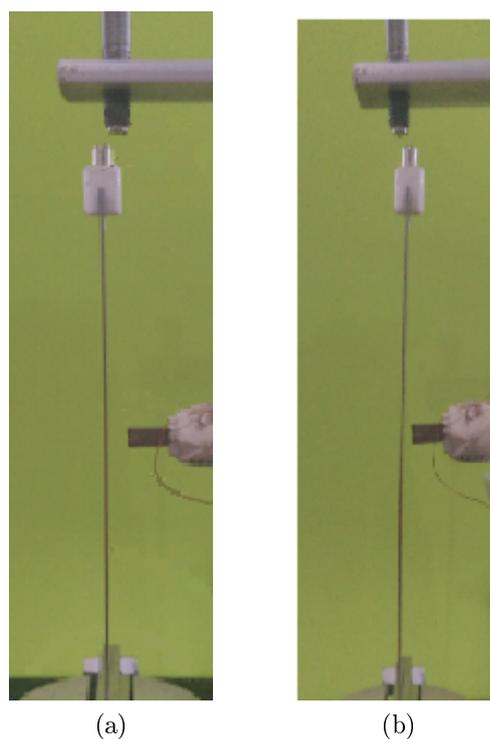


Figura 2.7 – Haste não-linear no ponto de equilíbrio estável **(a)** mais distante da bobina e **(b)** mais próximo da bobina.

O solenoide é o principal componente do subsistema de excitação. Ele foi confeccionada em fio de cobre esmaltado de 28 AWG e tem 400 voltas enrolado uniformemente e distribuídas em camadas sobrepostas. O seu diâmetro externo e interno são 16,00 mm e 8,00 mm, respectivamente, e seu comprimento total é de 14,50 mm. Em seu núcleo, existem lâminas de material ferromagnético (aço) que estão empilhadas umas nas outras e produzem o formato de paralelepípedo uniforme, de dimensões 12,50 mm \times 10,25 mm \times 42,00 mm. Utilizamos lâminas na confecção desse núcleo, pois assim os efeitos dissipativas da corrente de Foucault são reduzidos, evitando o aumento da temperatura do núcleo da bobina ao longo dos experimentos. Quando energizamos este solenoide com uma corrente elétrica alternada no tempo do tipo senoidal, ele gera um campo magnético variável. Como os ressonadores são feitos de material ferromagnético, este campo magnético interage com o ressonador, excitando-o e fazendo que ele oscile.

Para detectar as oscilações dos ressonadores utilizamos o sensor óptico Keyence IL-S025 com o amplificador Keyence IL-1000. Ele é capaz de capturar até 10^4 amostras por segundo. Além disso, ele medi deslocamentos com amplitude de até 5,00 mm, com uma

precisão de $10\ \mu\text{m}$. Mostramos ele na figura 2.8. Na mesa inercial ele está acoplado a dois



Figura 2.8 – Sensor óptico modelo Keyence IL-S025, empregado na aquisição de dados experimentais.

estágios de deslocamento, cada um com 1 GDL. Dessa forma, sendo necessário, o sensor pode se movimentar na direção dos eixos x e z . Representamos essa montagem, sensor com estágios, na figura 2.9.

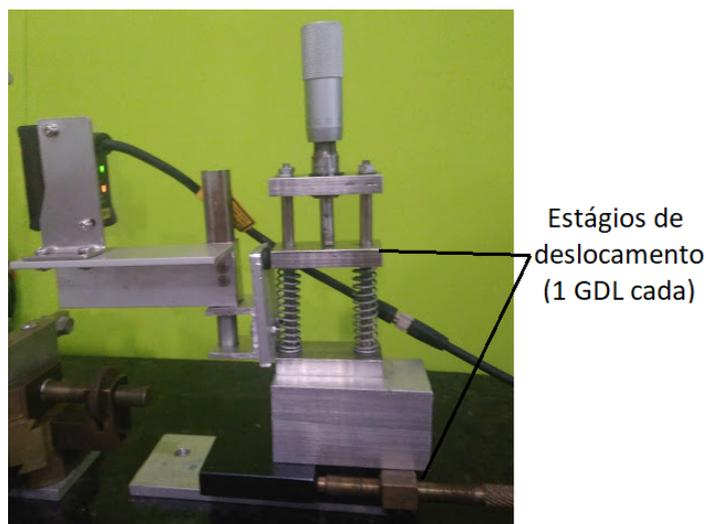


Figura 2.9 – Dois estágios de deslocamento, cada um com 1 GDL, acoplados ao sensor óptico, possibilitando o movimento do sensor nas direções dos eixos x e z .

Vale ressaltar que todos os subsistemas apresentados nesta seção estão sobre uma mesa de granito. Como apresentamos, alguns estão fixos diretamente nela e outros fixados em

estruturas que estão fixos nesta mesa. Além disso, utilizamos uma espuma de polietileno espessa abaixo da mesa de granito para atenuar as perturbações mecânicas externas durante os experimentos.

2.2 Aparato experimental eletro-eletrônico

Basicamente existem três aparatos eletro-eletrônicos que são indispensáveis para realização dos experimentos. A fonte de alimentação do sensor, o gerador de funções e osciloscópio.

O sensor óptico utilizado na detecção das oscilações dos ressonadores é um equipamento muito caro e funciona a uma tensão de 12V. Pensando nisso, dedicamos uma fonte de alimentação a ele para de evitar danos ao equipamento. A figura 2.10a representa essa fonte.

Como foi dito acima, a bobina gera um campo magnético variável no tempo quando alimentada por uma corrente elétrica alternada. Dessa forma, utilizamos o gerador de funções modelo Agilent 33500B para alimentá-la. Ele pode gerar sinais senoidais, quadrados e triangulares. Atinge uma amplitude de até 10,0 Vpp. Representamos o gerador de funções na figura 2.10b.

O sensor óptico apenas detecta e captura os dados das oscilações em um ponto da haste. A medida que essas informações são capturadas pelo sensor, elas vão sendo enviadas, em forma de sinal, a um osciloscópio que armazena, lê e traduz em gráficos esses dados. Na execução dos experimentos utilizamos o osciloscópio modelo Agilent DSO7104B para esses fins. Ele é capaz de armazenar até 500 segundos de dados com uma taxa de amostragem de até 4 GSa/s. Mostramos ele na figura 2.10c.

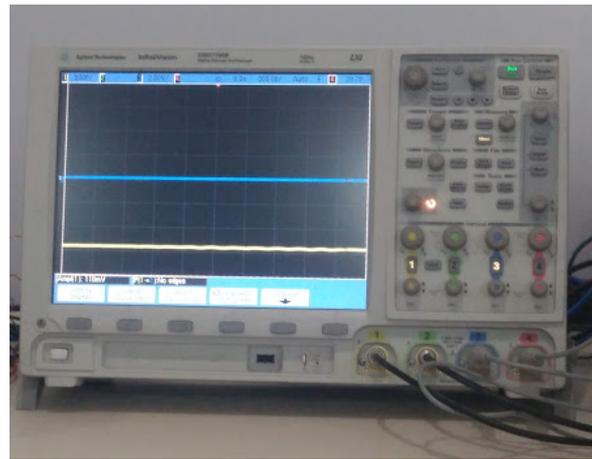
Representamos na figura 2.11 todo o aparato utilizado nos experimentos e o caminho que os dados percorrem. Trata-se de um desenho esquemático do estágio final de nossa bancada utilizada para avaliar o oscilador de Duffing quando ela encontra-se linear e não-linear. Com essa montagem foi possível realizar todos os experimentos. Em alguns ensaios utilizaremos uma parte dos aparatos e em outros todos, como veremos nos próximos



(a)



(b)



(c)

Figura 2.10 – (a) Fonte de alimentação dedicada ao sensor; (b) gerador de funções modelo Agilent 33500B, dedicado a alimentação do solenoide durante as análises experimentais realizadas na bancada; (c) osciloscópio modelo Agilent DSO7104B, empregado na aquisição de dados experimentais.

capítulos.

2.3 Comparação com mesa inercial proposta pelo Moon e Holmes

Existem algumas semelhanças da bancada que foi construída para esta dissertação e com a que foi proposta por Moon e Holmes. Assim como na mesa inercial proposta por Moon e Holmes, a desta dissertação tem como objetivo submeter hastes engastadas não-lineares a oscilações e modelar esta dinâmica vibracional baseada no oscilador de Duffing.

Da mesma forma que há semelhanças, também existem diferenças entre a bancada produzida para esta dissertação e a que foi proposta por Moon e Holmes. São elas:

1. Produção da não-linearidade: No experimento de Moon e Holmes, a não-linearidade do sistema é consequência da atração magnética entre a haste e os ímãs. Já na

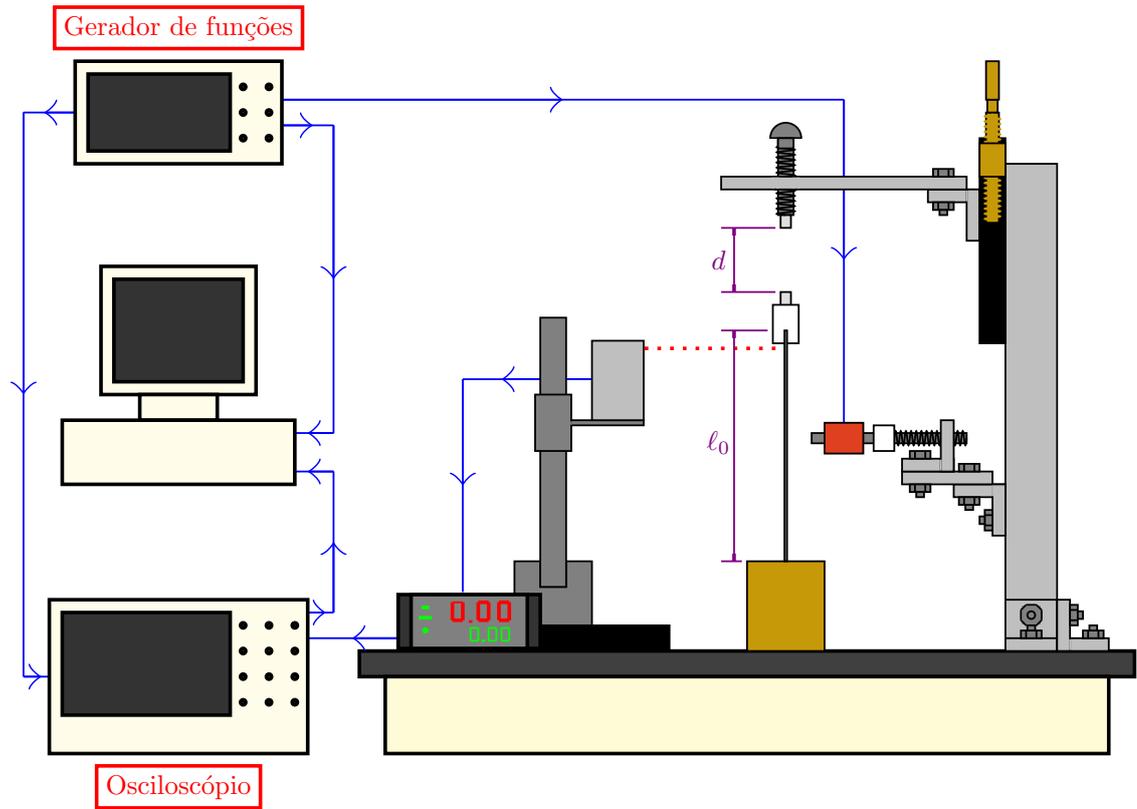


Figura 2.11 – Diagrama da montagem experimental da bancada inercial utilizada nesta dissertação, onde d é a distância entre os ímãs e l_0 é o comprimento livre da haste. Além disso, as linhas azuis representam o caminho que a informação percorre durante os experimentos.

bancada proposta nesta dissertação, a não-linearidade também é consequência da ação magnética, mas nesse caso, a ação magnética é do tipo repulsiva entre os polos de dois ímãs.

- Gerar dois poços estáveis no sistema através da atração magnética entre ressonador e ímãs, exigiria ímãs volumosos e com elevada magnetização. Também teríamos muitas dificuldades no que diz respeito ao alinhamento/calibração dos ressonadores em relação a estes ímãs. Além disso, a própria construção da bancada experimental seria um grande desafio. Esses problemas foram totalmente sanados ou ao menos tiveram seus efeitos minimizados, adotando o modelo proposta nesta dissertação, em que grande parte da não-linearidade do

sistema é uma consequência da força de repulsão magnética.

2. Excitação da haste: Na bancada do Moon e Holmes, a haste vibra em consequência da aplicação de uma força periódica em toda bancada experimental, resultando no movimento da mesa e conseqüentemente, da haste. Já na bancada desta dissertação, as oscilações decorrem da força magnética senoidal que o solenoide exerce sobre a haste.

- Provocar movimento em toda à bancada experimental, com o intuito de excitar apenas a haste, gera dificuldades na determinação da quantidade de energia que a haste realmente recebeu. Essa dificuldade de mensuração, é consequência das perdas energéticas para os demais componentes da bancada, causado pelos efeitos inerciais e viscosos. Contudo, essa situação pode ser simplificada utilizando uma bobina energizada por um gerador de funções. Como a haste é composta por aço ferrítico, o campo magnético gerado pela bobina é capaz de fazê-la oscilar.

A bancada desta dissertação foi construída a um custo muito baixo e o ressonador que foi ensaiado nela, proporcionou resultados compatíveis com as teorias que serão abordados nos próximos capítulos.

Análise Estática

Nesse capítulo estudamos a teoria da elasticidade estática desenvolvida por D. Bernoulli e L. Euler. Desenvolvemos as equações gerais para o equilíbrio estático de hastes delgadas sob a ação de tensões e torques externos. Em seguida, utilizando essas equações, estudamos a perda da estabilidade mecânica de uma haste engastada sujeita a uma força compressiva puramente axial. Em adição ao desenvolvimento da teoria de vigas de Euler-Bernoulli aqui apresentado, calculamos também o campo magnético gerado por um cilindro com magnetização uniforme e axialmente orientado. Depois disso, calculamos a força de repulsão magnética existente entre dois ímãs permanentes que estão próximos um do outro.

No caso aqui investigado, as forças estáticas externas atuando sobre a haste são de origem magnética. Isso porque fixamos na extremidade livre da haste um ímã cilíndrico com magnetização uniforme e axialmente orientada. Logo acima da haste posicionamos um ímã externo fixo que comprime a haste. Quando esse ímãs opostamente orientados se aproximam, a força de compressão aumenta até chegar ao ponto em que a haste flamba.

Na seção 3.1 desenvolvemos a equação proposta por Euler-Bernoulli para vigas estáticas engastadas, definiremos a sua resposta e a força crítica de deflexão (carga crítica de flambagem). Já na seção 3.2 apresentamos formulações matemáticas capazes de mensurar o campo e a força magnéticas gerada por ímãs permanentes. Por fim, na seção 3.3 explicamos os experimentos estáticos que foram realizados e apresentamos os resultados obtidos e os discutimos.

3.1 Modelo estático de Euler-Bernoulli para vigas

A teoria da viga de Euler-Bernoulli pode ser aplicado tanto em problemas estáticos, como também dinâmicos. Apesar de prático e dos resultados satisfatórios, muitas simplificações e hipóteses devem ser adotadas. Além disso, as condições corretas devem ser empregadas, caso contrário os resultados não estarão condizentes com a realidade. De acordo com Han e Giaretta [18, 19], para emprego desse modelo devemos adotar que,

1. existe um eixo na viga que nunca estará submetido a tração e compressão, conhecido como o eixo neutro;
2. não há cisalhamento quando a viga é flexionada;
3. o coeficiente de Poisson deve ser desconsiderado;
4. o material que compõe a viga deve obedecer a lei de Hooke;
5. a viga deve ter densidade constante ao longo de todo o seu comprimento.

A figura 3.1a retrata uma viga estável, linear e sem ação de forças externas. Já a figura 3.1b, trata-se da mesma viga representada na 3.1a, mas sob ação de uma força localizada, \vec{F}_m , na extremidade livre. Devido a essa força, a viga está defletida elasticamente.

Retirando um elemento infinitesimal qualquer da viga defletida mostrada na figura 3.1b, obtemos a figura 3.2. De acordo com esse modelo, durante a deflexão o cisalhamento e coeficiente de Poisson são desconsiderados, pois caso não o fossem, a área da secção transversal do elemento infinitesimal não seria constante em todo o seu comprimento, ℓ_0 . Sendo assim, a espessura da viga, τ , e sua largura, b , são constantes. Esse modelo também admite um eixo longitudinal na viga que não sofre tração nem compressão, conhecido como eixo neutro (filamento vermelha da figura 3.2). Além disso, como a viga deve obedecer a lei de Hooke e deve ter densidade, ρ_v , constante ao longo de todo o seu comprimento, admiti-se que o módulo de Young da viga, E , também é constante ao longo de todo o seu comprimento, ℓ_0 .

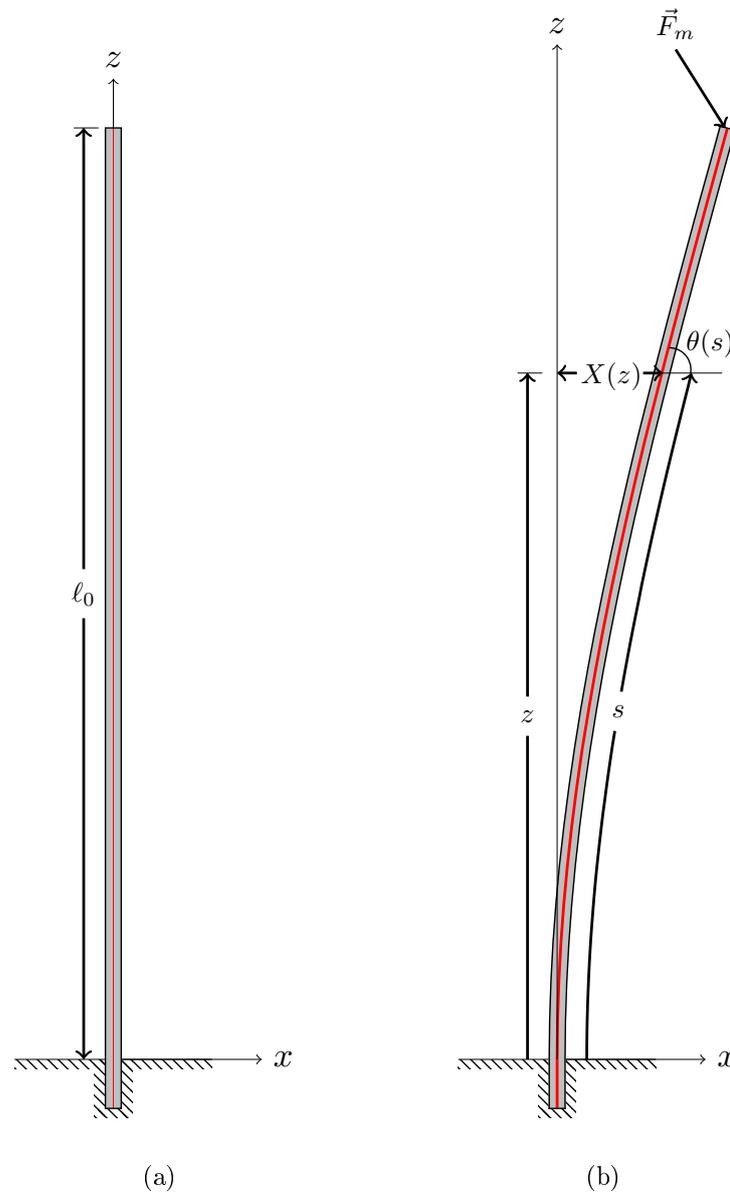


Figura 3.1 – (a) Viga engastada em uma de suas extremidades e livre na outra, com comprimento total l_0 ; (b) mesma viga da figura (a), porém defletida ao ser submetida à força \vec{F}_m .

Considere um filamentos de comprimento l_0 , largura b e espessura $\Delta\xi$. Podemos supor que uma viga de comprimento l_0 , largura b e espessura ξ , é o conjunto de n_f filamentos "colados", em que $\xi = n_f \Delta\xi$. Quando esta viga sofrer deflexão, parte desses filamentos alongam ou a outra parte é comprimida, como mostramos na figura 3.3. Os filamentos que alongam, sofrem ação de forças trativas, $\vec{f}(s, \xi) \Delta\xi$ e $\vec{f}(s + \Delta s, \xi) \Delta\xi$, e os que comprimem, sofrem ação de forças compressivas, $\vec{f}(s, \xi') \Delta\xi$ e $\vec{f}(s + \Delta s, \xi') \Delta\xi$, onde $\vec{f}(s, \xi)$ é uma

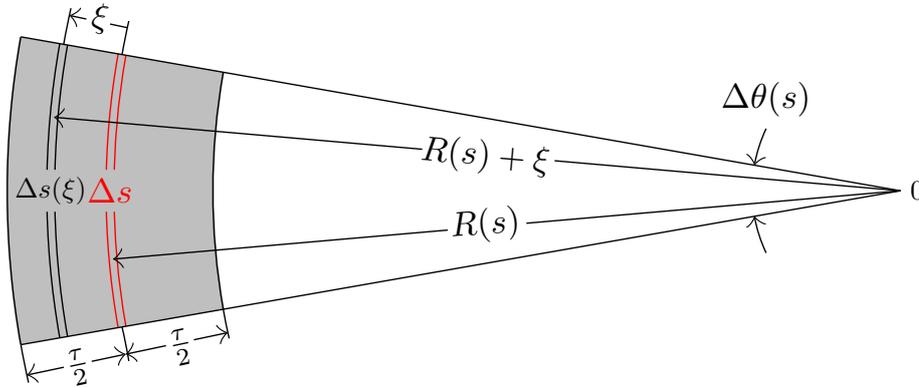


Figura 3.2 – Um elemento infinitesimal qualquer retirado da viga defletida mostrada na figura 3.1b, onde o segmento vermelho corresponde ao eixo neutro da viga, cujo comprimento é $\Delta s = R(s)\Delta\theta$ e o preto a um filamento a uma distância ξ do eixo neutro, cujo comprimento é $\Delta(\xi) = (R(s) + \xi)\Delta\theta$.

força interna por unidade de comprimento e surge assim que a viga sofre deflexão. De acordo com o modelo de Euler-Bernoulli, um desses filamentos não será alongado e nem comprimido, e é ele limitará qual região estará alongando e comprimindo. Considerando o elemento infinitesimal da figura 3.2, em que $-\frac{\tau}{2} \leq \xi \leq \frac{\tau}{2}$, todos os filamentos que estiverem localizados entre $0 \leq \xi \leq \frac{\tau}{2}$, sofrerão alongamento, enquanto os que estiverem entre $-\frac{\tau}{2} \leq \xi \leq 0$, serão comprimidos.

3.1.1 Equações do equilíbrio estático da viga

Sabendo que o elemento material da figura 3.2 está em equilíbrio estático, a soma das forças aplicadas neste elemento infinitesimal é nula. Dessa forma obtemos que [20]

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \vec{f}(s, \xi) d\xi - \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \vec{f}(s + \Delta s, \xi) d\xi + \vec{P}(s)\Delta s = 0,$$

onde $\vec{P}(s)$ é a força peso por unidade de comprimento ao longo do segmento Δs . No limite $\Delta s \rightarrow 0$, a expressão acima resultará em

$$\frac{d\vec{F}(s)}{ds} = \vec{P}(s), \quad (3.1.1)$$

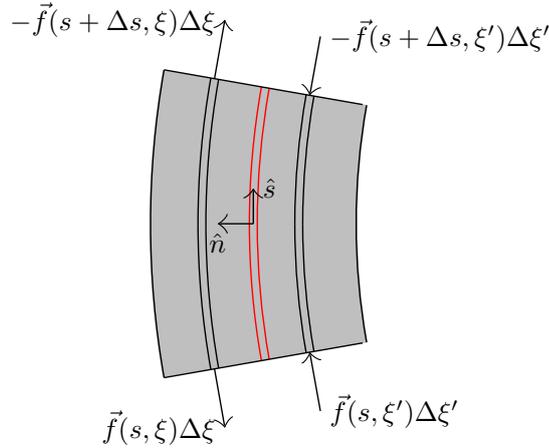


Figura 3.3 – Mesmo elemento infinitesimal da figura 3.2, porém agora representando as forças de tração e compressão que os filamentos do elemento infinitesimal estão sujeitos após a deflexão da viga. Mostramos também o vetores normal, \hat{n} , e tangente, \hat{s} , ao eixo neutro.

onde $\vec{F}(s) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \vec{f}(s, \xi) d\xi$ e corresponde à força interna total através da seção transversal da viga. Mais precisamente, $\vec{F}(s)$ é a força que a parte inferior da haste ($< s$) exerce sobre a parte superior ($> s$).

Considerando o equilíbrio provocado pelos torques que atuam no elemento, encontramos que [20]

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \left(-\frac{\Delta s}{2} \hat{s}(s) + \xi \hat{n}(s) \right) \times \vec{f}(s, \xi) d\xi + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \left(\frac{\Delta s}{2} \hat{s}(s + \Delta s) + \xi \hat{n}(s + \Delta s) \right) \times (-\vec{f}(s + \Delta s, \xi) d\xi) = 0,$$

onde \hat{s} e \hat{n} são, respectivamente, os vetores unitários nas direções tangente e normal ao segmento s , onde $\hat{s} \cdot \hat{n} = 0$. Reagrupando os termos expressão acima, encontramos

$$\frac{\hat{s}(s) \times \vec{F}(s) + \hat{s}(s + \Delta s) \times \vec{F}(s + \Delta s)}{2} \Delta s + \hat{n}(s) \times \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \xi \vec{f}(s, \xi) d\xi - \hat{n}(s + \Delta s) \times \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \xi \vec{f}(s + \Delta s, \xi) d\xi = 0.$$

Negligenciando os termos de ordem superior a Δs , a expressão acima pode ser reescrita como,

$$-\hat{s}(s) \times \vec{F}(s) \Delta s + \vec{M}(s) - \vec{M}(s + \Delta s) = 0,$$

onde,

$$\vec{M}(s) = \hat{n}(s) \times \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \xi \vec{f}(s, \xi) d\xi. \quad (3.1.2)$$

e corresponde ao torque total da seção transversal da viga. Tomando o limite dessa expressão em $\Delta s \rightarrow 0$, encontramos

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} = -\hat{s}(s) \times \vec{F}(s) = -F_n(s) \hat{s}(s) \times \hat{n}(s), \quad (3.1.3)$$

onde $\vec{F}(s) = F_s \hat{s}(s) + F_n \hat{n}(s)$.

As equações (3.1.1) e (3.1.3), correspondem as equações fundamentais do equilíbrio de uma viga defletida.

De acordo com o modelo de Euler-Bernoulli, a força por unidade de comprimento em um seção transversal da viga sob flexão pura é dada por,

$$\vec{f}(s, \xi) = f_\sigma + Eb\xi \frac{d\theta(s)}{ds} \hat{s}(s), \quad (3.1.4)$$

onde E é o módulo de Young da viga, $\theta(s)$ é o ângulo de deflexão horizontal e f_σ é a força de tração ou compressão aplicada nas extremidades da viga, que para o caso em questão será zero, pois não há nenhuma força de corpo sendo considerada. Substituindo a equação (3.1.4) na equação (3.1.2), encontramos

$$\vec{M}(s) = \hat{n}(s) \times \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \xi Eb\xi \frac{d\theta(s)}{ds} \hat{s}(s) d\xi.$$

Como E e b são constantes ao longo de todo comprimento da viga, como foi descrito acima, a expressão acima resultará em,

$$\vec{M}(s) = Eb \frac{d\theta(s)}{ds} \hat{n}(s) \times \hat{s}(s) \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \xi^2 d\xi = EI \frac{d\theta(s)}{ds} \hat{n}(s) \times \hat{s}(s),$$

onde,

$$I = \frac{b\tau^3}{12} \quad (3.1.5)$$

e corresponde ao momento inércia de área da viga. Tomando o diferencial em relação a s da expressão acima, achamos

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} = EI \frac{d^2\theta(s)}{ds^2} \hat{n}(s) \times \hat{s}(s),$$

Substituindo esse resultado na equação (3.1.3), obtemos

$$EI \frac{d^2\theta(s)}{ds^2} \hat{n}(s) \times \hat{s}(s) = -F_n(s) \hat{s}(s) \times \hat{n}(s).$$

Como o modelo admite apenas pequenas deflexões, é possível assumir que esse "dobramento" seja plano e sendo assim, $\hat{n}(s)$ e $\hat{s}(s)$, estão no mesmo plano. Dessa forma, $\hat{n}(s) \times \hat{s}(s)$, resultará em um vetor constante e $\hat{n}(s) \cdot \hat{s}(s) = 0$. De acordo com essa consideração, a expressão acima será

$$EI \frac{d^2\theta(s)}{ds^2} = -F_n(s) = -\vec{F}(s) \cdot \hat{n}(s). \quad (3.1.6)$$

Nessa situação específica, $\vec{P}(s) = 0$ e dessa forma, pela equação (3.1.1), $\vec{F}(s)$ é constante ao longo do comprimento da viga. Sabendo que θ é o ângulo formado entre as superfícies s e $s + \Delta s$, os vetores unitários, $\hat{s}(s)$ e $\hat{n}(s)$, podem ser escritos como $\hat{s}(s) = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{k}$ e $\hat{n}(s) = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{k}$. Logo,

$$-\vec{F}(s) \cdot \hat{n}(s) = -F_x \sin\theta + F_z \cos\theta,$$

onde F_x e F_z , são, respectivamente, os módulos da força $\vec{F}(s)$ na direção x e z . Substituindo esse resultado na equação (3.1.6), definimos que

$$EI\theta''(s) = -F_x \sin\theta + F_z \cos\theta, \quad (3.1.7)$$

onde $\theta''(s) = \frac{d^2\theta(s)}{ds^2}$

A equação (3.1.7) corresponde a equação que descreve o modelo de Euler-Bernoulli para uma viga estática sujeita a uma força qualquer.

3.1.2 Viga engastada sujeita a uma força puramente axial

Como a estabilidade da viga está orientada no eixo vertical, \vec{F}_m é uma força puramente compressiva, ou seja, $F_x = 0$ e $F_z = \vec{F}_m = -F_m \hat{k}$. Além disso, $\theta(s)$ é um ângulo orientado em relação ao eixo horizontal, como mostramos em 3.1b, e a estabilidade diz respeito apenas ao ângulo vertical $\varphi(s)$. Substituindo a variável $\theta(s)$ por $\varphi(s)$, considerando a relação $\varphi(s) = 90 - \theta(s)$, sabendo que esse modelo admite apenas pequenas deflexões

($\text{sen}\varphi \approx \varphi$) e que $F_x = 0$, a equação (3.1.7) resultará em,

$$\varphi''(s) + K^2\varphi(s) = 0, \quad (3.1.8)$$

onde $K^2 = \frac{F_m}{EI}$, que tem como solução geral,

$$\varphi(s) = A\cos(Ks) + B\text{sen}(Ks). \quad (3.1.9)$$

De acordo com a figura 3.1b, na extremidade engastada da viga, $s = 0$, não há deflexão e dessa forma, não $\varphi(0) = 0$. Substituindo esta condição de contorno na equação (3.1.9), definimos que $A = 0$. Além disso, na extremidade livre da viga, $s = \ell_0$, $\varphi'(\ell_0) = 0$, e dessa forma a equação (3.1.9) resultará em,

$$B\cos(K\ell_0) = 0.$$

Se $B = 0$, $\varphi(s) = 0$ e essa será a solução trivial do problema que deve ser empregada sempre que a viga estiver reta (estável). Segundo essa mesma abordagem, quando a viga estiver defletida (instável), obrigatoriamente, $B \neq 0$. Isso só é possível se

$$\cos(K\ell_0) = 0, \quad (3.1.10)$$

que é a equação característica desse problema. Logo, quando a viga estiver defletida,

$$\varphi(s) = B\text{sen}(Ks). \quad (3.1.11)$$

Portanto,

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & \text{se a viga estiver reta e} \\ B\text{sen}(Ks), & \text{se a viga estiver defletida,} \end{cases}$$

onde $\cos(K\ell_0) = 0$, sempre que a viga estiver defletida. Vale ressaltar que B é uma variável que não pode ser determinada analiticamente, pois esse é um problema de autovalor e autofunção.

3.1.3 Estabilidade de uma viga engastada

De acordo com equação (3.1.10), a viga estará defletida sempre que $\cos(K\ell_0) = 0$.

Além disso, sabemos que $\cos\left(n_c \frac{\pi}{2}\right) = 0$, para $n_c = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$. Sendo assim,

$$\cos(K\ell_0) = \cos\left(n_c \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow K\ell_0 = n_c \frac{\pi}{2}.$$

Substituindo o resultado de K e isolando F_m , encontramos,

$$F_m = \frac{n_c^2 \pi^2 EI}{4\ell_0^2},$$

Quando $n_c = 1$, $F_m = F_{cr}$ e F_{cr} será,

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell_0^2}, \quad (3.1.12)$$

onde F_{cr} corresponde ao menor valor que a uma força puramente axial pontual pode assumir para satisfazer a equação (3.1.10), ou seja, a menor força necessária para flambar a viga. F_{cr} é comumente conhecido como carga crítica de flambagem.

De acordo com a equação (3.1.12), e com o fato de que a viga só estará defletida caso $\cos(K\ell_0) = 0$, se: $|\vec{F}_m| < F_{cr}$, $\cos(K\ell_0) \neq 0$ e a equação (3.1.9) terá solução trivial (viga sem deflexão-estável); $|\vec{F}_m| \geq F_{cr}$, $\cos(K\ell_0) = 0$ e a equação (3.1.9) terá como solução particular a equação (3.1.11) (viga defletida-instável). Além disso, esse modelo idealiza a viga. Considerando situações reais (viga com imperfeições geométricas, impurezas no material que a compõe, dentre outros), a menor força que faz a viga flambar sempre será maior do que F_{cr} .

Calculamos o momento inércia de área, I e a força crítica de flambagem da haste ensaiadas e representamos esses resultados na tabela 1.

Tabela 1 – Força crítica de flambagem, F_{cr} , da haste ensaiada com $E \approx 220$ GPa e $I \approx 1.912 \times 10^{-14} \text{m}^{-4}$.

Estimativas teóricas das forças críticas de flambagem					
Comprimento livre, ℓ_0 (mm)	91.90	92.50	93.30	94.10	95.80
Força crítica, F_{cr} (N)	1.229	1.213	1.193	1.172	1.131

3.2 Ímãs permanentes

De modo geral, ímãs convencionais possuem dois polos. Em um deles as linhas de campo magnético saem (polo norte) e no outro entram (polo sul) [21]. Ímã é toda matéria

que ao ser magnetizada é capaz de gerar um campo magnético [22]. A figura 3.4 representa o campo magnético de uma barra uniformemente magnetizada.

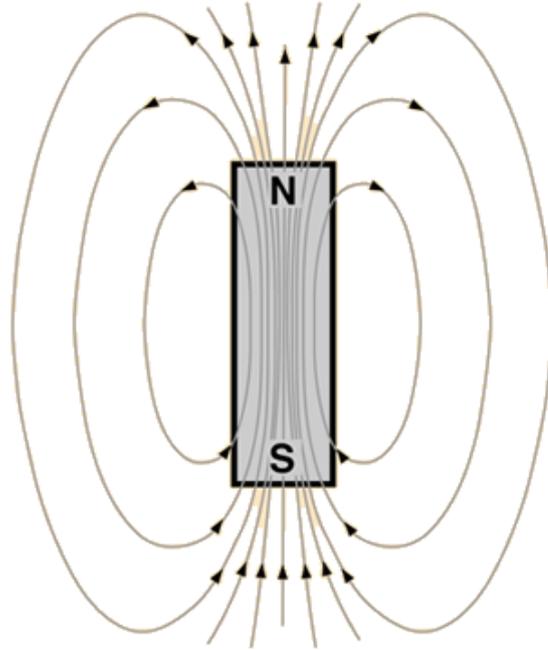


Figura 3.4 – Representação do campo magnético gerado por uma barra cilíndrica uniformemente magnetizada na direção axial. Fonte: <https://tex.stackexchange.com/questions/468225/pstricks-magnetic-field-lines-of-a-bar-magnet/470755>

Quando submetemos algumas substâncias a um campo magnético externo, após cessado esse campo, essas substâncias mantêm-se magnetizadas. Elas são classificadas como ferromagnéticas e dão origem aos ímãs permanentes [22]. Substâncias como ferro, níquel e cobalto puro, gadolínio, disprosio, entre outros, são classificadas como ferromagnéticos [23]. Resumidamente, quando uma substância ferromagnética é submetida a ação de um campo magnético forte, os domínios dessas substâncias, que tinham orientações aleatórias e desalinhadas, tornam-se alinhados. Ao cessar esse campo forte, muitos desses domínios retornam a suas posições originais, porém outros mantêm-se alinhados, o que torna a substância magnetizada e gerando os ímãs permanentes [22].

Apesar dos grandes avanços nessa área científica, as análises desses problemas são bem complexas e, muitas vezes, não são totalmente compreendidos. Contudo, é necessário o emprego de simplificações, o que pode gerar resultados aproximados, porém úteis.

3.2.1 Campo magnético de um ímã cilíndrico

Segundo Greiner [24], o campo magnético gerado por um dipolo magnético é dado por

$$B_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{[3(\vec{M}_0 \cdot \hat{r})\hat{r}] - \vec{M}_0}{|\vec{r}|^3} \right\}, \quad (3.2.13)$$

onde $B_0(\vec{r})$ é o campo magnético em um ponto localizado a uma distância $\vec{r}(x, y, z)$ do centro de massa do dipolo, \hat{r} é o vetor unitário de $\vec{r}(x, y, z)$, μ_0 é a constante magnética do meio e $\vec{M}_0(\vec{r})$ é o vetor magnetização.

Considere um dipolo magnético dipolo cilíndrico de comprimento ℓ_m e raio a . De acordo com a equação (3.2.13), o campo magnético que este dipolo gera no ponto \mathbf{P} da figura 3.5, é dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{-\frac{\ell_m}{2}}^{\frac{\ell_m}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a B_0(\vec{r}) \rho_i d\rho_i d\phi_i dz',$$

que pode ser reescrita como,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 a^2}{4} \int_{-\frac{\ell_m}{2}}^{\frac{\ell_m}{2}} \frac{1}{|\vec{r} - z'\hat{k}|^3} \left[3 \left(\vec{M}_0 \cdot \frac{\vec{r} - z'\hat{k}}{|\vec{r} - z'\hat{k}|} \right) \frac{\vec{r} - z'\hat{k}}{|\vec{r} - z'\hat{k}|} - \vec{M}_0 \right] dz'. \quad (3.2.14)$$

Como este dipolo é cilíndrico, o vetor distância, $\vec{r}(x, y, z)$, pode ser escrito como $\vec{r}(\vec{\rho}, z) = \vec{\rho}\hat{\rho} + z\hat{k}$. Além disso, sua magnetização é uniforme e orientada axialmente, ou seja, $\vec{M}_0 = M_0\hat{k}$. Sendo assim, a equação (3.2.14) resultará em

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 a^2}{4} \int_{-\frac{\ell_m}{2}}^{\frac{\ell_m}{2}} \left\{ 3M_0 \frac{(z - z')(\vec{r} - z'\hat{k})}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{M_0}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} dz' \\ &= \frac{M_0 \mu_0 a^2}{4} \left\{ 3\vec{\rho}\hat{\rho} \int_{-\frac{\ell_m}{2}}^{\frac{\ell_m}{2}} \frac{(z - z')}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{5}{2}}} dz' + 3\hat{k} \int_{-\frac{\ell_m}{2}}^{\frac{\ell_m}{2}} \frac{(z - z')^2}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{5}{2}}} dz' - \right. \\ &\quad \left. - \hat{k} \int_{-\frac{\ell_m}{2}}^{\frac{\ell_m}{2}} \frac{1}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} dz' \right\}. \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais da expressão acima, encontramos que

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 a^2 M_0}{4} \left\{ \frac{\vec{\rho}\hat{\rho} + (z - \frac{\ell_m}{2})\hat{k}}{[\rho^2 + (z - \frac{\ell_m}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\vec{\rho}\hat{\rho} + (z + \frac{\ell_m}{2})\hat{k}}{[\rho^2 + (z + \frac{\ell_m}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 a^2 M_0}{4} \left(\frac{\vec{r} - \frac{\ell_m}{2}\hat{k}}{|\vec{r} - \frac{\ell_m}{2}\hat{k}|^3} - \frac{\vec{r} + \frac{\ell_m}{2}\hat{k}}{|\vec{r} + \frac{\ell_m}{2}\hat{k}|^3} \right). \quad (3.2.15) \end{aligned}$$

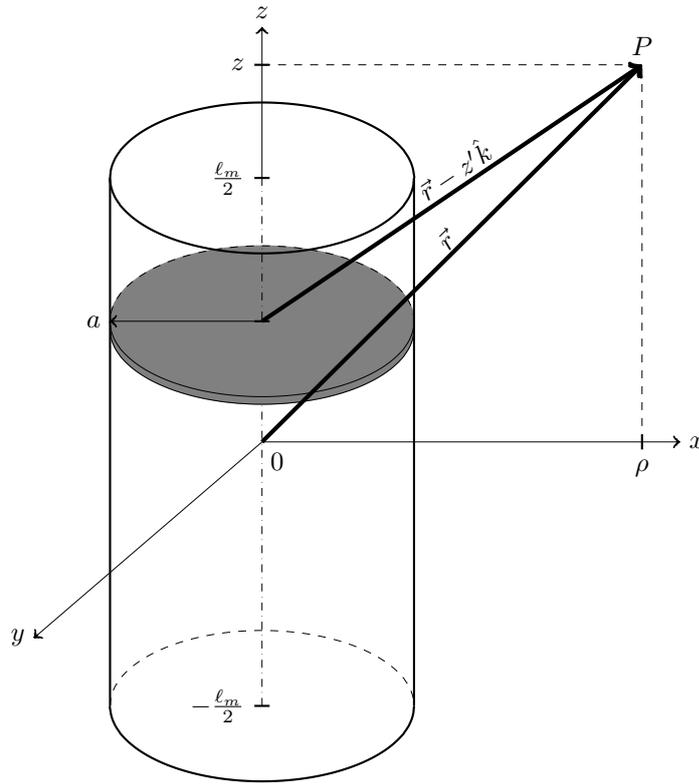


Figura 3.5 – Ímã com formato de barra cilíndrica de comprimento ℓ_m , raio a e magnetização uniforme $\vec{M}_0 = M_0 \hat{k}$, em que o centro de massa está a uma distância $|\vec{r}(\vec{\rho}, z)|$ de um ponto espacial qualquer \mathbf{P} .

A equação (3.2.15) representa o campo magnético em ponto \mathbf{P} qualquer no espaço, gerado por um dipolo cilíndrico magnético uniformemente magnetizado, a uma distância $|\vec{r}(\vec{\rho}, z)|$ deste ponto. O gráfico da figura 3.6 representa a variação de $\frac{\vec{B}}{\mu_0 M_0 a^2}$ em relação a $\frac{z}{\ell_m}$, ao longo do eixo z .

3.2.2 Força de repulsão magnética entre dois ímãs cilíndricos

De acordo com Jackson [25], a força magnética que um ímã cilíndrico exerce sobre outro idêntico a si, quando posicionados um sobre o outro, é

$$\vec{F}_m(\vec{r}) = \oint_S (\vec{M}_0(\vec{r}) \cdot \hat{n}) \vec{B}_e(\vec{r}) dA \quad (3.2.16)$$

onde $B_e(\vec{r})$ é campo magnético que um ímã exerce no outro, desconsiderando a ação do campo magnético do ímã analisado, e \hat{n} é o vetor normal para fora da superfície. Para ímãs com a magnetização orientada apenas na direção axial, $\vec{M}_0 = M_0 \hat{k}$, a equação (3.2.16)

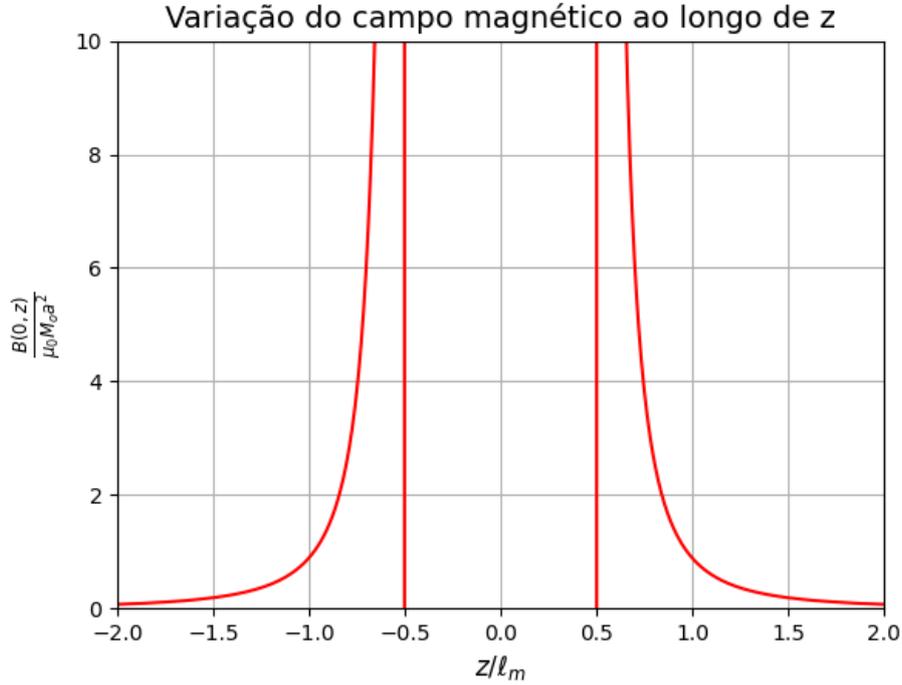


Figura 3.6 – Variação de $\frac{\vec{B}}{\mu_0 M_0 a^2}$ em relação a $\frac{z}{\ell_m}$, ao longo do eixo z .

resulta em

$$\vec{F}_m = M_0 \left[\int_S \vec{B}_e(\vec{r}) dA \right]_{sup} - M_0 \left[\int_S \vec{B}_e(\vec{r}) dA \right]_{inf}. \quad (3.2.17)$$

em que os sufixos *sup* e *inf*, correspondem, respectivamente, a superfície superior do ímã inferior e inferior do ímã superior, como representamos na figura 3.7. Sabendo que estes ímãs possuem as mesmas características geométricas do dipolo avaliado na subseção anterior, a força magnética, \vec{F}_m , é

$$\vec{F}_m(\vec{r}) = M_0 \left[\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \vec{B}_e(\vec{r}) d\phi_B \right) \rho d\rho \right]_{sup} - M_0 \left[\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \vec{B}_e(\vec{r}) d\phi_B \right) \rho d\rho \right]_{inf},$$

onde $\vec{B}_e(\vec{r})$ é a equação (3.2.15). Resolvendo as integrais da expressão acima, com $\vec{r}(\vec{\rho}, z) = \vec{\rho}\hat{\rho} + z\hat{k}$, encontramos

$$\vec{F}_m(z_+, z_-) = \frac{\pi\mu_0 a^2 M_0^2}{2} \left[\left(\frac{z_+}{\sqrt{a^2 + z_+^2}} - \frac{z_-}{\sqrt{a^2 + z_-^2}} \right)_{sup} - \left(\frac{z_+}{\sqrt{a^2 + z_+^2}} - \frac{z_-}{\sqrt{a^2 + z_-^2}} \right)_{inf} \right] \hat{k}.$$

onde $z_- = z - \frac{\ell_m}{2}$ e $z_+ = z + \frac{\ell_m}{2}$. Além disso, de acordo com a figura 3.7, para a superfície inferior $z = z_0$, logo $z_+ = z_0 + \frac{\ell_m}{2}$ e $z_- = z_0 - \frac{\ell_m}{2}$. Já para a superfície superior $z = z_0 + \ell_m$,

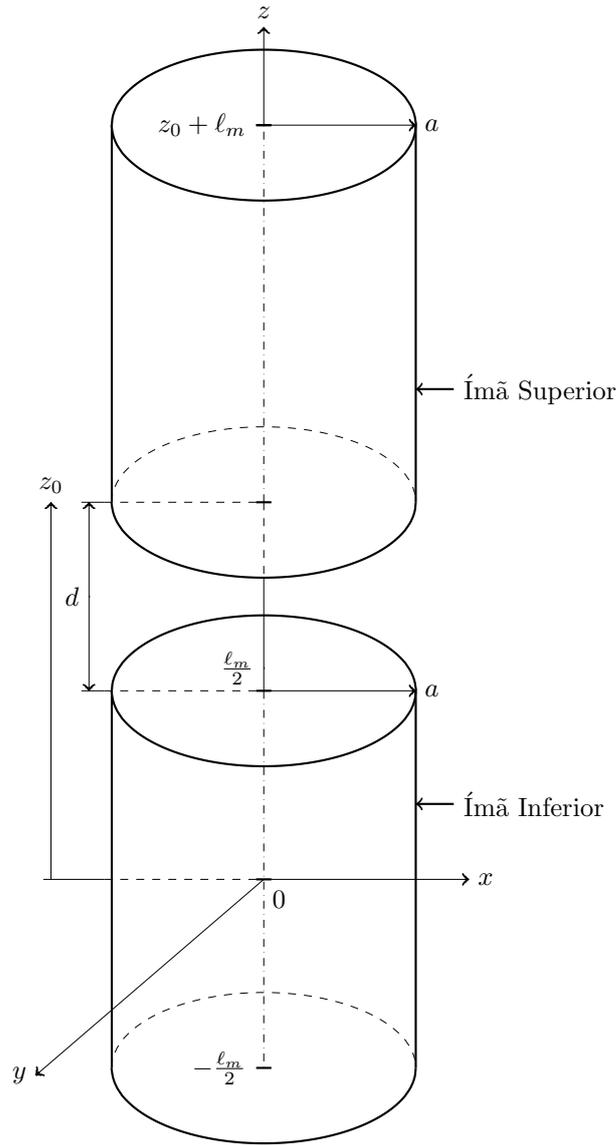


Figura 3.7 – Representação de dois ímãs cilíndrico geometricamente idênticos, cada um com comprimento ℓ_m e raio a , com seus eixos longitudinais alinhados e dispostos um sobre o outro, de forma que a superfície superior do ímã inferior e a superfície inferior do ímã superior estão separados por uma distância d .

logo $z_+ = z_0 + \frac{3}{2}\ell_m$ e $z_- = z_0 + \frac{\ell_m}{2}$. Com $\lambda_m = \frac{\pi\mu_0 a^2 M_0^2}{2}$, obtemos

$$\vec{F}_m(z_0) = \lambda_m \left[\frac{z_0 + \frac{3}{2}\ell_m}{\sqrt{a^2 + (z_0 + \frac{3}{2}\ell_m)^2}} + \frac{z_0 - \frac{\ell_m}{2}}{\sqrt{a^2 + (z_0 - \frac{\ell_m}{2})^2}} - \frac{2z_0 + \ell_m}{\sqrt{a^2 + (z_0 + \frac{\ell_m}{2})^2}} \right] \hat{k}.$$

Ainda de acordo com a figura 3.7, as superfícies estão separadas por uma distância, d , que obedece a relação $z_0 = d + \frac{\ell_m}{2}$. Portanto, a expressão acima resultará em,

$$\vec{F}_m(d) = \lambda_m \left[\frac{d + 2\ell_m}{\sqrt{a^2 + (d + 2\ell_m)^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} - 2 \frac{d + \ell_m}{\sqrt{a^2 + (d + \ell_m)^2}} \right] \hat{k}. \quad (3.2.18)$$

A equação (3.2.18) representa variação da força magnética repulsiva existente entre dois ímãs cilíndricos permanentes e magnetizados axialmente, quando o eixo longitudinal de cada estão alinhados e estão separados por uma distância d entre as superfícies que se repelem. O gráfico da figura 3.8 representa a variação de $\frac{|\vec{F}_m|}{\lambda_m}$ em relação a $\frac{d}{\ell_m}$ para $\frac{a}{\ell_m} = \frac{98}{195}$.

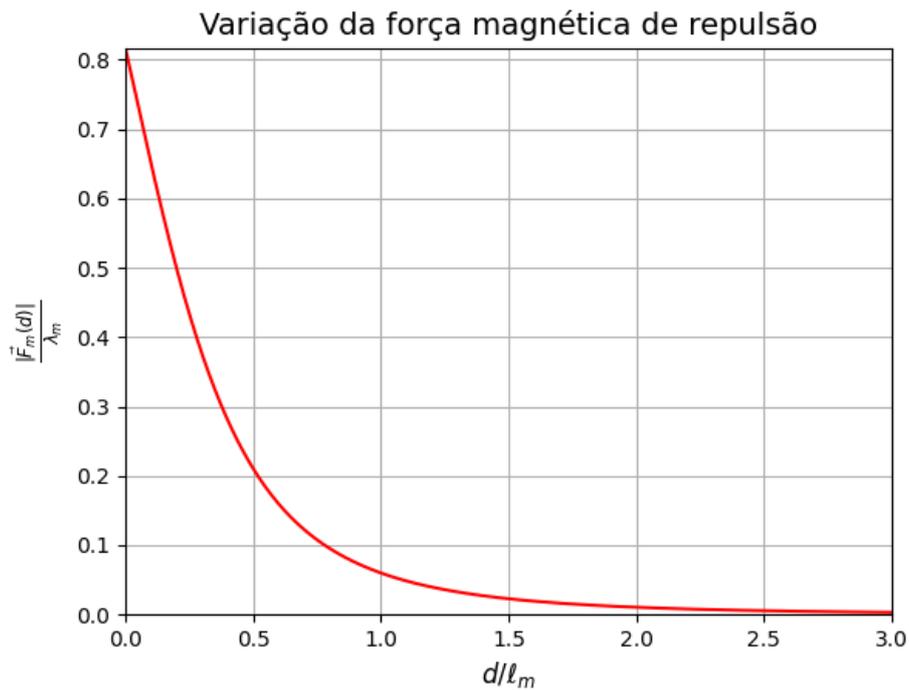


Figura 3.8 – Variação de $\frac{|\vec{F}_m|}{\lambda_m}$ em relação a $\frac{d}{\ell_m}$, quando $\frac{a}{\ell_m} = \frac{98}{195}$.

3.3 Experimentos estáticos, resultados e discussão

Nas seções anteriores foram apresentadas formulações matemáticas capazes de modelar a haste engastada em condições estáticas. Agora explicaremos os experimentos estáticos que foram realizados na haste apresentada no capítulo anterior. Também apresentaremos os resultados obtidos e os discutimos.

3.3.1 Distância mínima de flambagem

Considerando a figura 2.6, neste experimento achamos o valor da distância mínima que deve existir entre as superfícies dos ímãs de neodímio para que a haste engastada

flambe, d_1 . Em sua execução foi necessário utilizar apenas o sensor óptico. Para definir d realizamos os seguintes passos:

1. A haste foi engasta na base e alinhada em relação ao ímã superior de neodímio;
2. Em seguida reduzimos lentamente a distância entre os ímãs, d , utilizando o estágio de deslocamento acoplado ao suporte que sustenta o eixo rosqueado com o ímã de neodímio;
3. No momento em que a haste defletiu e formou os dois poços, como representamos nas figuras 2.7a e 2.7b, medimos a distância $d = d_1$.

3.3.2 Deflexão máxima de cada poço

Como explicado no capítulo 2, após flambada, a haste formará dois poços no sistema, sendo um mais próximo da bobina e outro mais distante dela. Com este experimento encontramos a deflexão máxima de cada poço a medida que reduzimos a distância d após a flambagem da haste. Para executá-lo utilizamos apenas o sensor óptico. Realizamos o seguinte procedimento:

1. A haste foi engasta na base de engaste e alinhada em relação ao ímã superior de neodímio;
 - A distância entre os ímãs, d , deve ser grande o suficiente para que não haja nenhum tipo de interação entre eles.
2. Então calibramos o sensor óptico em relação haste no comprimento $z \approx \ell_0$, de forma que no leitor do sensor estava marcando a posição "0,00";
3. Em seguida reduzimos lentamente a distância entre os ímãs até que $d = d_1$;
 - Em $d = d_1$, a haste sofre deflexão e forma dois poços;
4. Posicionamos a extremidade livre da haste em um dos poços, aguardamos o seu repouso e medimos sua deflexão máxima com o auxílio do sensor óptico;

5. Na sequência deslocamos novamente a extremidade livre da haste para o outro poço, aguardamos o seu repouso e medimos sua deflexão máxima com o auxílio do sensor óptico;
6. Então reduzimos um pouco mais a distância entre as superfícies dos ímãs, d , posicionamos novamente a haste em um dos poços, aguardamos o seu repouso e novamente medimos a deflexão máxima;
7. Deslocamos a haste para o outro poço, aguardamos o seu repouso e medimos a deflexão máxima neste outro poço;
8. Executamos sucessivamente o passo 4 e 5 até "mapear" a deflexão de cada poço em função da distância d existente entre as superfícies dos ímãs.

3.3.3 Resultados e discussão

Na tabela 2 representamos os resultados que obtivemos medindo a distância mínima de flambagem. Na figura 3.9 estimamos a razão $\frac{|F_m|}{\lambda_m}$ baseado nos resultados obtidos apresentados na tabela 2. Utilizamos um paquímetro com precisão de 0.05 mm para realizar estas medidas.

Tabela 2 – Valore medidos experimentalmente das distâncias mínimas de flambagem para vários comprimento livre da haste.

Distâncias mínimas de flambagem experimentais					
Comprimento livre, ℓ_0 (mm)	91.90	92.50	93.30	94.10	95.80
Distância de flambagem, d_1 (mm)	10.10	10.15	10.25	10.35	10.50
Erro de medição (mm)	± 0.05				

Utilizando os resultados da distância mínima de flambagem, estimamos a magnetização dos ímãs de neodímio, M_0 , através da equação (3.2.18) e com as estimativas das forças críticas de flambagem para cada comprimento livre, apresentados na tabela 1. Representamos os resultados obtidos na tabela 3. Estimamos que a magnetização deles está em torno de 684 ± 1 kA/m.

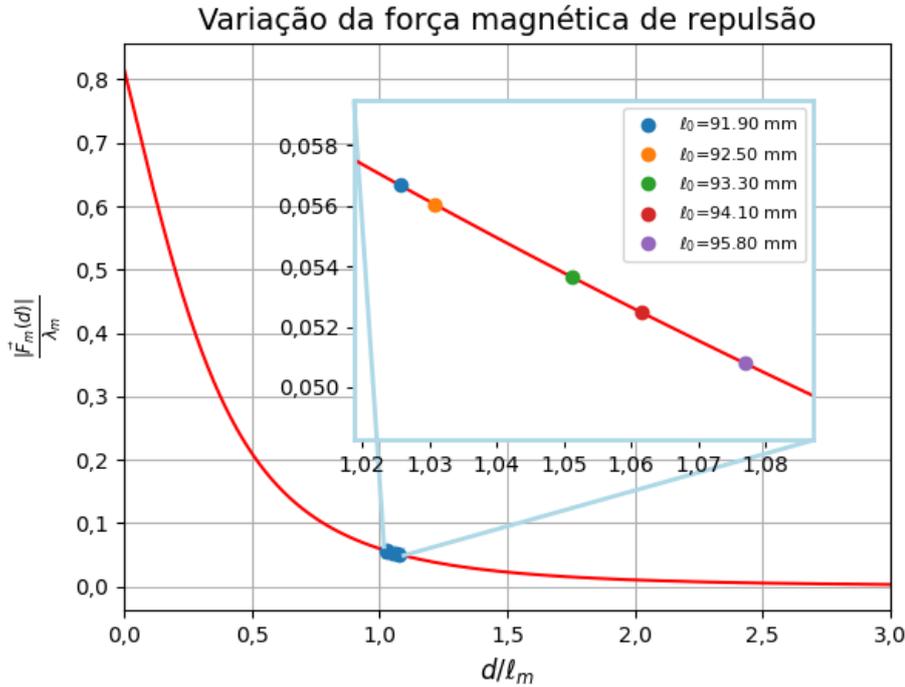


Figura 3.9 – Variação de $\frac{|F_m|}{\lambda_m}$ em relação a $\frac{d}{\ell_m}$, quando $\frac{a}{\ell_m} = \frac{98}{195}$.

Tabela 3 – Estimativa teórica da magnetização dos ímãs de neodímio medida baseada nos resultados obtidos da distância mínima de flambagem para cada comprimento livre da haste.

Estimativa teórica das magnetizações					
Comprimento livre, ℓ_0 (mm)	91.90	92.50	93.30	94.10	95.80
Estimativa da magnetização, M_0 (kA/m)	684	683	685	686	685
Valor médio da magnetização, M_0 (kA/m)	684 ± 1				

Além de encontrarmos a distância mínima de flambagem, d_1 , e estimar a magnetização dos ímãs de neodímio, M_0 , também encontramos a deflexão máxima de cada poço a medida que reduzimos a distância entre os ímãs, d , para a haste com comprimento livre de $\ell_0=93.30$ mm. Representamos estes resultados na tabela 4, onde x_+ é a deflexão máxima no poço mais distante da bobina e x_- a deflexão máxima no poço mais próximo da bobina. Estes resultados serão fundamentais na caracterização do oscilados de Duffing. Percebemos que nesta análise, dificilmente conseguimos obter as mesmas deflexões máximas ao migrar a extremidade livre da haste de um poço para o outro. Isso é um consequência da

histerese existente na ação magnética e de imperfeições geométricas presentes na haste. Estas distorções nunca eram maior do que ± 0.05 mm. Do ponto de visto macroscópico, é um desvio irrisório. Se tratando de sistemas dinâmicos não-lineares, este pequeno desvio pode alterar totalmente a resposta do sistema, como veremos mais a frente.

Tabela 4 – Deflexão máxima de cada poço com $\ell_0=93.30$ mm medida experimentalmente.

Deflexões máximas com $\ell_0=93.30$ mm		
d (mm)	x_+ (mm)	$-x_-$ (mm)
10.25	1.06 ± 0.05	1.13 ± 0.05
10.12	1.46 ± 0.05	1.64 ± 0.05
10.00	1.76 ± 0.05	1.94 ± 0.05
9.87	2.19 ± 0.05	2.25 ± 0.05
9.75	2.41 ± 0.05	2.50 ± 0.05
9.62	2.60 ± 0.05	2.72 ± 0.05
9.50	2.81 ± 0.05	2.97 ± 0.05
9.37	2.96 ± 0.05	3.14 ± 0.05
9.25	3.12 ± 0.05	3.33 ± 0.05

Capítulo 4

Análise Dinâmica

Neste capítulo desenvolvemos a teoria dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli. Assim como o modelo estático que eles propuseram, este apresenta bons resultados que são condizentes com a realidade. Todas as condições e hipóteses que foram apresentadas no capítulo anterior devem ser respeitadas.

Baseado neste modelo dinâmico, estudamos os modos normais de vibração de uma viga engastada. Definimos conceitos importantes da aproximação de 1 grau de liberdade para a dinâmica de vigas engastadas como a massa e constante elástica efetivas. Além disso, partindo deste modelo dinâmico, encontramos a equação que descreve as vibrações não lineares não amortecida de uma viga e a equação do oscilador de Duffing.

Na seção 4.1 encontramos a energia potencial elástica de deformação e cinética de um segmento de viga em movimento. Já na seção 4.2 desenvolvemos a equação dinâmica de Euler-Bernoulli para vigas engastadas. Na seção 4.3 achamos os modos normais de uma viga engastada e suas frequências de oscilações. Já na seção 4.4 achamos os conceitos de constante elástica efetiva, massa efetiva e endurecimento/amolecimento de mola de vigas engastadas. Na seção 4.5 investigamos as vibrações não-linear de uma viga engastada e obtemos a equação do oscilador de Duffing não amortecido. Por fim, na seção 4.6 explicamos o experimento dinâmico que foi realizado e apresentamos os resultados obtidos e os discutimos.

4.1 Energia potencial de deformação e cinética de um segmento de viga

A figura 4.1 representa uma viga engastada vibrando livremente. Considere que um pequeno impacto perturbou esta viga e fez com que ela oscilasse livremente. Nesta seção

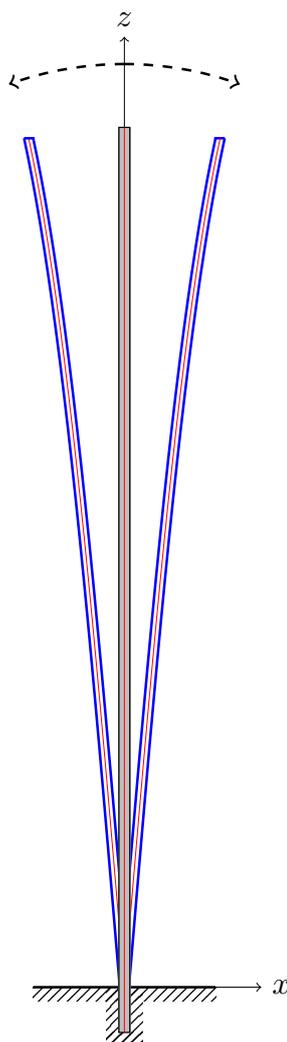


Figura 4.1 – Viga engastada na base e livre na outra extremidade, com comprimento ℓ_0 e densidade de massa linear μ , vibrando livremente.

encontramos a energia potencial elástica de deformação de um elemento infinitesimal da viga representada na figura 4.1. Na sequência, considerando este mesmo elemento, achamos a sua energia cinética

4.1.1 Energia potencial de deformação

Considere o filamento $\Delta s_1(s, \xi) = \Delta s_1$, localizado a uma distância ξ do eixo neutro, $\Delta s(s, 0) = \Delta s$, da figura 3.2. Sabendo que $\Delta s = R(s)\Delta\theta(s)$ e $\Delta s_1 = (R(s)+\xi)\Delta\theta(s)$, onde $R(s)$ é o raio de curvatura deste segmento, podemos escrever a deformação do filamento Δs_1 , $\epsilon(s, \xi)$, como [26]

$$\epsilon(s, \xi) = \frac{\Delta s_1 - \Delta s}{\Delta s} = \frac{\xi}{R(s)}.$$

Substituindo esse resultado na equação de Hooke, $\sigma(s, \xi) = E\epsilon(s, \xi)$ [27], encontramos

$$\sigma(s, \xi) = E \frac{\xi}{R(s)}.$$

A energia potencial elástica acumulada na deformação deste segmento de viga será [28]

$$\Delta U_{el} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \sigma(s, \xi)(\Delta s_1 - \Delta s)bd\xi.$$

Substituindo os resultados acima e resolvendo a integral, achamos que

$$\begin{aligned} \Delta U_{el} &= \frac{b\tau^3}{12} \frac{E\Delta\theta(s)}{2R(s)} \\ &= \frac{1}{2} EI \frac{\Delta s}{R^2(s)}. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

De acordo com o cálculo diferencial [29], o raio de curvatura, $R(s)$, pode ser escrito como

$$R(s) = \frac{\left[1 + \left(\frac{dX(z)}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2X(z)}{dz^2}} \quad (4.1.2)$$

e usando Pitágoras, o elemento de comprimento pode ser escrito como

$$\Delta s = \sqrt{1 + \left(\frac{dX(z)}{dz}\right)^2} \Delta z. \quad (4.1.3)$$

Substituindo estes resultados na equação (4.1.1), encontramos que

$$\Delta U_{el} = \frac{EI}{2} \frac{\left(\frac{d^2X(z)}{dz^2}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{dX(z)}{dz}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}} \Delta z.$$

Considerando a expansão de Taylor até seu segundo termo, a expressão acima resultará em

$$\Delta U_{el} \approx \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 X(z)}{dz^2} \right)^2 \left[1 - \frac{5}{2} \left(\frac{dX(z)}{dz} \right)^2 + \dots \right] \Delta z. \quad (4.1.4)$$

A equação (4.1.4) representa uma aproximação da energia potencial elástica proveniente de um elemento infinitesimal de uma viga engastada defletida.

4.1.2 Energia cinética

A energia cinética de um elemento infinitesimal da viga representada na figura 4.1 é dada por [28]

$$\Delta U_k = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right)^2 \Delta s.$$

Para pequenas amplitudes, $\Delta s \approx \Delta z$, encontramos

$$\Delta U_k \approx \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right)^2 \Delta z. \quad (4.1.5)$$

onde μ é a densidade de massa linear da barra e é dada por $\mu = \rho_v A_s$, onde ρ_v é a densidade da viga e A_s a área de sua seção transversal.

4.2 Vibrações flexurais de pequenas amplitudes de uma viga engastada

Das equações (4.1.5) e (4.1.4), obtemos que o Hamiltoniano para pequenas amplitudes de vibração da viga engastada representada na figura 4.1, é

$$\mathcal{H} \approx \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} \left[\mu \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz.$$

Derivando a expressão do Hamiltoniano em relação ao tempo, t , ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \int_0^{\ell_0} \left\{ \mu \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial t^2} \right) + EI \left(\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial z^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial z^2} \right) \right] \right\} dz \\ &= \int_0^{\ell_0} \left[\mu \left(\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial t^2} \right) + EI \left(\frac{\partial^4 X(z, t)}{\partial z^4} \right) \right] \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right) dz + \\ &+ EI \left\{ \left(\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial z^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial z} \right) \right] - \left(\frac{\partial^3 X(z, t)}{\partial z^3} \right) \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right) \right\} \Big|_{z=0}^{z=\ell_0}. \end{aligned}$$

Levando em conta as condições de contorno para uma viga engastada, $X(0, t) = \frac{\partial X(0, t)}{\partial z} = \frac{\partial^2 X(\ell_0, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 X(\ell_0, t)}{\partial z^3} = 0$ [18, 19], obtemos a seguinte expressão

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \int_0^{\ell_0} \left[\mu \left(\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial t^2} \right) + EI \left(\frac{\partial^4 X(z, t)}{\partial z^4} \right) \right] \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right) dz.$$

Para que o Hamiltoniano seja constante no tempo, obtemos

$$\mu \frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 X(z, t)}{\partial z^4} = 0. \quad (4.2.6)$$

A equação diferencial (4.2.6) modela a dinâmica oscilatória livre sem amortecimento de uma viga engastada.

4.3 Modos normais de uma viga linear engastada

Utilizando o método de separação de variáveis para uma solução do tipo oscilatória, podemos escrever o n -ésimo termo do modo normal da equação (4.2.6) como, $X(z, t) = X_n(z) \cos(\omega_n t + \varphi_f)$, onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $X_n(z)$ uma função não nula. Portanto, obtemos a seguinte equação diferencial para $X_n(z)$,

$$\frac{d^4 X_n(z)}{dz^4} = \frac{\mu \omega_n^2}{EI} X_n(z). \quad (4.3.7)$$

A solução geral da equação (4.3.7) é dada por

$$X_n(z) = A_n \cos(k_n z) + B_n \sin(k_n z) + C_n \cosh(k_n z) + D_n \sinh(k_n z), \quad (4.3.8)$$

onde $k_n = \left(\frac{\mu \omega_n^2}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}$. Utilizando as condições de contorno de uma viga engastada em $z = 0$ ($X_n(0) = X_n'(0) = 0$), encontramos

$$\begin{cases} A_n + C_n = 0 \rightarrow A_n = -C_n, \\ B_n + D_n = 0 \rightarrow B_n = -D_n. \end{cases}$$

Com este resultado a equação (4.3.8) pode ser escrita como

$$X_n(z) = A_n [\cos(k_n z) - \cosh(k_n z)] + B_n [\sin(k_n z) - \sinh(k_n z)]. \quad (4.3.9)$$

Utilizando agora as condições da extremidade livre da viga em $z = \ell_0$ ($X_n''(\ell_0) = X_n'''(\ell_0) = 0$), obtemos

$$\begin{bmatrix} \cos(k_n \ell_0) + \cosh(k_n \ell_0) & \sin(k_n \ell_0) + \sinh(k_n \ell_0) \\ -\sin(k_n \ell_0) + \sinh(k_n \ell_0) & \cos(k_n \ell_0) + \cosh(k_n \ell_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema matricial acima com $k_n \neq 0$, obtemos

$$A_n = \frac{\text{sen}(k_n \ell_0) + \text{senh}(k_n \ell_0)}{2[\cos(k_n \ell_0) \text{senh}(k_n \ell_0) - \cosh(k_n \ell_0) \text{sen}(k_n \ell_0)]} X_n(\ell_0) \quad (4.3.10)$$

e

$$B_n = -\frac{\cos(k_n \ell_0) + \cosh(k_n \ell_0)}{\text{sen}(k_n \ell_0) + \text{senh}(k_n \ell_0)} A_n, \quad (4.3.11)$$

onde A_n e B_n são os coeficientes da equação (4.3.9). Além disso, este problema terá solução diferente da trivial, desde que

$$[\cos(k_n \ell_0) + \cosh(k_n \ell_0)]^2 - [\text{sen}(k_n \ell_0) + \text{senh}(k_n \ell_0)][-\text{sen}(k_n \ell_0) + \text{senh}(k_n \ell_0)] = 0.$$

Portanto, a equação característica do problema será

$$\cos(k_n \ell_0) \cosh(k_n \ell_0) = -1. \quad (4.3.12)$$

Resolvendo a (4.3.12) numericamente utilizando o método da bissecção [30], definimos que as três primeiras raízes desta equação transcendental são $x_0 = 1,875104$, $x_1 = 4,694091$ e $x_2 = 7,854757$, onde $x_n = k_n \ell_0$. Além disso, sabemos que a frequência de oscilação dos modos normais dessa viga é $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$. Com $k_n = \left(\frac{\mu \omega_n^2}{EI}\right)^{\frac{1}{4}}$ e $\mu = \rho_v A_s$, obtemos que a n-ésima frequência de oscilação dos modos normais de uma viga engastada é dada por

$$f_n = \frac{\tau x_n^2}{2\pi \ell_0^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho_v}}. \quad (4.3.13)$$

Utilizando a equação (4.3.13), estimamos que as frequências de oscilações dos três primeiros modos normais da haste ensaiada e representamos seus resultados na tabela 5.

4.4 Aproximação das energias envolvidas para o modelo de um único grau de liberdade

Considerando a expansão de Taylor até o segundo termo na equação (4.1.4), a energia potencial de uma viga delgada pode ser escrita na aproximação de um grau de liberdade como

$$\frac{\kappa(z)X^2(z,t)}{2} + \frac{\alpha(z)X^4(z,t)}{4} \approx \frac{EI}{2} \int_0^{\ell_0} \left(\frac{\partial^2 X(z',t)}{\partial z'^2} \right)^2 \left[1 - \frac{5}{2} \left(\frac{\partial X(z',t)}{\partial z'} \right)^2 \right] dz'.$$

Tabela 5 – Frequências de oscilações dos três primeiros modos normais da haste ensaiada com $E \approx 220$ GPa e $\rho_v \approx 7.8 \times 10^3$ Kg·m⁻³.

Estimativas teóricas dos modos normais				
Comprimento livre, ℓ_0 (mm)	91.30	92.50	93.30	94.10
Frequência no primeiro modo normal (Hz)	30.39	29.99	29.48	28.98
Frequência no segundo modo normal (Hz)	190.45	187.99	184.78	181.65
Frequência no terceiro modo normal (Hz)	533.27	526.38	517.39	508.63

Considerando as condição de ortogonalidade dos termos de expansão de Fourier, $\cos(n\omega_0 t)$, e sabendo que

$$\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}$$

e

$$\cos^4(\omega_0 t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{8}\cos(4\omega_0 t),$$

obtemos

$$\frac{\kappa(z)X^2(z, t)}{2} \approx \frac{EI}{2} \int_0^{\ell_0} \left(\frac{\partial^2 X(z', t)}{\partial z'^2} \right)^2 dz' \quad (4.4.14)$$

e

$$\frac{\alpha(z)X^4(z, t)}{4} \approx -\frac{5EI}{4} \int_0^{\ell_0} \left[\left(\frac{\partial^2 X(z', t)}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{\partial X(z', t)}{\partial z'} \right) \right]^2 dz'. \quad (4.4.15)$$

Utilizando integração por partes na expressão (4.4.14), ficamos com

$$\begin{aligned} \kappa(z)X^2(z, t) = EI \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 X(z', t)}{\partial z'^2} \right) \left(\frac{\partial X(z', t)}{\partial z'} \right) - \left(\frac{\partial^3 X(z', t)}{\partial z'^3} \right) X(z', t) \right] \Big|_{z'=0}^{z'=\ell_0} + \right. \\ \left. + \int_0^{\ell_0} \left[X(z', t) \left(\frac{\partial^4 X(z', t)}{\partial z'^4} \right) \right] dz' \right\}. \end{aligned}$$

Supondo que a viga vibra no modo fundamental, $X(z, t) = X_0(z)\cos(\omega_0 t)$, utilizando as condições de contorno deste modelo, $X_0(0) = X_0'(0) = X_0''(\ell_0) = X_0'''(\ell_0) = 0$, e sabendo que $X_0''''(z') = k_0^4 X_0(z')$ e $k_0 = \left(\frac{\mu\omega_0^2}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}$, da expressão acima e equação (4.4.15), achamos

$$\kappa(z) = \frac{\mu\omega_0^2}{X_0^2(z)} \int_0^{\ell_0} X_0^2(z') dz' \quad (4.4.16)$$

e

$$\alpha(z) = -\frac{5EI}{X_0^4(z)} \int_0^{\ell_0} (X_0''(z')X_0'(z'))^2 dz', \quad (4.4.17)$$

onde $\kappa(z)$ é a constante elástica efetiva da viga na altura z e $\alpha(z)$ a constante que representa o endurecimento/amolecimento de mola da viga na altura z , em que $0 \leq z \leq \ell_0$.

Escrevendo agora a energia cinética desta mesma viga durante suas oscilações na aproximação de um polinômio de grau único de liberdade, achamos que

$$\frac{m(z)}{2} \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right)^2 \approx \frac{\mu}{2} \int_0^{\ell_0} \left(\frac{\partial X(z', t)}{\partial t} \right)^2 dz'.$$

Supondo que a viga vibra no modo fundamental $X(z, t) = X_0(z)\cos(\omega_0 t)$, obtemos

$$m(z) = \frac{\mu}{X_0^2(z)} \int_0^{\ell_0} X_0^2(z') dz', \quad (4.4.18)$$

onde $m(z)$ é a massa efetiva da viga na altura z em que $0 \leq z \leq \ell_0$. Plotamos na figura 4.2, a variação teórica da massa efetiva de uma haste engastada ao longo de $\frac{z}{\ell_0}$. Substituindo a equação (4.4.18) na equação (4.4.16), definimos que

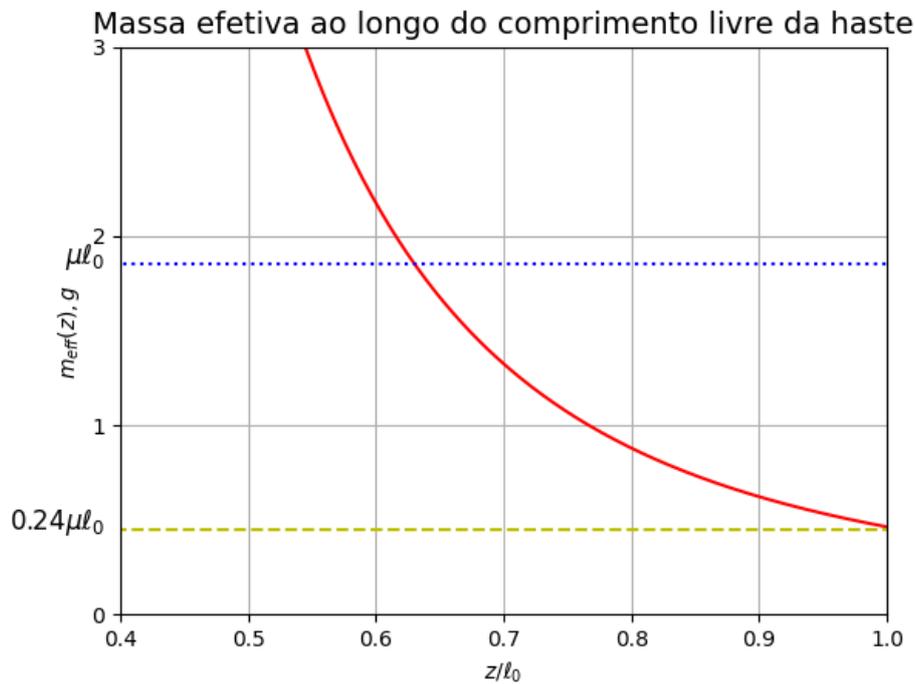


Figura 4.2 – Variação da massa efetiva de uma viga engastada no primeiro modo normal; curva vermelha representa a variação da massa efetiva desta haste ao longo de $\frac{z}{\ell_0}$. Com o comprimento livre, ℓ_0 , 92.50 mm, a reta azul pontilhada corresponde ao valor da massa livre da haste ensaiada, $\mu\ell_0$; reta amarela tracejada corresponde ao valor da massa efetiva na extremidade livre da haste, $0.24\mu\ell_0$.

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa(z)}{m(z)}. \quad (4.4.19)$$

A equação (4.4.19) corresponde a frequência natural/fundamental de uma viga engasta vibrando livremente.

4.5 Vibrações flexurais não-lineares de uma viga engastada

Com as equações (4.4.16), (4.4.17) e (4.4.18), podemos agora escrever o Hamiltoniano na aproximação de um grau de liberdade como

$$\mathcal{H} = \frac{m(z)}{2} \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{\kappa(z)X^2(z, t)}{2} + \frac{\alpha(z)X^4(z, t)}{4}.$$

Sabendo que esse sistema é conservativo, ao diferenciarmos o Hamiltoniano em relação ao tempo, encontramos

$$m(z) \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial t^2} \right) + \kappa(z)X(z, t) \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right) + \alpha(z)X^3(z, t) \left(\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right) = 0.$$

o que implica em

$$\frac{\partial^2 X(z, t)}{\partial t^2} + \frac{\kappa(z)}{m(z)}X(z, t) + \frac{\alpha(z)}{m(z)}X^3(z, t) = 0. \quad (4.5.20)$$

onde $\kappa(z)$, $\alpha(z)$ e $m(z)$ são dados, respectivamente, nas equações (4.4.16), (4.4.17) e (4.4.18).

A equação (4.5.20) representa a dinâmica vibracional livre sem amortecimento de uma viga não-linear. Essa equação descreve o oscilador de Duffing não amortecido.

4.6 Experimento dinâmico, resultados e discussão

Nas seções anteriores foram apresentadas formulações matemáticas capazes de modelar à haste engastada em condições dinâmicas lineares. Agora explicaremos o experimento dinâmico que foi realizado na haste apresentada no capítulo 2. Também apresentaremos os resultados obtidos e os discutimos.

4.6.1 Série temporal da haste linear

Neste experimento obtivemos a série temporal da haste sem a ação magnética dos ímãs (linear). Com ela encontramos a frequência de amortecimento haste linear sem e

com o ímã acoplado em sua extremidade livre. Para realizar este experimento utilizamos o sensor óptico e osciloscópio. Adotamos o seguinte método:

1. Inicialmente engastamos a haste na base de engaste e alinhada em relação ao sensor óptico;
2. Com a haste em condições lineares (sem a ação da força repulsiva magnética) e em repouso, calibramos o sensor óptico em relação ela, de forma que no leitor do sensor estava marcando a posição "0,00";
3. Em seguida perturbamos a haste com um pequeno impacto, fazendo com ela vibrasse;
4. O sensor óptico então captou essas oscilações e as transmitiu para o osciloscópio em forma de sinal;
5. No osciloscópio esses dados foram lidos, armazenados e transferidos para um computador.

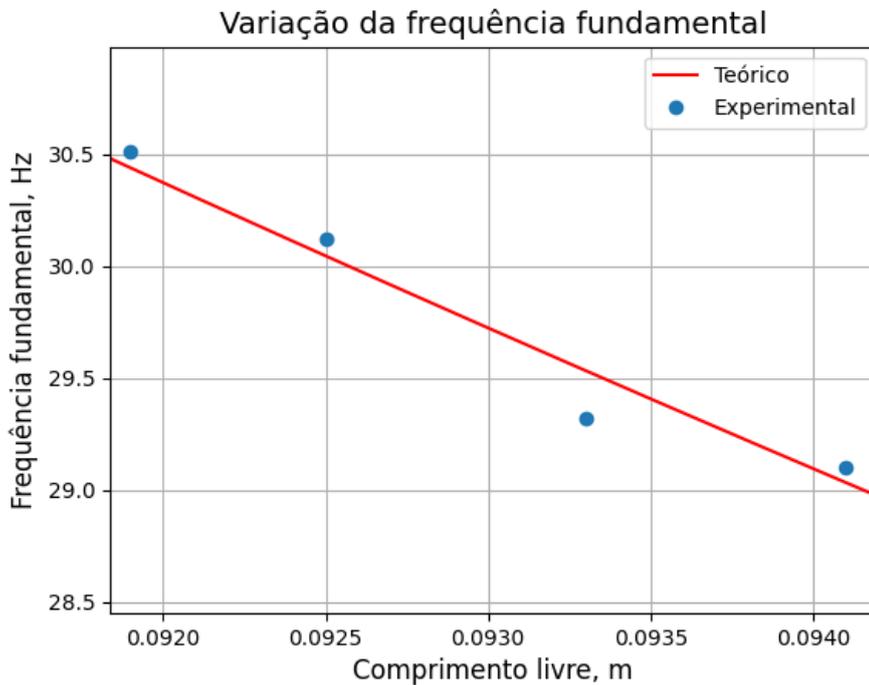
4.6.2 Resultados e discussão

Na tabela 6 apresentamos as frequências fundamentais da haste para vários comprimentos livres. Para obtê-las convertimos as séries temporais em uma transformada de Fourier utilizando um script escrito em Python com o pacote "fftpack" e comando "fft-freq". Na curva da transformada de Fourier identificamos frequência fundamental da haste engastada. Na figura 4.3 plotamos a variação da frequência fundamental em função do comprimento livre ℓ_0 . Representamos uma das séries temporais e sua respectiva transformada de Fourier na figura 4.4.

Utilizando as frequências fundamentais apresentados na tabela 6 e a equação (4.3.13), determinamos o módulo de Young dessa haste é 221 ± 2 GPa. Sabemos que o módulo de Young do aço esta entre 190 e 220 GPa. Comprovamos assim que a teoria de Euler-Bernoulli proporciona resultados condizentes com os obtidos experimentalmente.

Tabela 6 – Primeiro modo normal medido experimentalmente para vários comprimento livres da haste.

Frequências fundamentais experimentais				
Comprimento livre, ℓ_0 (mm)	91.30	92.50	93.30	94.10
Frequência fundamental da haste sem o ímã (Hz)	30.51	30.12	29.32	29.10

Figura 4.3 – Variação da frequência fundamental em função do comprimento livre, ℓ_0 , teórico com $E=221$ GPa e experimental.

Da mesma forma, obtivemos a temporal da haste com o ímã acoplado na extremidade livre no comprimento livre $\ell_0=92.50\text{mm}$. Apresentamos a sua série temporal e transformada de Fourier na figura 4.5. Nesta situação obtivemos a frequência fundamental dada por $f=10.59$ Hz. A massa total do ímã de neodímio com a luva de polietileno, m_0 , é de aproximadamente 12 g. Como esta massa está acoplada pontualmente na extremidade livre da haste, a massa efetiva da haste é dada por $m_t(z) = m(x) + m_0$. De acordo com a equação (4.4.19), a frequência fundamental da haste sem o ímã em relação a frequência fundamental da haste com o ímã, deverá ser maior em uma razão de aproximadamente 2.65. Experimentalmente esta razão foi observado. Logo, a aproximação de um único

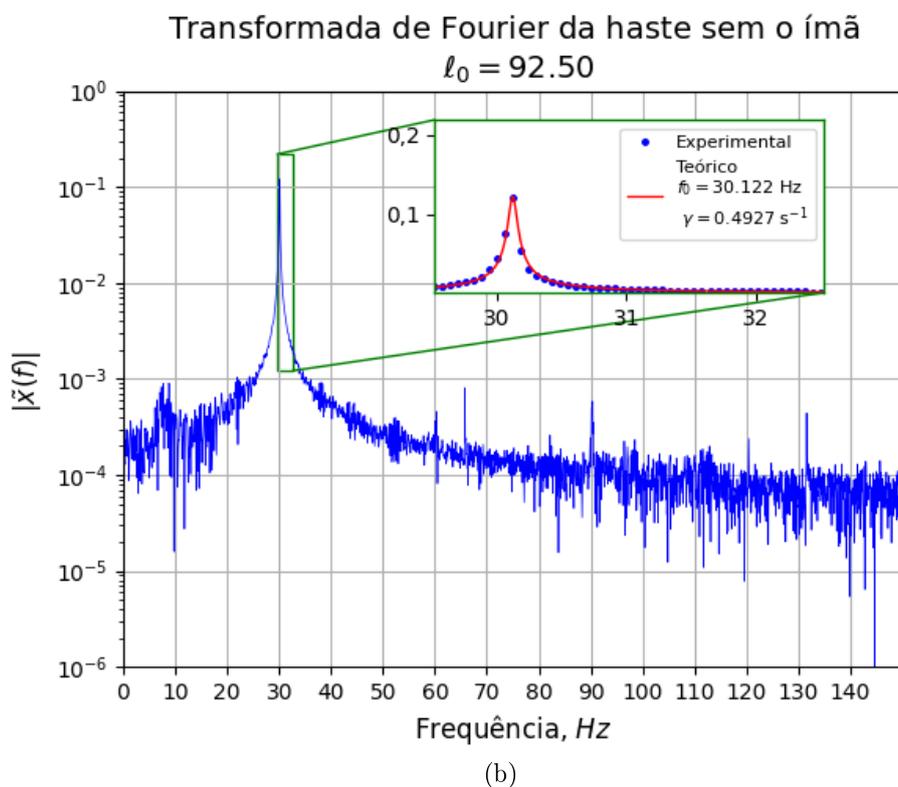
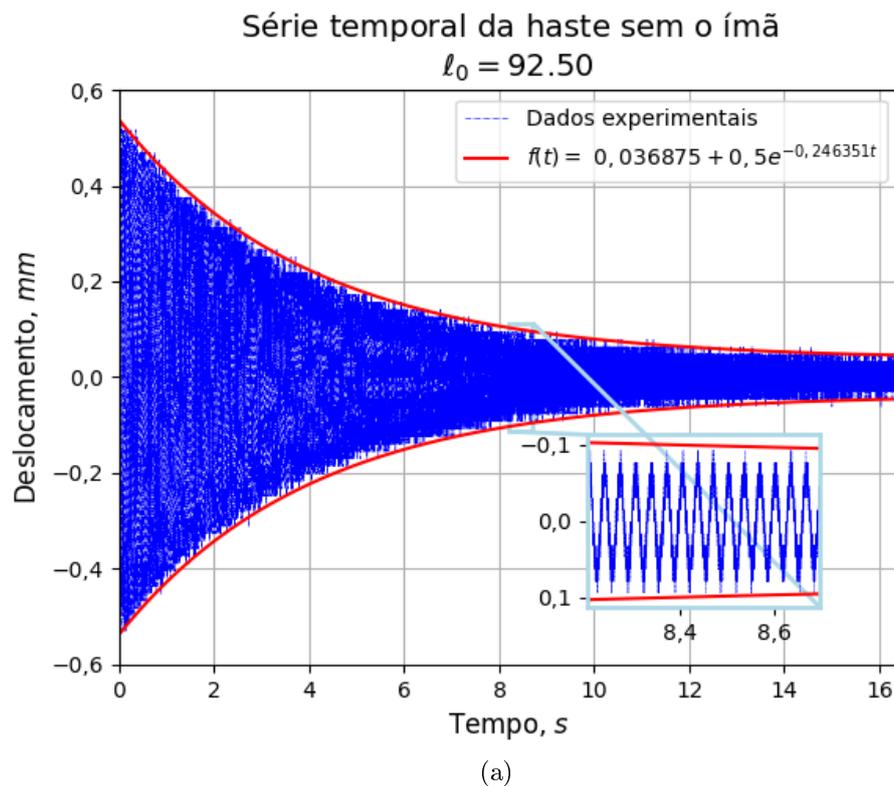


Figura 4.4 – (a) Série temporal das oscilações amortecidas da haste sem o ímã com comprimento livre, l_0 , de 92.50 mm. (b) Corresponde a transformada de Fourier do melhor ajuste da curva de ressonância. Obtemos que γ é 0.49 s^{-1} e f_0 é 30.12 Hz, com um fator de qualidade $Q=384.6$.

grau de liberdade para este problema é válida.

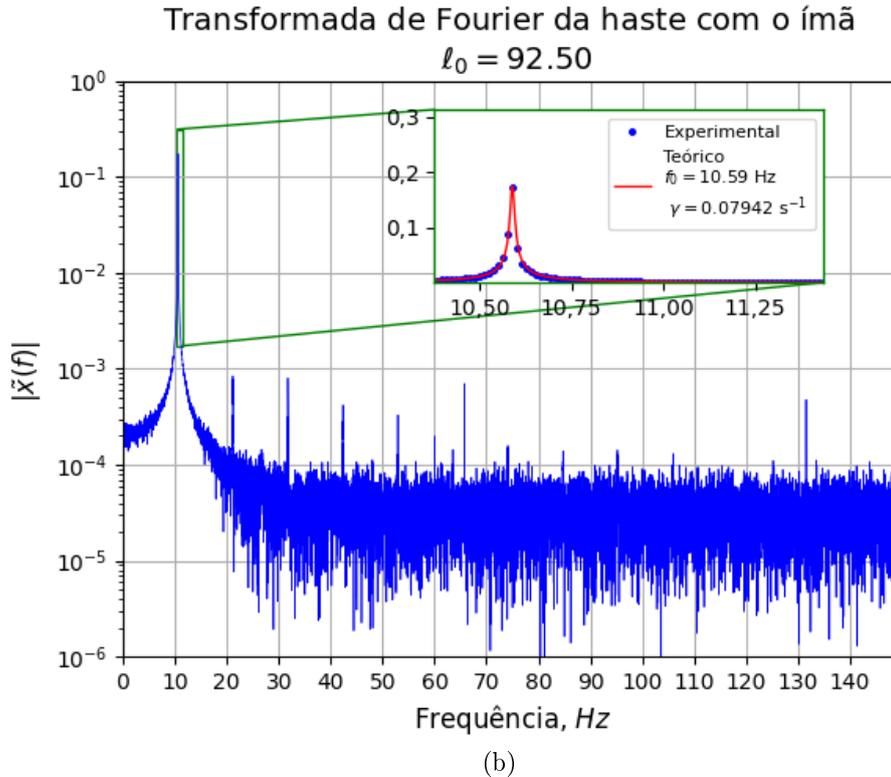
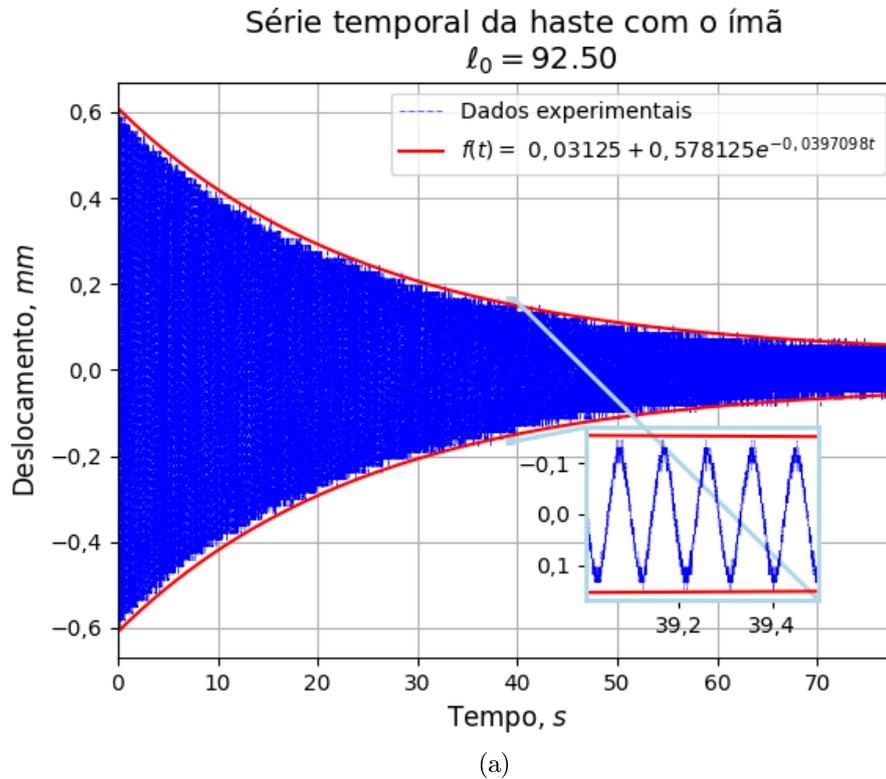


Figura 4.5 – (a) Série temporal das oscilações amortecidas da haste com o ímã com comprimento livre, l_0 , de 92.50 mm. (b) Corresponde a transformada de Fourier do melhor ajuste da curva de ressonância. Obtemos que γ é 0.08 s^{-1} e f_0 é 10.59 Hz, com um fator de qualidade $Q=837.8$.

O Ressonador Mecânico de Duffing

Neste capítulo estudamos vibrações não-lineares no ressonador mecânico cantiléver. Vamos investigar não só oscilações amortecidas mas também oscilações estacionárias senoidalmente estimuladas e o regime caótico apresentado por sistemas não-lineares. Além disso, neste capítulo vemos como caracterizar esse ressonador não-linear na aproximação de um grau de liberdade, ou seja, como obter todos os parâmetros do oscilador de Duffing.

Sabemos que a não-linearidade intrínseca da haste, como obtemos no capítulo anterior, não é muito grande, o que torna difícil a excitação de efeitos não-lineares experimentalmente. Devido a essa dificuldade, decidimos utilizar a força magnética entre dois ímãs permanentes com polarizações opostas para facilitar a tarefa de geração de efeitos não-lineares. Colamos um ímã à extremidade livre da haste e um segundo ímã é mantido fixo um pouco acima da haste. Dessa forma criamos um potencial em forma de poço duplo para o oscilador. Novamente, obtemos um oscilador de Duffing, só que com um pouco de assimetria e com coeficientes não-lineares bem maiores do que obteríamos somente com a não-linearidade intrínseca da haste. Com os resultados que foram obtidos experimentalmente, conseguimos definir todos os parâmetros necessários para caracterizar o oscilador de Duffing e conseqüentemente, modelar sua dinâmica.

Na seção 5.1 estudamos as oscilações estacionárias no oscilador de Duffing forçado e amortecido. Utilizamos o método perturbativo do balanço harmônico para obtermos a resposta do oscilador a uma força externa senoidal. Na seção 5.2 a curva de histerese da frequência. Na seção 5.3 modelamos uma haste não-linear vibrante baseada no oscilador

assimétrico de Duffing e abordamos como foi feita a caracterização dos seus parâmetros experimental. Por fim, na seção 4.6 explicamos os experimentos que foram utilizados para caracterizar a haste não-linear e apresentamos os resultados obtidos.

5.1 Oscilador de Duffing

Na avaliação de problemas que envolvem não-linearidades, comumente emprega-se o modelo proposto por Georg Duffing. Assim como na análise feita na seção 4.5, este modelo considera uma constante que multiplica termo cúbico. Fisicamente esta constante traduz os efeitos do fenômeno do amolecimento ou endurecimento de mola apresentado por estruturas dinâmicas não-lineares [12]. Quando sujeito a este fenômeno, os sistemas físicos e mecânicos não-lineares podem apresentar instabilidades e aperiocidades durante o seu movimento.

Com este modelo é possível compreender sistemas não-autônomos instáveis que sofrem inevitáveis atrasos do tempo [31]; vibrações induzidas por fluidos em estruturas (pontes e risers de petróleo sujeitos à corrente marítimas, prédios altos expostos a correntes de ar, estruturas em áreas suscetíveis à terremotos, entre outras) [32, 33]; os efeitos da ressonância nos equipamentos e estruturas [32]; dentre outras.

Apesar de simples e muito prático, este modelo proporciona resultados realísticos desde os dos problemas dinâmicos mais simples, oscilações livre, até os mais complexos, oscilações caóticas [12, 34].

5.1.1 Equação de Duffing

Considere o sistema que representamos na figura 5.1, em que um corpo de massa, m , está preso a uma mola posicionada horizontalmente que está fixa em uma superfície vertical. Quando este corpo sofre ação de uma força externa periódica, $F_e \cos(\omega t)$, ele desloca-se periodicamente na direção de x em qualquer um dos dois sentidos. Como o corpo não está no vácuo, durante o seu movimento periódico há perdas energéticas para meio fluido ao qual descola-se. Além disso, não há perdas significativas entre as rodas do

corpo e a superfície horizontal. De acordo com a segunda lei de Newton, o movimento

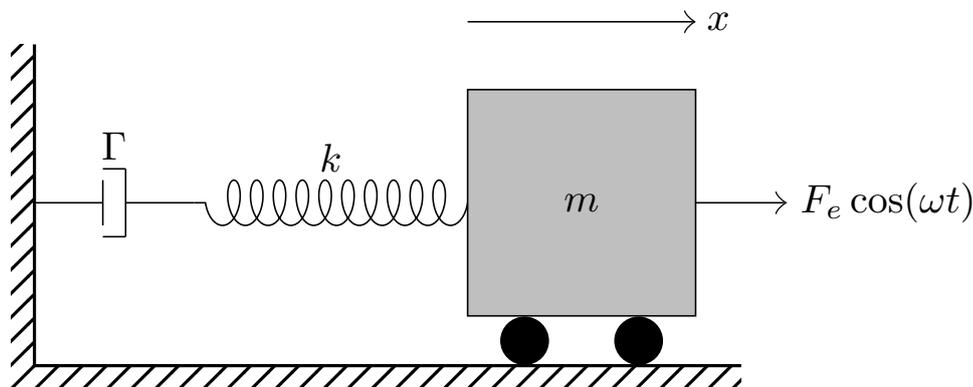


Figura 5.1 – Representação de um sistema massa-mola sobre ação de uma força externa com movimento restrito apenas a direção de x , onde Γ é a constante de amortecimento proveniente do atrito viscoso do meio com as superfícies do corpo, k é a constante elástica da mola, F_e e ω são, respectivamente, a amplitude e frequência da força externa periódica e t é o tempo.

deste corpo é descrito por

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F_{ex} + F_{el} + F_d,$$

onde F_{ex} , F_{el} e F_d são, respectivamente as forças externa, elástica da mola e dissipativa.

Com $F_{ex} = F_e \cos(\omega t)$, $F_{el} = -kx(t) - \alpha x^3(t)$ e $F_d = \Gamma \frac{dx(t)}{dt}$. Assim obtemos

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\Gamma \frac{dx(t)}{dt} - kx(t) - \alpha x^3(t) + F_e \cos(\omega t),$$

onde Γ é o coeficiente de dissipação, k é a constante elástica, e α é o coeficiente não linear.

Se $\alpha < 0$ a mola fica mais mole com o aumento da deflexão, enquanto se $\alpha > 0$, a mola fica mais rígida com o aumento da deflexão. Podemos diminuir a quantidade de parâmetros ao dividir essa equação pela massa m . Obtemos então

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) - \beta x^3(t) + f_e \cos(\omega t), \quad (5.1.1)$$

onde ω_0 é a frequência natural do sistema dada por $\omega_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}$, $\gamma = \frac{\Gamma}{m}$, $\beta = \frac{\alpha}{m}$, $f_e = \frac{F_e}{m}$.

A equação (5.1.1) corresponde a equação do oscilador Duffing amortecido. Além disso, caso o sistema da figura 5.1 estivesse no vácuo e sem ação de forças externas, obteríamos a equação (4.5.20) com um grau único de liberdade.

5.1.2 Solução estacionária do oscilador de Duffing forçado

Para determinarmos uma solução estacionária aproximada da equação (5.1.1), utilizamos o método perturbativo do balanço harmônico. Nele a solução é aproximada por uma série de Fourier, cujos coeficientes serão determinados por equações algébricas [35]. Quanto mais termos tivermos na série, mais alta é a ordem da aproximação. No caso geral temos [14]

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)].$$

No método do balanço harmônico de primeira ordem, a solução estacionária periódica da equação (5.1.1) considerando que o sistema é forçado e amortecido, é dada por [36]

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t), \quad (5.1.2)$$

onde a_0 , a_1 e b_1 são constantes a serem determinadas.

Substituindo (5.1.2) na equação (5.1.1) e calculando os termos constantes no tempo, encontramos que

$$0 = -\omega_0^2 a_0 - \beta \left[a_0^3 + 3a_0 \left(\frac{a_1^2}{2} + \frac{b_1^2}{2} \right) \right],$$

que pode ser reescrita como

$$a_0 \left\{ \omega_0^2 + \beta \left[a_0^2 + \frac{3}{2} (a_1^2 + b_1^2) \right] \right\} = 0.$$

Se $\beta > 0$, não há como os termos dentro chaves serem ≤ 0 . Logo, $a_0 = 0$.

Substituindo agora a equação (5.1.2) e suas derivadas na equação (5.1.1), considerando que $\beta > 0$, encontramos

$$\begin{aligned} & [-a_1 \omega^2 \cos(\omega t) - b_1 \omega^2 \sin(\omega t)] + \gamma [-a_1 \omega \sin(\omega t) + b_1 \omega \cos(\omega t)] + \\ & + \omega_0^2 [a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)] + \beta [a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)]^3 = f_e \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Considerando as relações trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos^2(\omega t) \sin(\omega t) &= \frac{1}{4} \sin(3\omega t) + \frac{1}{4} \sin(\omega t), \\ \cos(\omega t) \sin^2(\omega t) &= \frac{1}{4} \cos(\omega t) - \frac{1}{4} \cos(3\omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^3(\omega t) &= \frac{1}{4}\cos(3\omega t) + \frac{3}{4}\cos(\omega t), \\ \text{sen}^3(\omega t) &= \frac{3}{4}\text{sen}(\omega t) - \frac{1}{4}\text{sen}(3\omega t),\end{aligned}$$

e desprezando os seus termos com $3\omega t$, obtemos

$$\begin{aligned}-a_1\omega^2\cos(\omega t) - b_1\omega^2\text{sen}(\omega t) - a_1\gamma\omega\text{sen}(\omega t) + b_1\gamma\omega\cos(\omega t) + a_1\omega_0^2\cos(\omega t) + b_1\omega_0^2\text{sen}(\omega t) + \\ + a_1^3\beta\frac{3}{4}\cos(\omega t) + b_1^3\beta\frac{3}{4}\text{sen}(\omega t) + a_1b_1^2\beta\frac{3}{4}\cos(\omega t) + a_1^2b_1\beta\frac{3}{4}\text{sen}(\omega t) = f_e\cos(\omega t).\end{aligned}$$

Como as funções seno e cosseno são linearmente independentes, chegamos no seguinte sistema algébrico

$$\begin{cases} \Omega a_1 + \omega\gamma b_1 + \frac{3}{4}\beta(a_1^2 + b_1^2)a_1 = f_e, \\ \Omega b_1 - \omega\gamma a_1 + \frac{3}{4}\beta(a_1^2 + b_1^2)b_1 = 0, \end{cases}$$

onde $\Omega = \omega_0^2 - \omega^2$. Multiplicamos a primeira equação do sistema acima por b_1 e a segunda por $-a_1$, em seguida somamos essas duas parcelas e chegamos a

$$\omega\gamma(b_1^2 + a_1^2) = f_e b_1. \quad (5.1.3)$$

Multiplicando agora a primeira expressão do sistema por a_1 e a segunda por b_1 , obtemos

$$(a_1^2 + b_1^2) \left[\Omega + \frac{3}{4}\beta(a_1^2 + b_1^2) \right] = f_e a_1. \quad (5.1.4)$$

Sabendo que $a_1 = r(\omega)\cos\phi(\omega)$ e $b_1 = r(\omega)\text{sen}\phi(\omega)$, as equações (5.1.3) e (5.1.4) resultam em

$$\text{sen}\phi = \frac{\omega\gamma r}{f_e} \quad (5.1.5)$$

e

$$\cos\phi = \frac{r}{f_e} \left(\Omega + \frac{3}{4}\beta r^2 \right). \quad (5.1.6)$$

Dividindo a equação (5.1.5) pela equação (5.1.6), encontramos que

$$\phi = \arctan \left(\frac{4\omega\gamma}{4\Omega + 3\beta r^2} \right). \quad (5.1.7)$$

Além disso, substituindo as equações (5.1.5) e (5.1.6) na relação trigonométrica $\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$, obtemos que

$$r^2[16\omega^2\gamma^2 + 16\Omega^2 + r^2(24\Omega\beta + 9\beta^2r^2)] = 16f_e^2,$$

que pode ser reescrita como

$$r^2 \left[(\gamma\omega)^2 + \left(\Omega + \frac{3}{4}\beta r^2 \right)^2 \right] = f_e^2. \quad (5.1.8)$$

Com $a_1 = r(\omega)\cos\phi(\omega)$ e $b_1 = r(\omega)\sin\phi(\omega)$, a equação (5.1.2) resulta em

$$x(t) = r(\omega)\cos(\omega t - \phi(\omega)). \quad (5.1.9)$$

A equação (5.1.9) é a solução estacionária aproximada do oscilador de Duffing baseada no método do balanço harmônico em primeira ordem. Para determinar o resultado de r devemos resolver a equação cúbica em r^2 , equação (5.1.8), analiticamente ou pelo método numérico da bissecção.

5.2 Curva de biestabilidade

A resposta em frequência ou curva de bi-estabilidade, como também é conhecida, trata-se de uma curva que descreve a variação da amplitude r em relação a variação frequência de excitação ω em regime estacionário [12, 37]. Esta curva descreve o fenômeno dos saltos que ocorre em sistemas não-lineares sujeitos ao amolecimento/endurecimento de mola [37].

A curva de bi-estabilidade pode se comportar de três formas distintas dependendo do valor que β assumi no sistema. Quando:

1. $\beta = 0$ - Neste caso a equação (5.1.1) tem apenas termos lineares. Logo, o sistema é linear. A figura 5.2a representa a resposta em frequência de um sistema qualquer com $\beta = 0$;
2. $\beta > 0$ - Como β é positivo, em relação a quando $\beta = 0$, há um aumento na energia potencial elástica sistema. Nesta situação o sistema é tido como não-linear com endurecimento na mola. A resposta em frequência desta situação está representada na figura 5.2b;
3. $\beta < 0$ - Nesta situação β assumi apenas valor negativo. Sendo assim, diferente do caso em que $\beta > 0$, em relação a quando $\beta = 0$, há uma redução na energia potencial

elástica do sistema. Neste caso, considera-se que há um amolecimento de mola no sistema. A curva da bi-estabilidade para este caso é mostrada na figura 5.2c.

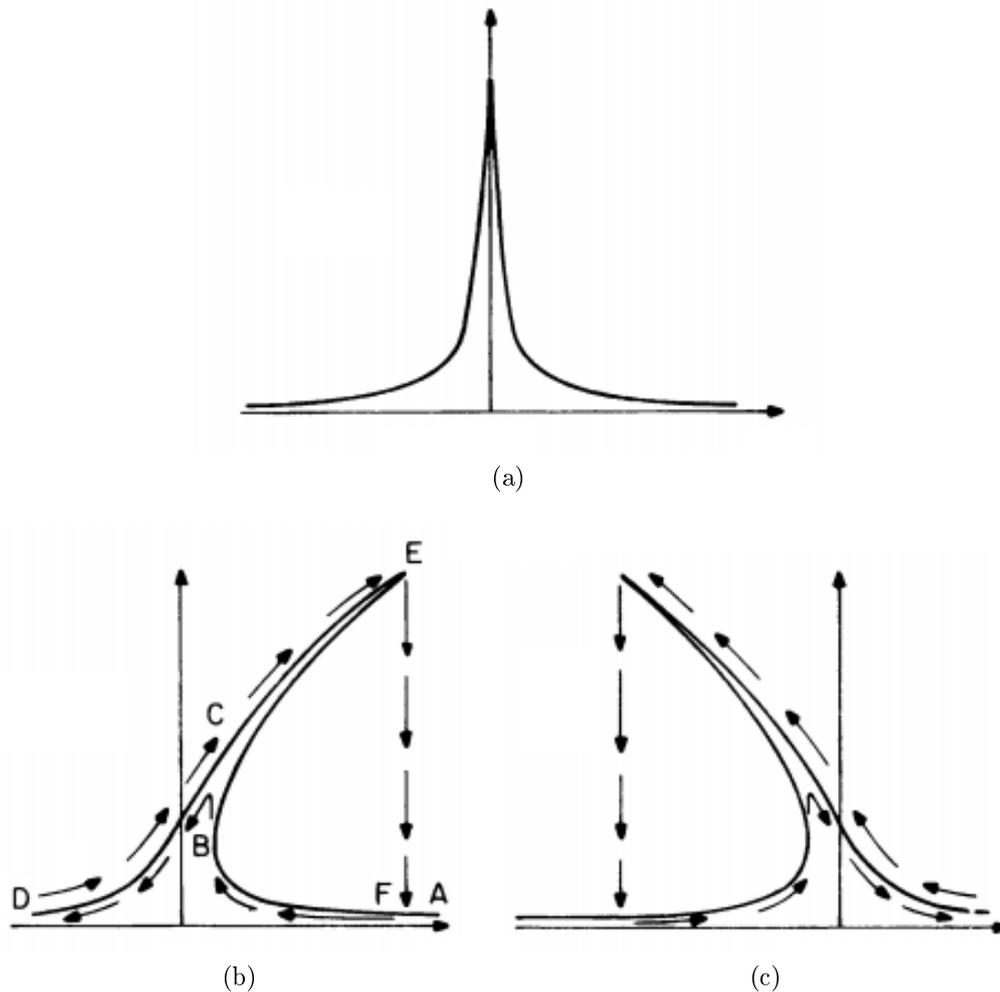


Figura 5.2 – Resposta em frequência da equação (5.1.8) quando (a) $\beta = 0$, (b) $\beta > 0$ e (c) $\beta < 0$. Fonte: [37] modificada.

Considere um sistemas não-linear qualquer sujeito ao endurecimento de mola ($\beta > 0$). Vamos então avaliar a amplitude $r(\omega)$ no intervalo de frequências $\omega_i \leq \omega \leq \omega_f$, em quem $\omega_0 \in \omega$ e $\omega_i < \omega_f$. Para construir a curva da bi-estabilidade deste problema, figura 5.2b, podemos reduzir ω gradativa, ou seja, partimos de ω_f até ω_i , ou aumenta-lo aos poucos, ou seja, começamos em ω_i e finalizamos em ω_f .

Tendo como referência a figura 5.2b, se reduzirmos suavemente o valor de ω , obtemos a curva ABCD; já aumentarmos gradativamente ω , obtemos a curva DCEF. De acordo com a curva ABCD, levando em conta o intervalo BC, percebemos que o valor de $r(\omega)$ aumenta muito com uma pequena variação de ω , ou seja, $r(\omega)$ "salta para cima". Já de acordo com

a curva DCEF, atentando para o intervalo EF, notamos que o valor de $r(\omega)$ reduz muito rapidamente para uma pequena variação de ω , ou seja, $r(\omega)$ "salta para baixo". Esses saltos caracterizam o fenômeno "Jump". Trata-se de um aumento ou redução repentina da amplitude da resposta do sistema. É uma consequência do fenômeno da bifurcação. Além disso, as curvas ABCD e DCEF não são iguais pois nesses problemas há perdas energéticas por histerese.

5.3 Haste não-linear engastada: modelagem e caracterização experimental

Considere uma haste não-linear engastada que possui três pontos de equilíbrio, sendo dois estáveis (poço esquerdo e direito) e um instável (poço linear), como a que representamos na figura 5.3. Ao submetemos esta haste a uma força externa periódica, $F_e \cos(\omega t)$, o sistema passa a oscilar periodicamente. Nesta situação sua dinâmica equivalente a do sistema massa-mola em movimento analisado na subseção 5.1.1. Portanto, de acordo com a equação (5.1.1) e sabendo que $\frac{F_{el}}{m} = f_{el} = -\frac{du(x)}{dx}$, encontramos

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \frac{du(x)}{dx} = f_e \cos(\omega t). \quad (5.3.10)$$

Na seção 5.1 abordamos o oscilador simétrico de Duffing. Trata-se de uma abordagem puramente teórica, tendo em vista que a simetria física dos sistemas é algo inatingível, pelo menos até esse momento. Dessa forma, como caracterizaremos experimentalmente a haste, devemos adotar o oscilador assimétrico Duffing. Diferente da situação anterior, nesta o potencial específico da haste é dado por

$$u(x) = \frac{E}{4}x^4 + \frac{F}{3}x^3 + \frac{G}{2}x^2 + Hx.$$

A equação (5.3.10) descreve o movimento oscilatório de uma haste não-linear engastada sujeita a uma força externa periódica, $F_e \cos(\omega t)$.

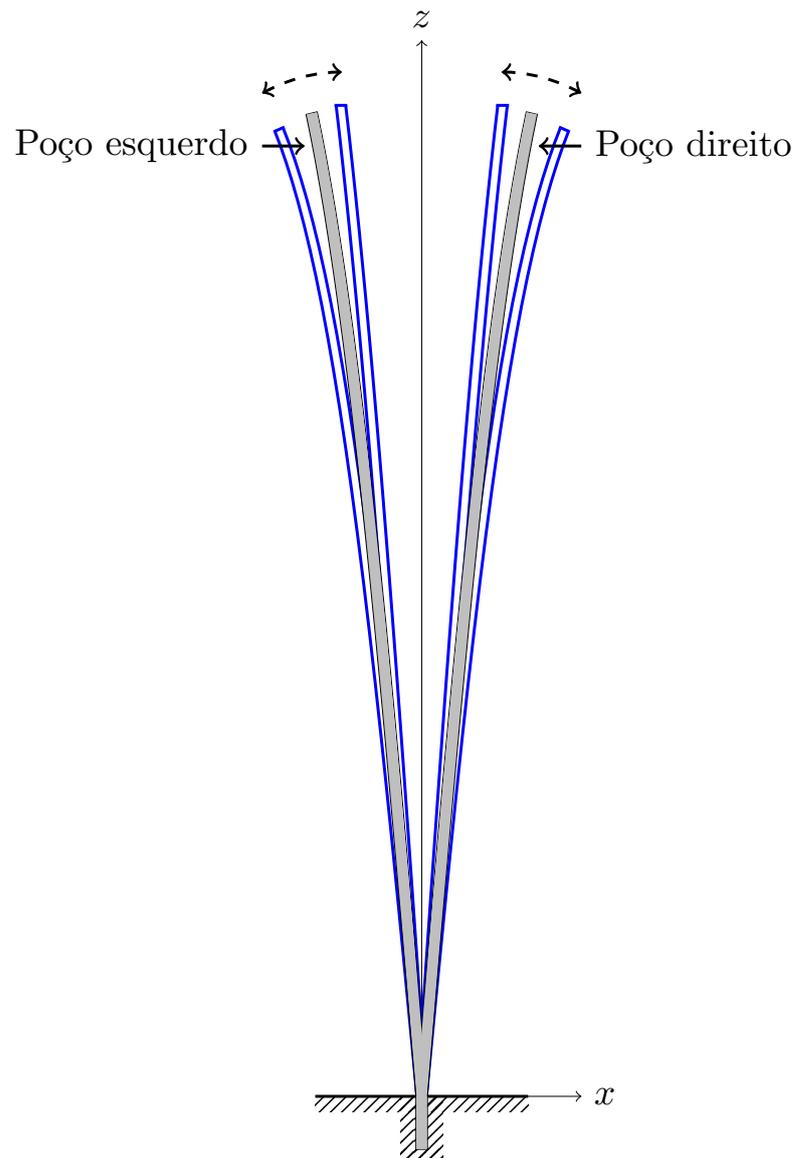


Figura 5.3 – Haste não-linear engastada em uma extremidade e livre na outra, oscilando em seus dois possíveis pontos de equilíbrio estáveis (poço esquerdo e direito).

5.3.1 Constante de dissipação energética

Durante as oscilações da haste, há perdas energéticas para o meio, resultado do atrito viscoso entre o ar e a haste, pela fricção interna, resultado do atrito entre as estruturas cristalinas da haste, e para a base de engaste. Neste sistema a dissipação é classificada como sub-amortecido [14, 38]. Sendo assim, a curva envelope exponencial que envolve a temporal durante o decaimento da amplitude do deslocamento da haste é dado por

$$f_t(t) = Ze^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

onde Z é a amplitude máxima do deslocamento.

Determinamos o valor de γ utilizando a série temporal de cada um dos poços estáveis. Contudo, ajustamos uma curva envelope de decaimento exponencial na série temporal e então identificamos o valor de γ . O experimento para obter a série temporal de cada poço será apresentado na subseção 5.4.1.

5.3.2 Potencial assimétrico

Para determinarmos o resultado de E , F , G e H , precisaremos de quatro equações e quatro condições de contorno. Sabemos que, $\frac{F(x)}{m} = f(x) = -\frac{du(x)}{dx}$, logo

$$f(x) = -(Ex^3 + Fx^2 + Gx + H).$$

Além disso, a primeira derivada deste potencial resulta em um ponto crítico e dessa forma, a derivando a expressão acima em relação a x , encontramos que

$$Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0. \quad (5.3.11)$$

De acordo com a lei de Hooke, $f(x) = -\frac{kx}{m}$, na zona de deformação elástica, e dessa forma, $\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{k}{m} = \omega_0^2$. Derivando o potencial do sistema duas vezes em relação a x , achamos

$$3Ex^2 + 2Fx + G = \omega_0^2, \quad (5.3.12)$$

onde ω_0^2 é a frequência natural do poço analisado.

Cada poço estável nos fornece duas condições de contorno, deflexão máxima e frequência natural do poço, como pode ser visualizadas na figura 5.4. Utilizando as equações (5.3.11) e (5.3.12) e as condições de contorno da figura 5.4, encontramos

$$\begin{cases} x_+^3 E + x_+^2 F + x_+ G + H = 0 \\ x_-^3 E + x_-^2 F + x_- G + H = 0 \\ 3x_+^2 E + 2x_+ F + G = \omega_+^2 \\ 3x_-^2 E + 2x_- F + G = \omega_-^2 \end{cases} \quad (5.3.13)$$

onde x_+ e ω_+ são, respectivamente, a deflexão máxima e frequência natural no poço mais distante da bobina e x_- e ω_- , a deflexão máxima e frequência natural no poço mais

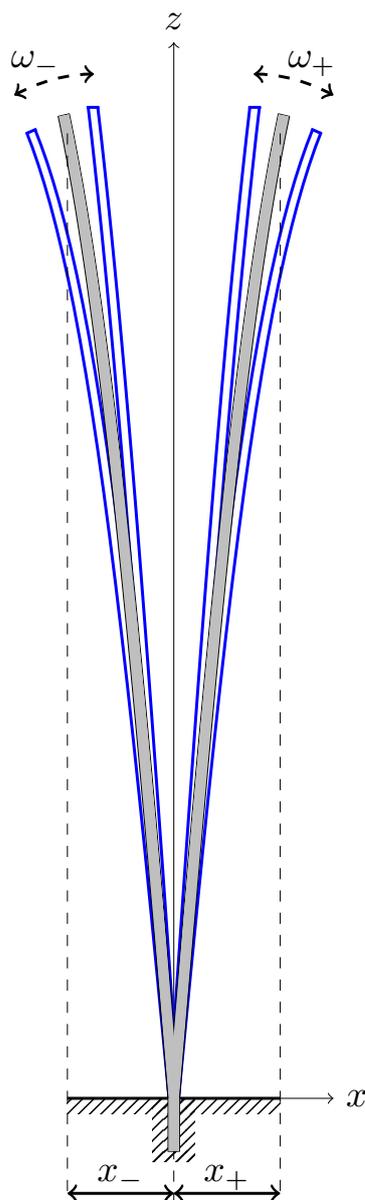


Figura 5.4 – Condições de contorno de uma haste não-linear engastada, onde x_- e x_+ , são as deflexões máximas de cada poço e ω_- e ω_+ , suas respectivas frequências naturais.

próximo da bobina. Os valor de x_+ , x_- , ω_+ e ω_- , são facilmente definidos experimentalmente.

Para definir a frequência natural de cada poço, convertemos a série temporal do poço em uma transformada de Fourier e delas identificamos a frequência fundamental de cada poço. Para isso, utilizamos um script escrito em Python com o pacote "fftpack" e comando "fftfreq". O experimento para obter a deflexão máxima de cada poço foi apresentado

na subseção 3.3.2 e o que será feito para obter a frequência natural de cada poço será apresentado subseção 5.4.1

5.3.3 Amplitude da força externa

Para determinar o valor da amplitude da força externa experimental, devemos conhecer os resultados de γ e $u(x)$, e já ter confeccionado a curva da bi-estabilidade experimental de cada poço. Utilizando os resultados de γ e $u(x)$ na equação (5.3.10), determinamos f_e por integração numérica via script escrito em Python através do pacote "integrate" e comando "odeint".

Inicialmente adotamos um valor qualquer para f_e e, em um intervalo de frequências pré-definidas, avaliamos numericamente a resposta em frequência da equação (5.3.10) neste intervalo. Essa curva foi comparada com a curva obtida experimentalmente, onde observamos se elas coincidiam. Coincidindo, o valor de f_e adotado corresponde ao valor da amplitude da força externa periódica que atuou no sistema. Caso não coincidisse, bastava adotar um novo valor de f_e e refazer o procedimento até que as duas curvas coincidissem. O experimento para definir a curva de bi-estabilidade de cada poço será apresentado na subseção 5.4.2.

5.4 Experimento do oscilador de Duffing e resultados

Nas seções anteriores foram apresentadas formulações matemáticas capazes de modelar à haste engastada em condições dinâmicas não-lineares. Agora explicaremos os experimentos que foram realizado na haste apresentada no capítulo 2 para caracteriza-la de acordo com a equação de Duffing. Também apresentaremos os resultados obtidos.

5.4.1 Série temporal da haste não-linear

Este experimento é muito parecido com o que foi realizado na subseção 4.6.1. Dele obtivemos a curva temporal de cada poço e delas vamos extrair a frequência natural de amortecimento e a constante de dissipação. Também utilizamos o sensor óptico e

osciloscópio. Ele foi executado em cada um dos poços da haste não-linear. Adotamos o seguinte método:

1. Inicialmente engastamos a haste na base de engaste e alinhada em relação ao sensor óptico;
2. Com a haste em condições lineares (sem a ação da força repulsiva magnética), calibramos o sensor óptico em relação a ela de forma que no leitor do sensor estava marcando a posição "0,00";
3. Em seguida reduzimos lentamente a distância entre os ímãs até uma distância d , de forma que $d < d_1$;
 - Nesta distância, d , a haste obrigatoriamente deve formar dois poços no sistema;
4. Na sequência posicionamos a extremidade livre da haste em dos dois poços;
5. Perturbamos a haste com um pequeno impacto, fazendo com ela vibrasse;
 - Este impacto foi forte o suficiente para fazer a haste oscilar, mas fraco o bastante para não resultar em uma migração de poços;
6. O sensor óptico então captou as oscilações da haste e os transmitiu para o osciloscópio em forma de sinal;
7. No osciloscópio esses dados foram lidos, armazenados e transferidos para um computador;
8. Repetimos o mesmo procedimento do passo 4 ao 7 no poço restante.

5.4.2 Curva da bi-estabilidade

Neste experimento obtivemos a curva da bi-estabilidade de cada um poços. Com ela encontramos o resultado da amplitude da força externa periódica. Para realiza-lo utilizamos todos os componentes eletro-eletrônicos disponíveis (sensor óptico, osciloscópio

e gerador de funções). Ele foi realizado em cada poço da do sistema. Procedemos da seguinte forma:

1. Refazemos do passo 1 ao 4 apresentado na subseção 5.4.1;
2. Em seguida programamos a bobina para emitindo um campo magnético de sinal e frequência variáveis;
 - Como a bobina está ligada ao gerador de funções, programamos ele para emitir correntes elétricas alternadas (senoidais) em um intervalo de frequências predefinidas ($\omega_i \leq \omega \leq \omega_f$) e dessa forma, a bobina foi energizada e gerou o campo magnético senoidal;
 - A frequência natural do poço analisado, obrigatoriamente, pertence a esse intervalo de frequências ($\omega_i \leq \omega \leq \omega_f$ e $\omega_0 \in \omega$);
 - Essa varredura de frequência aconteceu nos dois sentidos, ou seja, inicialmente iniciamos em ω_i e fomos até ω_f e depois de ω_f até ω_i ;
 - Essa mudança de frequência ocorreu em um período definido;
 - A amplitude das ondas senoidais fica a critério de quem realiza os experimentos;
 - Como a haste é feita de material ferromagnético, o campo magnético gerado pela bobina fez a haste sofrer, alternadamente, atração e repulsão magnética a cada período de oscilação, fazendo ela vibrar;
3. O sensor óptico então capturou as oscilações da haste e em forma de sinal os enviou ao osciloscópio que capturou, leu e traduziu os dados em gráficos;
4. Essas informações foram transferidas para um computador, via cabo ethernet pelo protocolo TELNET, para análise e confecção da curva da bi-estabilidade do poço em questão;
5. Refazemos do passo 4 ao 7 para no poço restante.

Utilizamos um script em Python para automatizar o processo do ponto 5 ao 7.

5.4.3 Resultados e discussão

De acordo com os experimentos apresentados e as análises analíticas, conseguimos caracterizar a dinâmica oscilatória não-linear desse ressonador. Apresentamos um dos resultados obtidos na tabela 7, para um comprimento $\ell_0=92.50$ mm e $d=9.80$ mm. As figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8, representam, respectivamente, o potencial da haste, a série temporal e transformada de Fourier no poço mais distantes da bobina e no poço mais próximo da bobina e a curva de biestabilidade de cada poço.

Tabela 7 – Parâmetros e resultados experimentais do oscilador de Duffing.

Parâmetros do experimento	
Comprimento livre (mm)	92.50 ± 0.05
Distância entre as faces do ímãs (mm)	9.80 ± 0.05
Resultados experimentais	
x_+ (mm)	2.36 ± 0.05
x_- (mm)	-2.35 ± 0.05
ω_+ (Hz)	6.71 ± 0.01
ω_- (Hz)	5.87 ± 0.02
γ (s^{-1})	0.165 ± 0.005
Resultados obtidos numericamente	
$(f_e)_+$ (N/kg)	0.0215
$(f_e)_-$ (N/kg)	0.0466
$u(x)$ (mm^2/s^2)	$139.9x^4 + 43.5x^3 - 776.5x^2 - 249.1x$

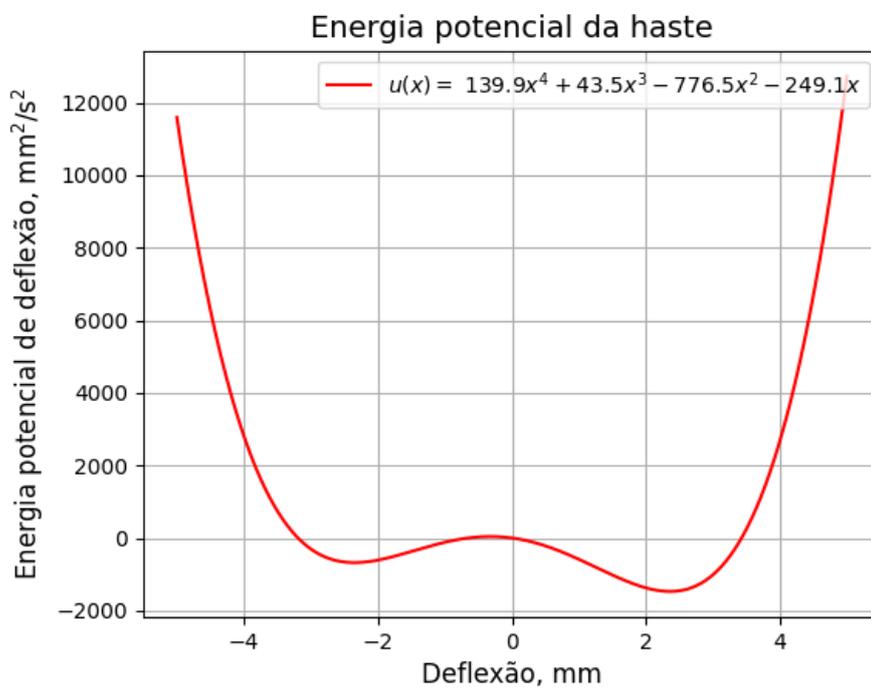


Figura 5.5 – Potencial da haste com comprimento livre de $\ell_0=92.50$ mm as deflexões $x_+=2.36$ mm e $x_-=-2.35$ mm e frequências fundamentais $\omega_+=6.71$ Hz e $\omega_-=5.86$ Hz, onde definimos que $E=139.9$ mm⁻²s⁻², $F=43.5$ mm⁻¹s⁻², $G=-776.5$ s⁻² e $H=-249.1$ mm·s⁻², obtidos a partir do sistema de equações 5.3.13, utilizando as condições iniciais mencionadas acima.

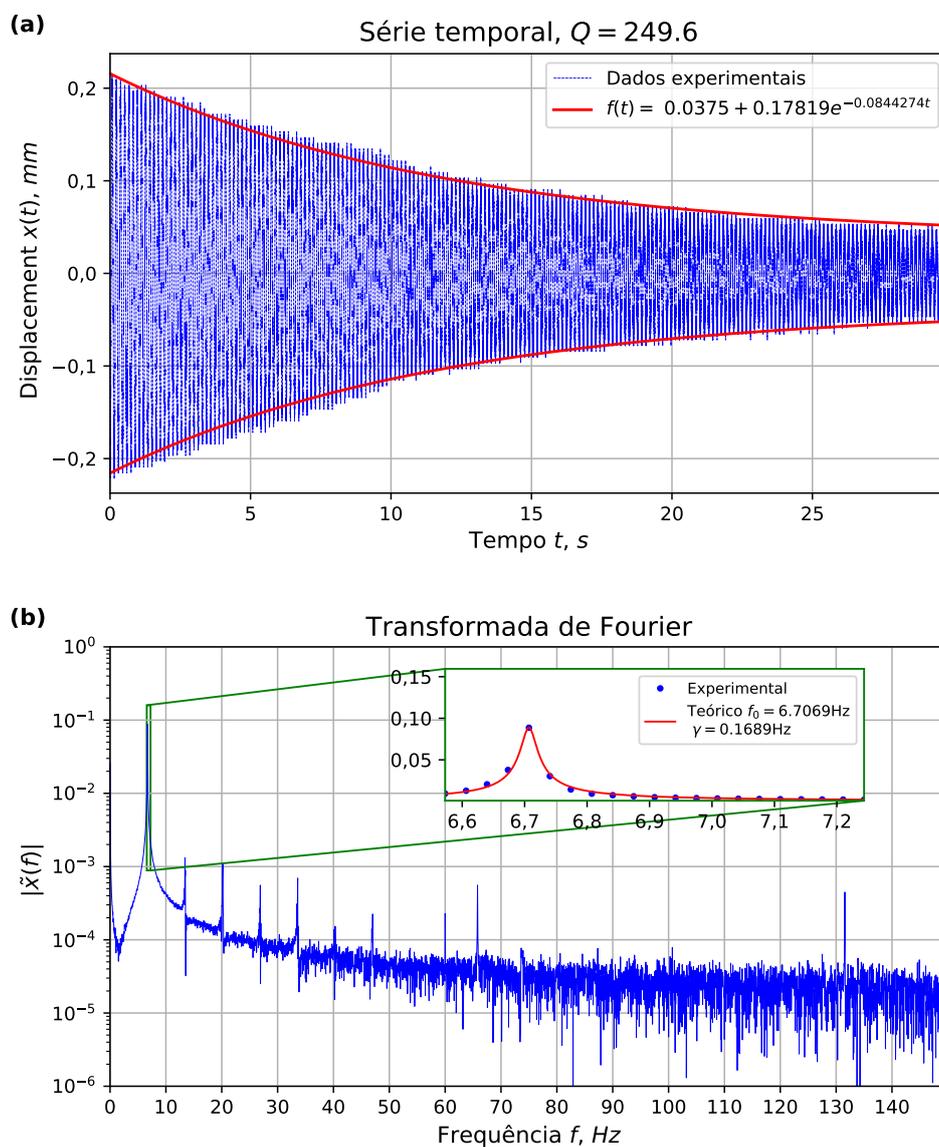


Figura 5.6 – (a) Série temporal das oscilações amortecidas em torno do poço mais próximo do sensor, que está à direita na figura 5.5 e cujo o mínimo encontra-se em $x_+ = 2.36$ mm. (b) Corresponde a transformada de Fourier do melhor ajuste da curva de ressonância. Obtemos γ é 0.17 s^{-1} , ω_+ é 6.71 Hz , com um fator de qualidade $Q = 249.6$.

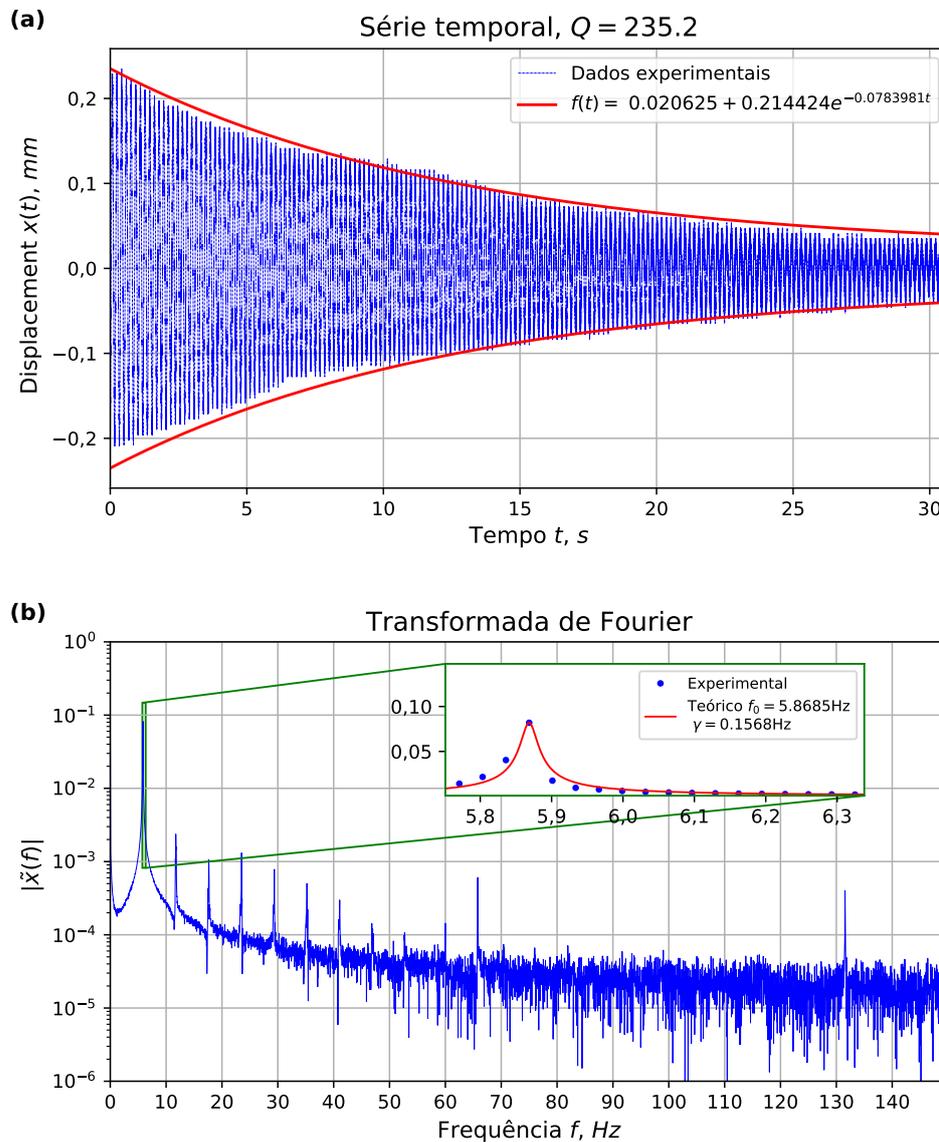
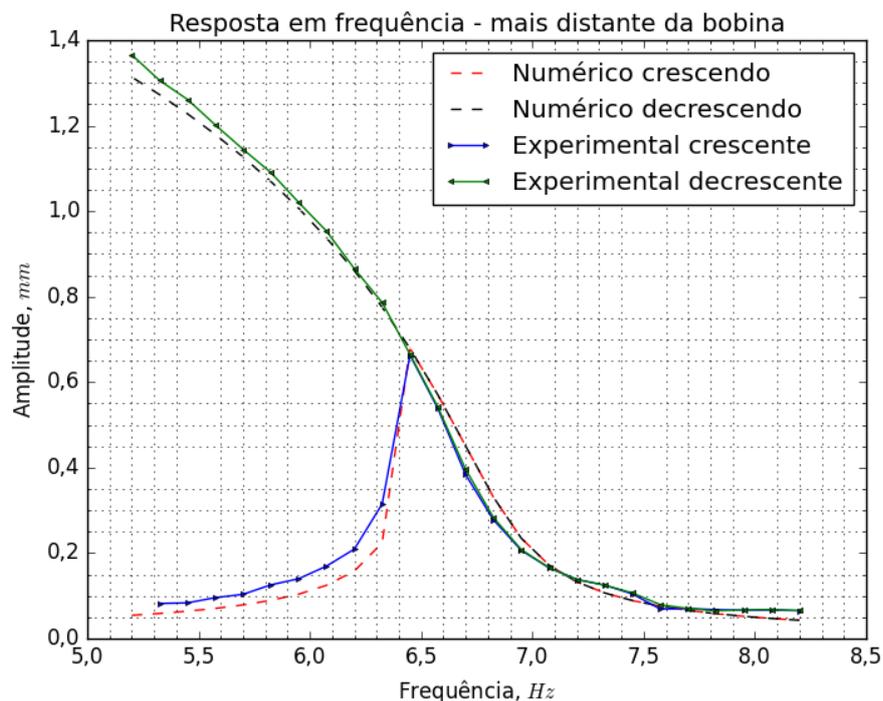
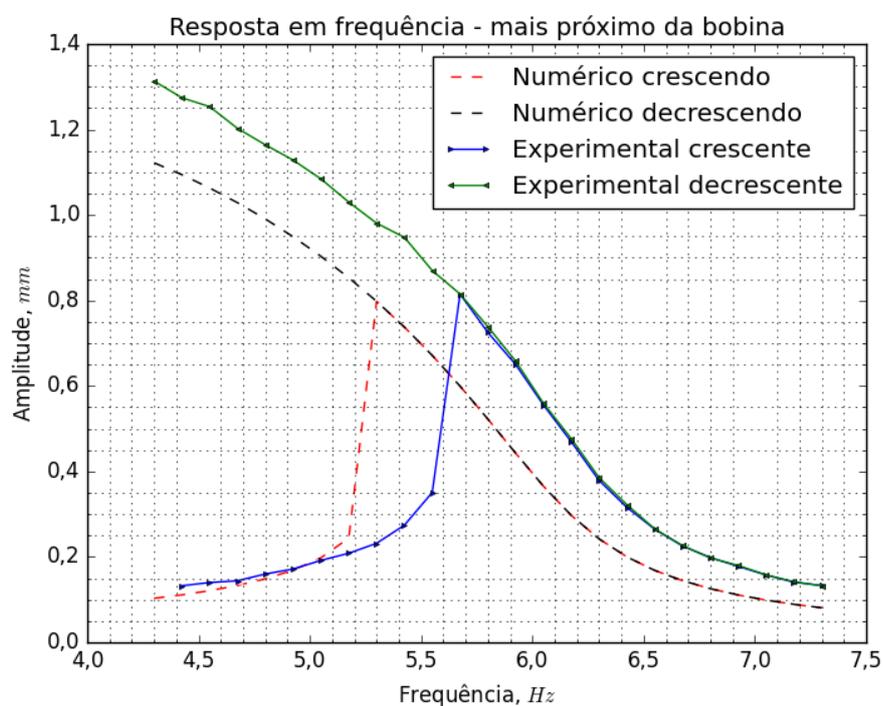


Figura 5.7 – **(a)** Série temporal das oscilações amortecidas em torno do poço mais distante do sensor, que está à esquerda na figura 5.5 e cujo o mínimo encontra-se em $x_+ = -2.35$ mm. **(b)** Corresponde a transformada de Fourier do melhor ajuste da curva de ressonância. Obtemos γ é 0.16 s^{-1} , ω_+ é 5.87 Hz, com um fator de qualidade $Q=235.2$



(a)



(b)

Figura 5.8 – Dados experimentais e ajustes numéricos da resposta em frequência de cada poço do sistema em que (a) representa esses resultados no poço mais distante da bobina com uma deflexão de $x_+ = 2.36$ mm e (b) para o poço mais próximo da bobina com uma deflexão de $x_- = -2.35$ mm; como explicamos na subseção 5.3.3, definimos, a partir do ajuste numérico e comparativo com os dados experimentais, que $(f_e)_+ = 0.0215$ N/kg e $(f_e)_- = 0.0466$ N/kg.

Em Busca do Caos Determinístico

Nesse capítulo estudamos a teoria do caos. Investigamos o caos determinístico e a dinâmica caótica apresentada por sistemas não-lineares. Avaliamos o atrator estranho caótico. Introduzimos os diagramas bidimensionais espaço de fase e mapa de Poincaré. Comumente eles são utilizados na visualização gráfica deste fenômeno.

Realizamos experimentos caóticos na bancada experimental com os ressonadores construídos e avaliamos graficamente os dados obtidos. Este experimento foi muito parecido com o que foi realizado para obter a curva da bi-estabilidade. Pudemos verificar numericamente que é, em princípio, possível obtermos caos em nosso sistema. Resta sabermos ainda se poderemos estimular as vibrações flexurais forte o suficiente para observarmos esse fenômeno de forma inequívoca.

Na seção 6.1 introduzimos o conceito do regime caótico determinístico. Já na seção 6.2 estudamos dois diagramas bidimensionais utilizados para visualizar os regimes caóticos. Na seção 6.3 estudamos os atratores estranhos. Por fim, na seção 6.4 explicamos o experimento que foi executado nos ensaios caóticos e apresentamos os resultados obtidos.

6.1 Regime caótico

Um algum momento os sistemas dinâmicos não-lineares podem apresentar instabilidades e conseqüentemente regime caótico. Quando um sistema está sujeito a dinâmica caótica, ele é extremamente sensível as condições iniciais do problema[12]. Logo, qualquer tipo de interferência que resulte na mudança das condições do sistema, resultando

em drásticas e abruptas mudanças no seu comportamento [5]. Sistemas sujeitos a regimes caóticos são determinísticos a curto prazo, suas entradas são conhecidas, porém respondem de forma "imprevisíveis" e aperiódica a longo prazo [39]. Como não é possível definir as condições iniciais com precisão infinita dos sistemas não-lineares, eles apresentam essa instabilidade.

Para avaliar a dinâmica de um sistema, sujeito ou não ao regime caótico, podemos empregar o espaço de fase, mapa de Poincaré e Lorenz, diagrama de bifurcação, dentre outros. Tratam-se de diagramas bidimensionais que consideram em seus eixos variáveis dinâmicas do sistema. Com eles nós conseguimos avaliar apenas de forma qualitativa o comportamento dinâmico dos sistemas. Cada um deles consideram condições particulares para serem empregados, mas nada impede que todos sejam utilizados em uma única análise. Abordaremos alguns deles a seguir.

Vale ressaltar que a análise visual desses diagramas e das séries temporais, não são suficientes para que admitirmos que o sistema de fato está oscilando em regime caótico. Utilizando apenas a inspeção visual desses gráficos para determinar a presença de caos, apesar de bastante intuitivo, teórica e tecnicamente, torna a conclusão muito vaga [39]. Em algumas situações, por exemplo, a resposta aperiódica do sistema pode se tratar apenas de um regime transiente longo.

6.2 Análise caótica

Para avaliar a dinâmica de um sistema, sujeito ou não ao regime caótico, podemos empregar o espaço de fase, mapa de Poincaré e Lorenz, diagrama de bifurcação, dentre outros. Tratam-se de diagramas bidimensionais que consideram em seus eixos variáveis dinâmicas do sistema. Com eles nós conseguimos avaliar apenas de forma qualitativa o comportamento dinâmico dos sistemas. Cada um deles consideram condições particulares para serem empregados, mas nada impede que todos sejam utilizados em uma única análise. Avaliemos dois deles, o espaço de fases e mapa de Poincaré.

Vale ressaltar que a análise visual desses diagramas e das séries temporais, não são

suficientes para que admitirmos que o sistema de fato está oscilando em regime caótico. Além disso, utilizando apenas a inspeção visual desses gráficos para determinar a presença de caos, apesar de bastante intuitivo, teórica e tecnicamente, torna a conclusão muito vaga [39]. Em algumas situações, por exemplo, a resposta aperiódica do sistema pode se tratar apenas de um regime transiente longo.

6.2.1 Espaço de fase

Espaço de fases é um diagrama no qual cada coordenada do gráfico corresponde a uma variável dinâmica do sistema e nela, um ponto flutua, de forma imprevisível ou não [5]. Foi criado pelos matemáticos W. Hamilton e K. Jacobi, na tentativa de compreender, qualitativamente, a dinâmica não-linear [40]. Apesar de ter sido criado para compreender a dinâmica não-linear, pode também ser empregado em sistemas lineares. Com ele, a solução analítica é substituída por um ponto que se move em uma curva, criando uma espécie de "órbita" [5].

6.2.2 Mapa de Poincaré

Em linhas gerais, o mapeamento de Poincaré representa "[...] o fluxo da solução no espaço de fase. Esta técnica consiste em verificar a posição e velocidade dos n graus de liberdade em intervalos de tempo igualmente espaçados. [...]" [36]. Pense em um estroboscópio que só é capaz de captar medidas a um dado intervalo de tempo constante. Da mesma forma o mapeamento de Poincaré considera medidas apenas em um intervalo de tempo constante. Considere a figura 6.1, onde x_1 e x_2 representam soluções de um problema. Para confeccionar este diagrama fixamos um tempo inicial t_0 e realizamos a medição de x_1 e x_2 nesse tempo. Em seguida uma segunda medida é feita em $t_0 + T$. Então medimos novamente x_1 e x_2 em $t_0 + 2T$ e assim sucessivamente até o tempo $t_0 + nT$, onde $n \in \mathbb{N}$ e fica a critério de quem realiza as medidas. Quando o sistema estiver em regime caótico ou quase periódico, as medidas realizadas a cada intervalo de tempo não devem ser iguais, constatando, qualitativamente, o caos.

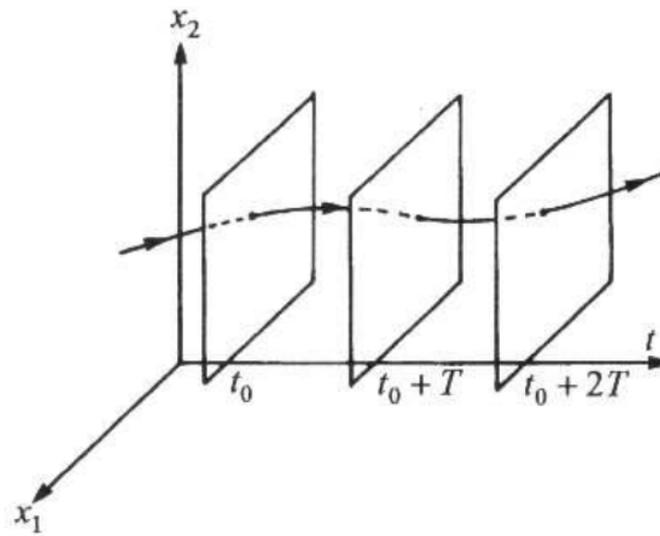


Figura 6.1 – Esquemática de como devem ser feitas as medidas para confecção do mapa de Poincaré. Fonte: [41].

6.2.3 Exemplos de espaços de fases e mapa de Poincaré

Considerando um oscilador de Duffing representado pela equação (5.1.1) com $\gamma = 0.2$, $\omega_0^2 = -1.0$, $\omega = 1.0$, $\beta = 1.0$. Para $f_e = 0.5$, este sistema responde periodicamente como mostrado na figura 6.2a. Já quando $f_e = 0.3$, a resposta será caótica como mostrado na figura 6.2b. Representamos também os respectivos diagramas de fase de cada situação e o mapa de Poincaré do regime caótico nas figuras 6.3 e 6.4.

6.3 Atrator Estranho

Quando se avalia graficamente o regime caótico, apesar da dinâmica ser aperiódico, existe uma região na qual todas as soluções se aproximam de forma convergente com o tempo [13]. Essa região ficou conhecida como atrator estranho caótico. Foi observada pela primeira vez por Edward Lorenz ao estudar a convecção térmica da atmosfera [11]. Seu estudo ficou restrito às análises teóricas. Experimentalmente foi observado pela primeira vez por Moon e Holmes [13].

Segundo Strogatz [5], a medida que a trajetória do sistema não-linear evolui com o tempo, em algumas situações esse caminho é atraído para um objeto "estranho". Esse objeto, pelo qual o percurso é atraído, corresponde ao atrator estranho. Ainda segundo

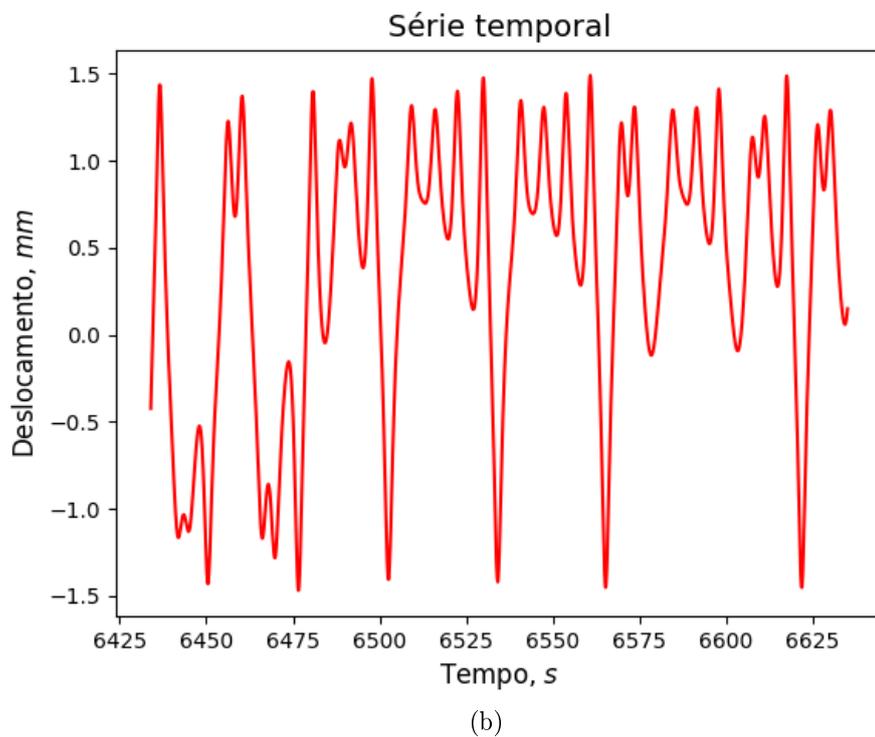
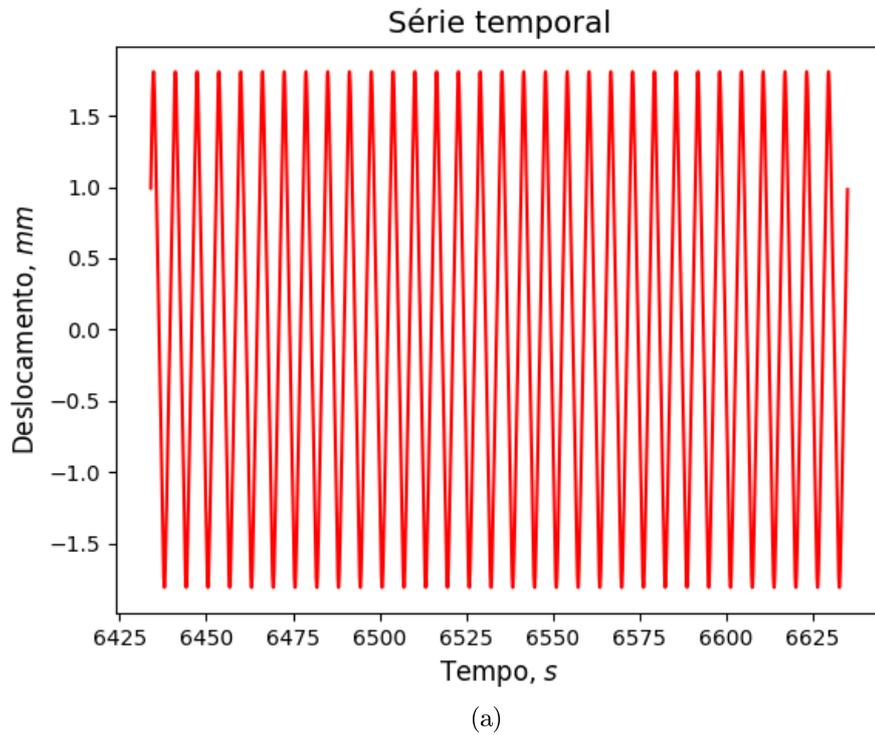


Figura 6.2 – Curva temporal da equação de Duffing com $\gamma = 0.2$, $\omega_0^2 = -1.0$, $\omega = 1.0$ e $\beta = 1.0$, quando (a) $f_e = 0.5$ e (b) $f_e = 0.3$.

ele, esse objeto é extremamente sensível as condições iniciais do problema, tornando, a longo prazo, o movimento imprevisível. Ele também pode ser entendido como o conjunto

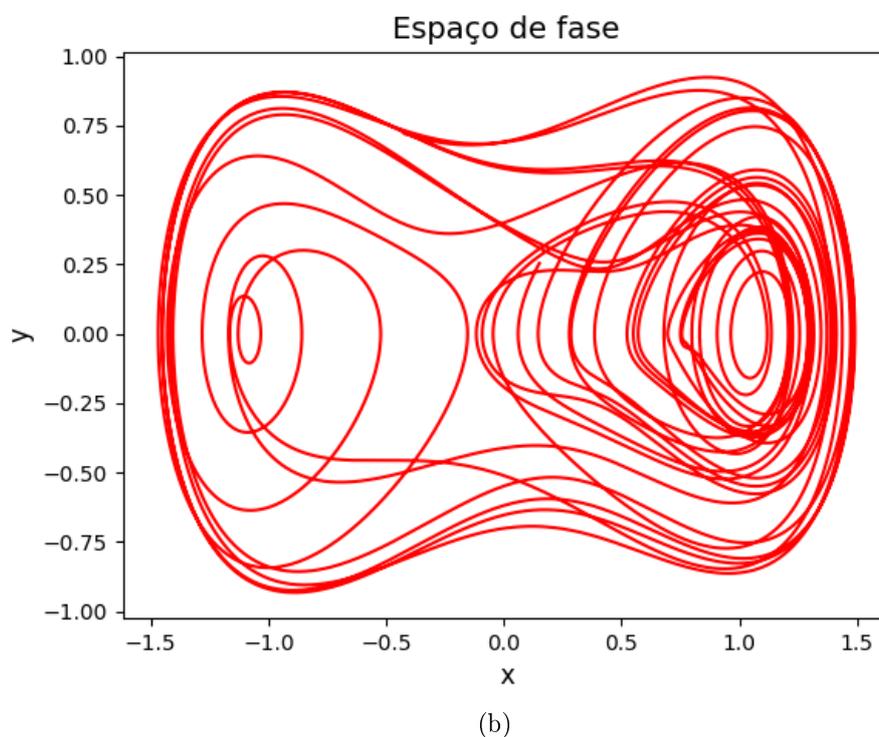
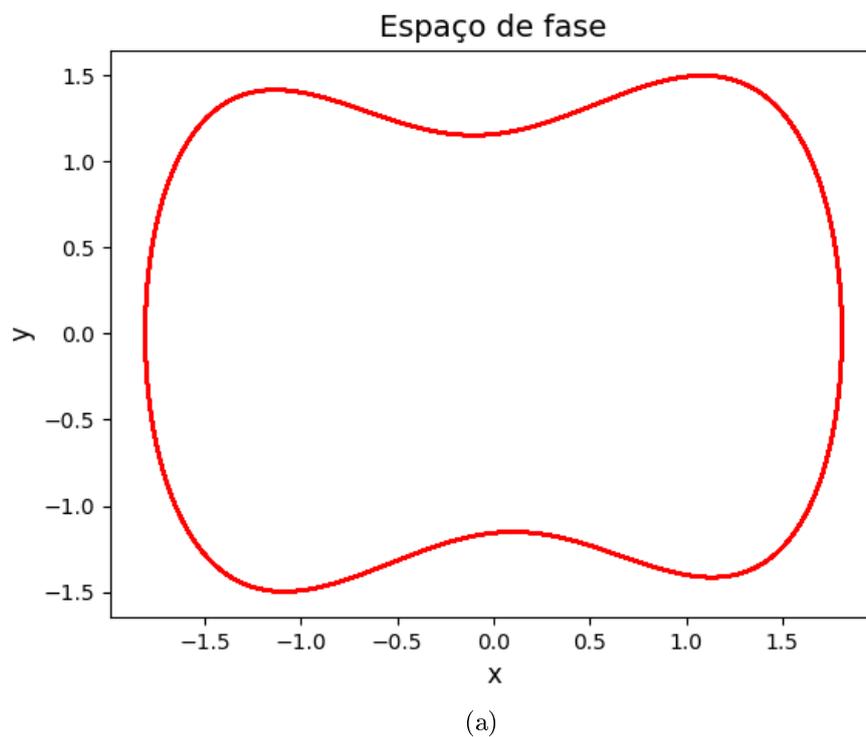


Figura 6.3 – Diagramas de fase da equação de Duffing com $\gamma = 0.2$, $\omega_0^2 = -1.0$, $\omega = 1.0$ e $\beta = 1.0$, quando (a) $f_e = 0.5$ e (b) $f_e = 0.3$.

de pontos finais da dinâmica do sistema, ou seja, a trajetória, apesar de aperiódica e sensível as condições iniciais, oscilará ao redor de uma órbita qualquer em torno desse

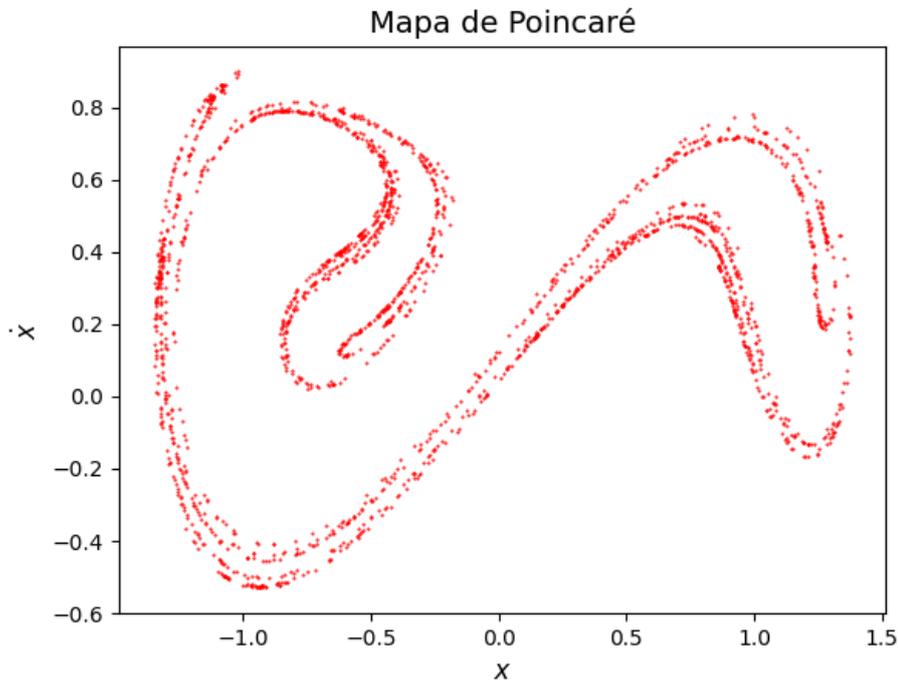


Figura 6.4 – Mapa de Poincaré da equação de Duffing com $\gamma = 0.2$, $\omega_0^2 = -1.0$, $\omega = 1.0$ e $\beta = 1.0$, quando **(a)** $f_e = 0.5$ e **(b)** $f_e = 0.3$, onde $0 \leq n \leq 1024$, $t_0 = 0$ s e $T = 6.28$ s.

conjunto de pontos [39].

O termo "estranho" provem do fato da dimensão desse tipo de atrator ser tipicamente fractal, consequência de sua geometria torcida. Além disso, quando o sistema possui três pontos de equilíbrio, sendo dois estáveis e um instável, como é caso das análises feitas nesta dissertação, o atrator estranho é dito como de segunda ordem [42].

De maneira bem objetiva e resumida, pode-se considerar que, quando sistemas estão sujeitos a atratores estranhos, eles oscilam de forma imprevisível, porém não-aleatória, ao longo de órbitas fixas de objetos fractais. Fractal é um termo empregado na matemática que denota que um objeto tem geometrias e dimensões irregulares [40]. O fato do atrator estranho ser fractal já foi, inclusive, um dos principais parâmetros para definir se o regime do sistema é caótico ou aleatório [39].

6.4 Ensaio caótico e resultados

Nas seções anteriores foram apresentados conceitos e diagramas capazes de qualificar o regime caótico. Agora explicaremos o experimento caótico que foi realizado na haste apresentada no capítulo 2. Também apresentaremos os resultados obtidos.

6.4.1 Ensaio caótico

Neste experimento varreremos um intervalo de frequência até obter uma que resultasse nas oscilações caóticas das hastes (tentativa e erro). Trata-se de um experimento muito parecido com que o foi utilizado para obter a curva da bi-estabilidade, porém aqui foi realizado manualmente. Contudo, convertamos os dados obtidos em uma série temporal. Utilizamos todos os componentes eletro-eletrônicos disponíveis (sensor óptico, osciloscópio e gerador de funções). Ele foi realizado em cada poço da do sistema. Adotamos o seguinte método:

1. Refazemos do passo 1 ao 4 apresentado na subseção 5.4.1;
2. Programamos a bobina para emitindo um campo magnético de sinal variável em um dado intervalo de frequências, $\omega_i \leq \omega \leq \omega_f$, até que uma delas resultasse nas oscilações caóticas da haste;
 - Essa varredura de frequência foi feita nos dois sentidos, ou seja, inicialmente iniciamos em ω_i e fomos até ω_f e depois de ω_f até ω_i ;
 - Como a haste é feita de material ferromagnético, o campo magnético gerado pela bobina fez a haste sofrer, alternadamente, atração e repulsão magnética a cada período de oscilação, fazendo ela vibrar.
3. O sensor óptico então capturou as vibrações caóticas da haste e em forma de sinal os enviou ao osciloscópio que capturou, leu e traduziu os dados em gráficos;
4. Por fim, essas informações foram transferidas para um computador, onde analisamos e confeccionamos as curvas e respectivos diagramas.

6.4.2 Resultados e discussão

Neste momento nós só dispomos apenas de um detector de deslocamento. Dessa forma, só conseguimos captar informações de uma variável dinâmica do sistema. Para construir os diagramas apresentados na seção 6.1, são necessários pelo menos dois detectores, em que cada um detectará uma variável dinâmica distinta do sistema. Neste momento nós já estamos nos dedicando em como captar os dados desta segunda variável e tornar possível a confecção dos diagramas caóticos, a fim de caracterizar o regime caótico a qual os ressonadores estão sujeitos. Além disso, considerando os dados obtidos, intuitivamente podemos classificar o regime dos ressonadores como caótico. Do ponto de vista físico e matemático, ainda não podemos tirar essa conclusão. Na tabela 8 apresentamos os dados experimentais do ensaio caótico. Nas figuras 6.5 e 6.6 expomos as séries temporais e transformadas de Fouries para as respostas tipicamente caóticas.

Tabela 8 – Parâmetros e resultados experimentais da dinâmica caótica.

Parâmetros do experimento	
Comprimento livre (mm)	92.50 ± 0.05
Distância entre as faces do ímãs (mm)	9.80 ± 0.05
Frequência 1 da força externa (Hz)	1.83
Frequência 2 da força externa (Hz)	2.60
Resultados experimentais	
Regime caótico 1	6.5
Regime caótico 2	6.6

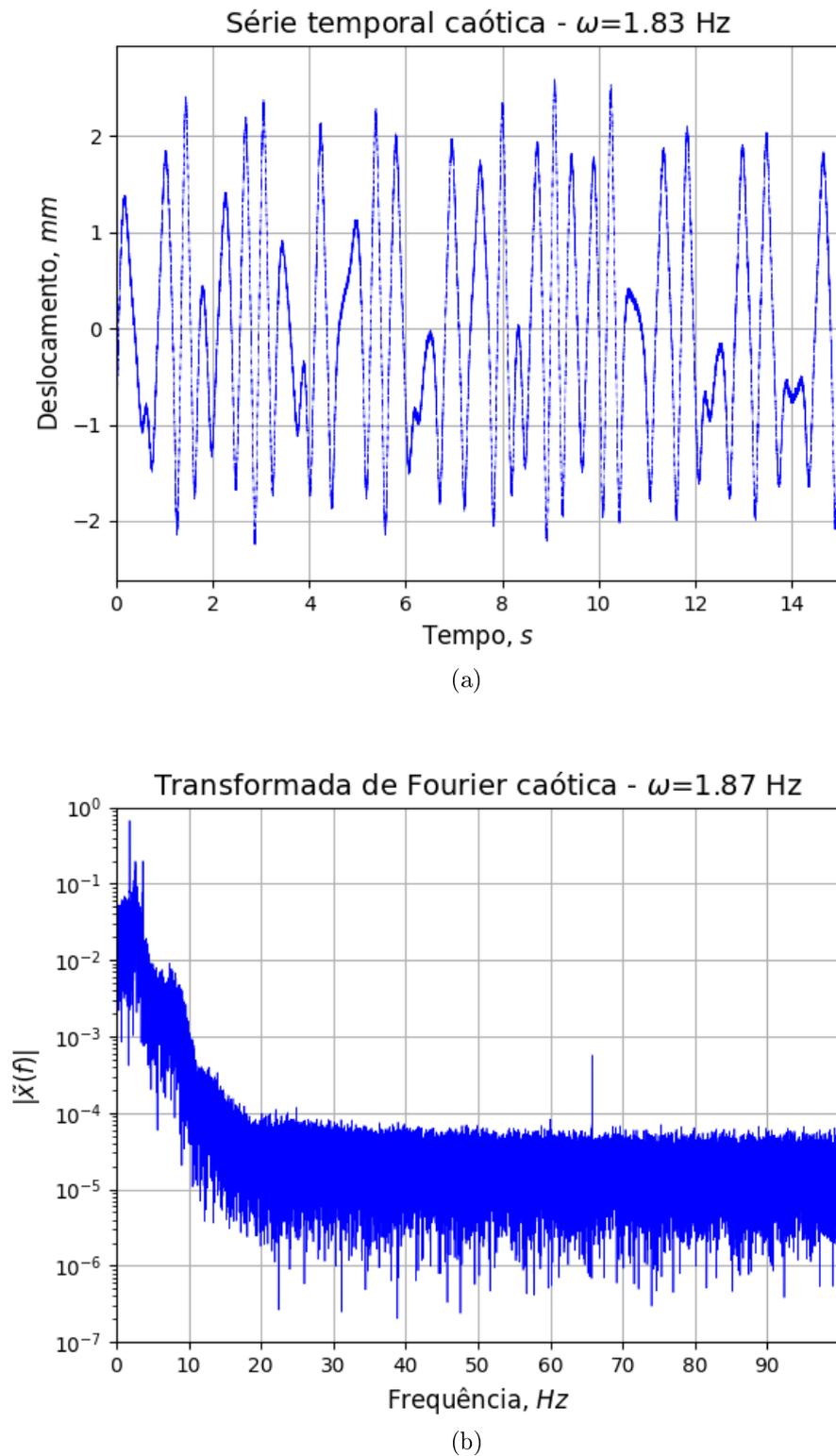


Figura 6.5 – (a) Série temporal caótica da haste de 0.26 mm, quando sujeita a uma força magnética senoidal na frequência de 1.83 Hz (b) transformada de Fourier da série temporal mostrada na figura (a).

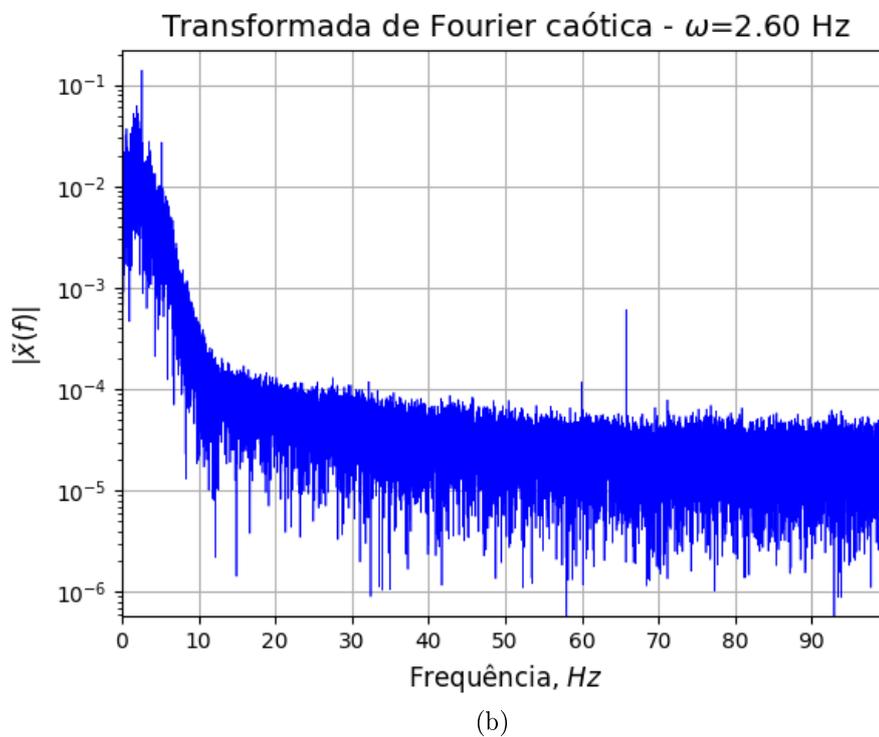
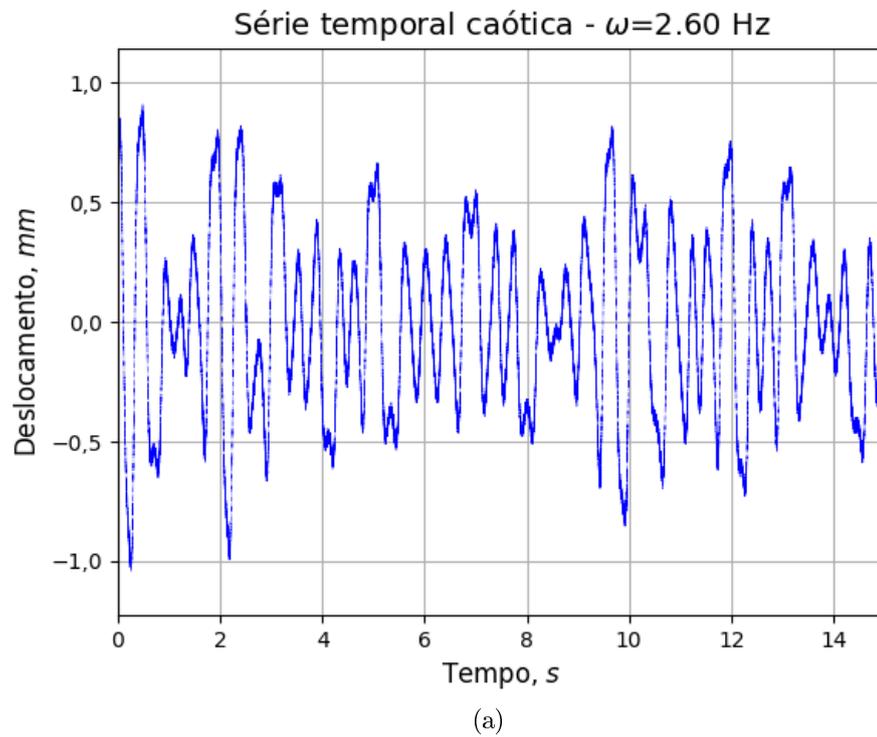


Figura 6.6 – (a) Série temporal caótica da haste de 0.26 mm, quando sujeita a uma força magnética senoidal na frequência de 2.60 Hz (b) transformada de Fourier da série temporal mostrada na figura (a).

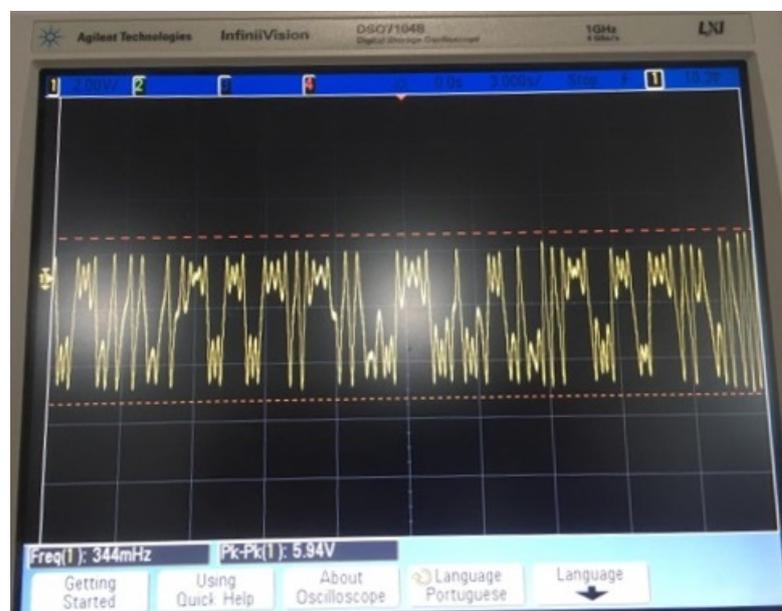


Figura 6.7 – Imagem da tela do osciloscópio durante a realização dos experimentos caóticos.

Conclusão

Ao longo desta dissertação construímos uma bancada experimental e ressonadores mecânicos para realizar e medir vibrações flexurais em hastes (cantiléveres) de aço delgados. Caracterizamos esses ressonadores mecânicos tanto de forma estática quanto dinâmica. Na condição estática, estudamos a flambagem que elas sofrem ao serem submetidas a uma força puramente axial. Já na dinâmica investigamos as vibrações flexurais amortecidas e as forçadas. Investigamos tanto pequenas vibrações no limite linear, quanto vibrações de grande amplitude no limite não linear. Iniciamos nossa análise teórica utilizando a teoria da elasticidade para hastes delgadas de Euler-Bernoulli, tanto no domínio estático quanto no domínio dinâmico. Mostramos como obter um oscilador de Duffing mecânico por meio da interação repulsiva entre um ímã fixado na extremidade livre da haste e outro ímã, do mesmo tipo, fixo na bancada um pouco acima do ressonador. À medida que obtemos os resultados experimentais, nós os validamos teoricamente.

No capítulo 2, apresentamos a bancada experimental que foi construída durante o desenvolvimento desta dissertação. Explicamos seus principais subsistemas, os ressonadores ensaiados e o aparato opto-eletrônico necessário para seu funcionamento. Descrevemos como cada subsistema atua na bancada e como eles funcionam. Nós a projetamos para executar todos os experimentos aqui descritos. Apesar da complexidade deste sistema, pois envolve diversos domínios da física tais como mecânica, magnetismo, e eletrônica e óptica, com ela obtivemos excelentes resultados. Em praticamente todos os experimentos obtivemos resultados de acordo com os modelos teóricos utilizados para modelá-los.

No capítulo 3, revisamos a teoria de elasticidade estática para vigas de Euler-Bernoulli com o intuito de obtermos a forma da viga uma vez que apliquemos forças externas conhecidos. No caso estudado, as forças externas estáticas são devidas à força magnética repulsivas entre ímãs cilíndricos permanentes com magnetização uniforme e axialmente orientados. Apresentamos as condições e hipóteses do modelo de Euler-Bernoulli. Baseado nelas encontramos as equações que modelam uma viga estática sujeita a uma força qualquer. De acordo com este estudo, avaliamos a estabilidade das vigas engastadas sujeitas a uma força puramente axial em sua extremidade livre e definimos o conceito de força crítica de flambagem. Além disso, definimos, aproximadamente, a força de repulsão magnética gerada entre dois ímãs permanentes cilíndricos. Nesta análise consideramos que os ímãs estavam com seus eixos alinhados e possuíam magnetizações opostas axialmente orientadas. Obtivemos uma expressão analítica capaz de estimar esta força. Estas duas análises nos permitirá calcular, de forma aproximada, qual a distância mínima entre os ímãs de neodímio para que a haste deflita, formando os dois poços do sistema. Estamos avaliando a melhor forma de mensurar o valor da magnetização, M_0 , dos ímãs. Durante esta análise experimental, a maior dificuldade encontrada foi alinhar os eixos dos dois ímãs.

No capítulo 4, investigamos o modelo dinâmico de Euler-Bernoulli para vigas delgadas e engastadas. Com esse modelo obtivemos os modos normais de vibrações flexurais da haste. Com base nos modos normais e em suas frequências obtivemos estimativas para a massa efetiva e a constante elástica ao longo da haste. Esses parâmetros foram usados em seguida para obtermos o modelo de grau único de liberdade para as vibrações flexurais. Experimentalmente, obtivemos séries temporais de vibrações amortecidas da haste, com e sem ímã acoplado na extremidade livre. Destas curvas obtivemos a frequência fundamental de cada situação. Encontramos uma boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais. Via transformada de Fourier das séries temporais de oscilações amortecidas também obtivemos a taxa de amortecimento. No entanto, ainda não desenvolvemos um modelo teórico para a perda de energia das vibrações, pois isso não é um problema

simples tendo três diferentes origens. A saber, perdas de vibração da base de engaste, perdas por atrito viscoso com o ar e perdas devidas ao atrito interno da haste. Sabendo que o ímã foi acoplado à extremidade da haste, pudemos estimar com boa precisão a nova frequência fundamental do ressonador mecânico. Além dessa análise linear, fizemos também uma análise não-linear para obtermos estimativas para os coeficientes dos termos não lineares da força elástica de restituição da haste.

No capítulo 5, estudamos um oscilador do tipo Duffing amortecido e forçado. Baseado neste modelo teórico, determinamos o comportamento dinâmico dos ressonadores em condições não-lineares. Determinamos os parâmetros de um oscilador de Duffing assimétrico via quatro medidas experimentais: as posições de equilíbrio do ressonador em cada poço do potencial duplo e suas respectivas frequências de oscilações amortecidas de pequena amplitude. Uma vez tendo obtido esses parâmetros, pudemos ajustar a curva de biestabilidade em cada poço do oscilador de Duffing forçado. No experimento que realizamos para obter a curva da bi-estabilidade de cada poço, automatizamos todo o procedimento de obtenção de dados por meio de um script escrito em Python para comunicação, controle e obtenção de dados dos instrumentos eletrônicos da bancada experimental. Considerando a aproximação em único grau de liberdade que utilizamos e o baixo custo que tivemos na construção da mesa inercial, acreditamos que os resultados foram muito bons, superando todas as expectativas que tínhamos.

No capítulo 6 apresentamos nossa tentativa de obtermos experimentalmente uma dinâmica caótica nas vibrações flexurais do ressonador mecânico. Conseguimos obter séries temporais de vibrações flexurais com características caóticas na bancada experimental. O comportamento dessas vibrações parece bem imprevisível e o espectro de Fourier de uma série temporal apresenta picos distribuídos com uma faixa larga de baixa frequência. No entanto, ainda não podemos afirmar categoricamente que o que observamos pode ser caracterizado como caos determinístico. Não conseguimos ainda obter a função mapa de Lorenz [5] das séries temporais aparentemente caóticas. Também não conseguimos obter um atrator estranho utilizando o mapa de Poincaré. Isso por que somente medimos

uma variável dinâmica em nosso experimento. No entanto, com base nas equações do oscilador de Duffing assimétrico caracterizada no capítulo 5, pudemos prever regiões com comportamento caótico de forma numérica. O que parece promissor para guiar futuros experimentos.

Nessa dissertação atingimos quase todos os objetivos delineados no início de nossos trabalhos. Para o futuro mais imediato tentaremos provar que é possível atingir a dinâmica caótica. Para isso teremos que mostrar que obtemos uma rota de dobramentos de período para o caos [43] ou a rota de Ruelle-Takens via sucessivas bifurcações de Hopf [44]. A rota da intermitência caótica [45] também é uma possibilidade a ser investigada. Uma última possibilidade é a rota de crises prevista por Grebogi, Ott e Yorke [46]. Além disso pretendemos adicionar mais um sensor, um piezoelétrico ou uma bobina pickup, para termos um canal de dados das vibrações e assim podermos visualizar um atrator estranho.

Outro objetivo futuro é estudar o efeito de ruído (mecânico e magnético) sobre a dinâmica desse sistema. Um fenômeno interessante a se observar é o da ressonância estocástica [47]. Por último, observamos que a teoria e alguns métodos experimentais desenvolvidos e estudados neste trabalho podem ser aplicados a sistemas físicos de dimensões muito menores do que os ressonadores mecânicos aqui estudados. Por exemplo, podemos aplicar esses métodos ao estudo da dinâmica de hastes de microscópios de força atômica ou a ressonadores feitos de nanotubos de carbono.

Referências

- [1] L. Euler. *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*. Euler Archive-All Works. 65, 1744.
- [2] A. E. H. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, 1944.
- [3] A. A. Batista, C. E. R. da Silva, and A. A. L. de Souza. Flexural vibrations of a thin clamped steel bar. *Eur. J. Phys.*, 39, 2018.
- [4] G. Duffing. Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigenfrequenz. *Vieweg U. Sohn, Braunschweig*, 7, 1918.
- [5] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, 2018.
- [6] B. Van der Pol. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. *Radio Review*, 1, 1920.
- [7] B. van der Pol and J. Van Der Mark. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 6, 1928.
- [8] B. Van der Pol. The nonlinear theory of electric oscillations. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 22, 1934.
- [9] J. W. Strutt. On maintained vibrations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 15, 1883.

- [10] J. W. Strutt. *The Theory of Sound*, volume 1. Dover, 1945.
- [11] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 1963.
- [12] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 2002.
- [13] F. C. Moon and P. J. Holmes. A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, 65, 1979.
- [14] S. S. Rao and F. F. Yap. *Mechanical Vibrations*. Prentice hall Upper Saddle River, 2011.
- [15] R. L. Harne and K. W. Wang. A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems. *Smart materials and structures*, 22, 2013.
- [16] C. Wei and X. Jing. A comprehensive review on vibration energy harvesting: Modelling and realization. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 74, 2017.
- [17] M. I. Friswell, S. F. Ali, O. Bilgen, S. Adhikari, A. W. Lees, and G. Litak. Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 23, 2012.
- [18] S. M. Han, H. Benaroya, and T. Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration*, 225, 1999.
- [19] M. K. Giaretta. Vibrações forçadas com força axial num modelo de Euler-Bernoulli para vigas. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.
- [20] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press, 1970.
- [21] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, and J. H. Romo. *Fundamentos de física*. Companhia Editorial Continental, 1986.
- [22] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall New Jersey, 1962.

- [23] P. A. Tipler and G. Mosca. *Física para cientistas e engenheiros*. Livros Técnicos e Científicos, 2009.
- [24] W. Greiner. *Classical electrodynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975.
- [26] R. C. Hibbeler. *Mechanics of Materials*. Pearson Educação, 2010.
- [27] F. Beer. *Statics and Mechanics of Materials*. McGraw-Hill Higher Education, 2016.
- [28] William Tyrrell Thomson. *Teoria da vibração com aplicações*. Intersciencia, 1978.
- [29] N. S. Piskunov. *Differential and integral calculus*. P. Noordhoff, 1965.
- [30] S. A. Teukolsky, B. P. Flannery, W. H. Press, and W. T. Vetterling. Numerical recipes in C. *Press Syndicate of the University of Cambridge, New York*, 693, 1992.
- [31] H. Hu, E. H. Dowell, and L. N. Virgin. Resonances of a harmonically forced Duffing oscillator with time delay state feedback. *Nonlinear Dynamics*, 15, 1998.
- [32] I. Kovacic and M. J. Brennan. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and Their Behaviour*. John Wiley & Sons, 2011.
- [33] R. D. Blevins. *Flow induced vibration of bluff structures*. Nova Iorque, Van Nostrand Reinhold Co., 1977. 377 p., 1977.
- [34] J. Sunday. The Duffing oscillator: applications and computational simulations. *Asian Research Journal of Mathematics*, 2, 2017.
- [35] D. M. G. SANTOS et al. Amplificação de pequenos sinais em osciladores parametricamente forçados. Master's thesis, Universidade Federal de Campina Grande, 2015.
- [36] E. Pasquetti. *Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não Lineares*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- [37] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 2008.

- [38] B. Balachandran and E. B. Magrab. *Vibrations*. Cengage Learning, 2008.
- [39] A. Hastings, C. L. Hom, S. Ellner, P. Turchin, and H. C. J. Godfray. Chaos in ecology: is mother nature a strange attractor? *Annual review of ecology and systematics*, 24, 1993.
- [40] L. C. Beraldi. Dinâmica de um oscilador não linear forçado sujeito a um potencial biestável. Master's thesis, Universidade Federal do Paraná, 1995.
- [41] V. A. Oliveira and J. R. Rosolen. Análise de sistemas não-lineares, 2011. <http://www.sel.eesc.usp.br/lac/disciplinas/sels/arquivos/sel364/private/aula1a2cnl.pdf>. Acesso em: 18/01/2020.
- [42] P. Holmes. A nonlinear oscillator with a strange attractor. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 292(1394):419–448, 1979.
- [43] Mitchell J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19:25–52, 1978.
- [44] Sheldon Newhouse, David Ruelle, and Floris Takens. Occurrence of strange axioma attractors near quasi periodic flows on T^m , $m \geq 3$. *Communications in Mathematical Physics*, 64(1):35–40, 1978.
- [45] Yves Pomeau and Paul Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 74(2):189–197, 1980.
- [46] Celso Grebogi, Edward Ott, and James A Yorke. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1-3):181–200, 1983.
- [47] Luca Gammaitoni, Peter Hänggi, Peter Jung, and Fabio Marchesoni. Stochastic resonance. *Reviews of modern physics*, 70(1):223, 1998.